

«Утверждаю»

Директор РИИ АлтГТУ

_____ А.А. Кутумов

«__» _____ 201__ г.

Рубцовский индустриальный институт (филиал) ФГБОУ ВО «Алтайский
государственный технический университет им. И.И. Ползунова»

Тест по математике

Вариант №1

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развернутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 4 часа (240 минут).

Ответы к заданиям записываются в бланк ответов в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13-19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов.

Бланк ответов заполняется яркими чернилами. Допускается использование гелевой, или капиллярной, или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при выполнении работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Часть 1

1. Вычислить: $(\frac{92}{85} + \frac{104}{17})\frac{5}{18} + (\frac{1}{3} + \frac{7}{6}) - \frac{5}{2}$.

2. На сколько процентов уменьшится объем пирамиды, если уменьшить площадь ее основания на 20%?

3. Определить число n членов арифметической прогрессии, если $a_n = 200, a_1 = 10, d = 5$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 19, \\ xy = 84 \end{cases}$$

и в ответе записать наибольшее значение y , удовлетворяющее ей.

5. Решить неравенство $\frac{4}{2+x} \leq 0$ и указать наибольшее целое значение x , удовлетворяющее ему.

6. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 5x + 8} = x + 1$.

7. Вычислить без таблиц $9^{\log_3 8}$.

8. Машина выехала со скоростью 50 км/ч. Через полчаса вслед за ней выехала другая машина, которая догнала ее через 2,5 ч. Найти скорость второй машины (в км/ч).

Часть 2

9. Найти больший корень уравнения $9^{x^2+4x-4,5} = 3$.

10. Найти наибольшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству $(0,6)^{2x^2+8x} > 1$.

11. Решить уравнение $\log_3(2x - 5) = \log_3(x + 4)$.

12. Найти целое значение x , удовлетворяющее неравенству $\log_2(x - 7,5) < 0$.

13. Упростить выражение $\frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$.

14. Вычислить $40\sin\alpha$, если $\cos 2\alpha = 7/8$ и $135^\circ < \alpha < 180^\circ$.

15. Найти (в градусах) решение x уравнения, $tg^2x - 2tgx - 3 = 0$, удовлетворяющее условиям $-90^\circ < x < 0^\circ$.

16. Площадь равнобокой трапеции равна $4\sqrt{3}\text{см}^2$, меньшее основание равно 3 см, а угол, образованный боковой стороной с большим основанием, составляет $\pi/3$. Найти большее основание.

17. Две окружности радиусов 3 и 5 см касаются друг друга внешним образом. Проведены две общие внешние касательные. Найти расстояние от точки пересечения этих касательных до центра большей окружности.

18. Через диагональ нижнего основания прямоугольного параллелепипеда и противоположную ей вершину верхнего основания проведена плоскость. Определить объем параллелепипеда, если площадь треугольника, образующегося в сечении, равна 20 см^2 , а основанием параллелепипеда служит квадрат со стороной $4\sqrt{2} \text{ см}$.

19. В конусе, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом 60° , вписан шар радиуса 1 см . Найти (в см) площадь боковой поверхности конуса. Считать $\pi = 3,14$.

Вариант №1

Часть 1

1. Вычислить: $\left(\frac{92}{85} + \frac{104}{17}\right) \frac{5}{18} + \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{6}\right) - \frac{5}{2}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\frac{92}{85} + \frac{104}{17}\right) \frac{5}{18} + \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{6}\right) - \frac{5}{2} &= \left(\frac{92+104 \cdot 5}{85}\right) \cdot \frac{5}{18} + \left(\frac{2+7}{6}\right) - \frac{5}{2} = \\ &= \frac{612}{85} \cdot \frac{5}{18} + \frac{9}{6} - \frac{5}{2} = \frac{34}{17} + \frac{9}{6} - \frac{15}{6} = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

2. На сколько процентов уменьшится объем пирамиды, если уменьшить площадь ее основания на 20%?

Решение.

$$S_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

$$S_1 = \frac{1}{3} 0,8 S_{\text{осн}} \cdot H.$$

$$\frac{S_1}{S_{\text{пир}}} = 0,8; \quad 100 - 80 = 20.$$

Ответ: 20.

3. Определить число n членов арифметической прогрессии, если $a_n = 200$, $a_1 = 10$, $d = 5$.

Решение.

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

$$200 = 10 + 5(n-1).$$

$$10 + 5n - 5 = 200.$$

$$5n = 195.$$

$$n = 39.$$

Ответ: 39.

4. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x + y = 19, \\ xy = 84. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x + y = 19, \\ xy = 84, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 19 - y, \\ (19 - y)y = 84. \end{cases}$$

$$19y - y^2 - 84 = 0$$

$$-y^2 + 19y - 84 = 0$$

$$y^2 - 19y + 84 = 0$$

$$D = 25$$

$$y_1 = \frac{19+5}{2} = 12$$

$$y_2 = \frac{19-5}{2} = 7$$

$$\Rightarrow x_1 = 19 - 12 = 7$$

$$\Rightarrow x_2 = 19 - 7 = 12$$

Ответ: 12.

5. Решить неравенство $\frac{4}{2+x} \leq 0$ и указать наибольшее целое значение x ,

удовлетворяющее ему.

Решение.

$$\frac{4}{2+x} \leq 0 \Rightarrow 2+x < 0$$

$$x < -2; \quad x \in (-\infty; -2)$$

Ответ: -3.

6. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 5x + 8} = x + 1$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 5x + 8 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty; +\infty) \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x \geq -1$$

$$\left(\sqrt{x^2 - 5x + 8}\right)^2 = (x+1)^2$$

$$x^2 - 5x + 8 = x^2 + 2x + 1$$

$$-5x - 2x = 1 - 8$$

$$-7x = -7$$

$$x = 1$$

Ответ: 1.

7. Вычислить без таблиц $9^{\log_3 8}$.

Решение.

$$9^{\log_3 8} = 3^{2\log_3 8} = 3^{\log_3 8^2} = 3^{\log_3 64} = 64.$$

Ответ: 64.

8. Машина выехала со скоростью 50 км/ч. Через полчаса вслед за ней выехала другая машина, которая догнала ее через 2,5 часа. Найти скорость второй машины (в км/ч).

Решение.

x км/ч – скорость второй машины.

Время в пути первой машины $\left(\frac{1}{2} + 2,5\right) = 3$ ч.

Расстояние, которое проехали машины: $50 \cdot 3 = 150$ км.

Вторая машина была в пути 2,5 ч. Следовательно, ее скорость равна:

$$x = \frac{150}{2,5} = 60 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 60.

Часть 2

9. Найти больший корень уравнения $9^{x^2+4x-4,5} = 3$.

Решение.

$$9^{x^2+4x-4,5} = 3$$

$$3^{2(x^2+4x-4,5)} = 3$$

$$3(x^2 + 4x - 4,5) = 1$$

$$2x^2 + 8x - 9 - 1 = 0$$

$$2x^2 + 8x - 10 = 0$$

разделим обе части уравнения на 2

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Решим уравнение $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Ответ: 1.

10. Найти наибольшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству $(0,6)^{2x^2+8x} > 1$.

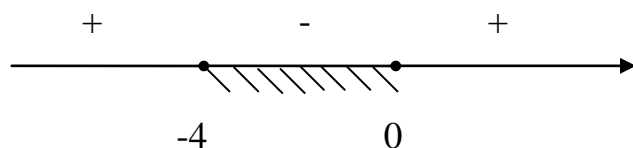
Решение.

$$(0,6)^{2x^2+8x} > 1$$

$$(0,6)^{2x^2+8x} > (0,6)^0, \quad (0,6 < 1)$$

$$2x^2 + 8x < 0$$

$$2x(x+4) < 0$$



$$x \in (-4; 0)$$

Ответ: -1.

11. Решить уравнение $\log_3(2x-5) = \log_3(x+4)$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x-5 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2,5 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow x > 2,5$$

$$2x - 5 = x + 4$$

$$2x - 5 = x + 4$$

$$2x - x = 4 + 5$$

$$x = 9$$

Ответ: 9.

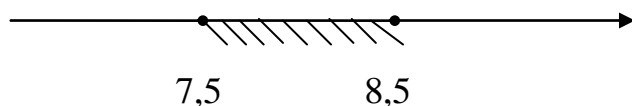
12. Найти целое значение x , удовлетворяющее неравенству $\log_2(x - 7,5) < 0$.

Решение.

$$\log_2(x - 7,5) < 0$$

$$\log_2(x - 7,5) < \log_2 1$$

$$\begin{cases} x - 7,5 > 0 \\ x - 7,5 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 7,5 \\ x < 8,5 \end{cases}$$



$$x \in (7,5; 8,5)$$

Ответ: 8.

13. Упростить выражение $\frac{1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$.

Решение.

$$\frac{1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = 1.$$

Ответ: 1.

14. Вычислить $40\sin \alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{7}{8}$ и $135^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Решение.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{7}{8}$$

$$-2\sin^2 \alpha = -\frac{1}{8}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{16}$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{1}{4}, \text{ т.к. } 135 < \alpha < 180$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{4}$$

$$40 \sin \alpha = 40 \cdot \frac{1}{4} = 10$$

Ответ: 10.

15. Найти (в градусах) решение x уравнения, $tg^2 x - 2tgx - 3 = 0$, удовлетворяющее условиям $-90^\circ < x < 0^\circ$.

Решение.

$$tg^2 x - 2tgx - 3 = 0$$

$$tgx = a$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0.$$

Решаем уравнение.

$$a_1 = 3; \quad a_2 = -1$$

$$tgx = -1 \quad tgx = 3 \text{ - не удовлетворяет условию.}$$

$$x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -45 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Т.к. $-90 < x < 0$,

$$x = -45.$$

Ответ: -45.

16. Основания равнобедренной трапеции равны 51 и 65. Боковые стороны равны 25. Найдите синус острого угла трапеции.

Решение.

Пусть CE — высота.

$$EB = \frac{AB - DC}{2} = 7.$$

По теореме Пифагора

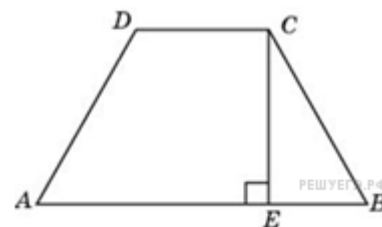
находим:

$$CE = \sqrt{CB^2 - EB^2} = 24.$$

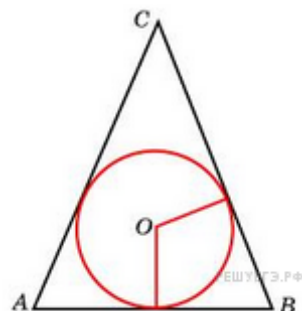
Тогда

$$\sin B = \frac{CE}{CB} = \frac{24}{25} = 0,96.$$

Ответ: 0,96.



17. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противоположной основанию. Найдите периметр треугольника.

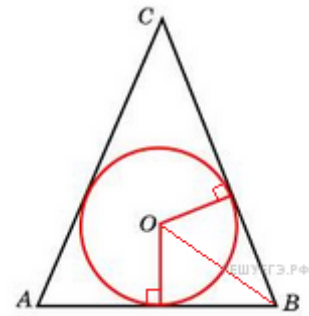


Решение.

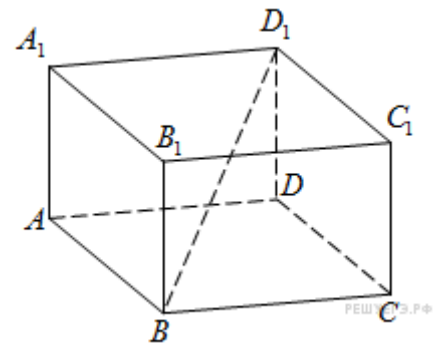
Пусть точки H и K являются точками касания окружности и сторон AB и CB соответственно. Треугольники NOB и KOB равны, т. к. являются прямоугольными с общей гипотенузой и равными катетами, значит, $NB=KB=3$.

$$P_{ABC} = AC + CB + AN + NB = 2CB + 2NB = 16 + 6 = 22.$$

Ответ: 22.



18. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $BD_1 = 5$; $CC_1 = 3$; $B_1 C_1 = \sqrt{7}$. Найдите длину ребра.



Решение.

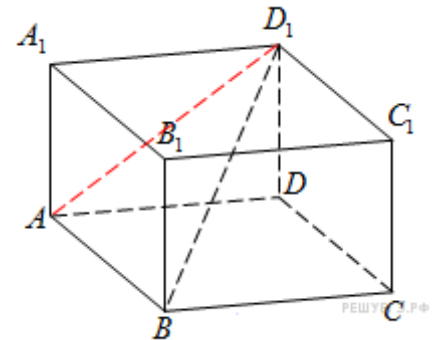
По теореме Пифагора

$$AD_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1 D_1^2} = \sqrt{CC_1^2 + B_1 C_1^2} = \sqrt{9 + 7} = 4.$$

Тогда длина ребра равна AB

$$AB = \sqrt{BD_1^2 - AD_1^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Ответ: 3.



19. Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника ABC вокруг катета, равного 6. Найдите его объем, деленный на π .

Решение.

Треугольник ABC — так же равнобедренный, т. к. углы при основании $AB = 45^\circ$. Тогда радиус основания равен 6, а для объема конуса, деленного

на π , имеем:
$$\frac{V}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{Sh}{\pi} = \frac{1}{3} \frac{\pi r^2 h}{\pi} = \frac{1}{3} r^2 r = \frac{1}{3} \cdot 6^3 = 72.$$

Ответ: 72.

