ЕГЭ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

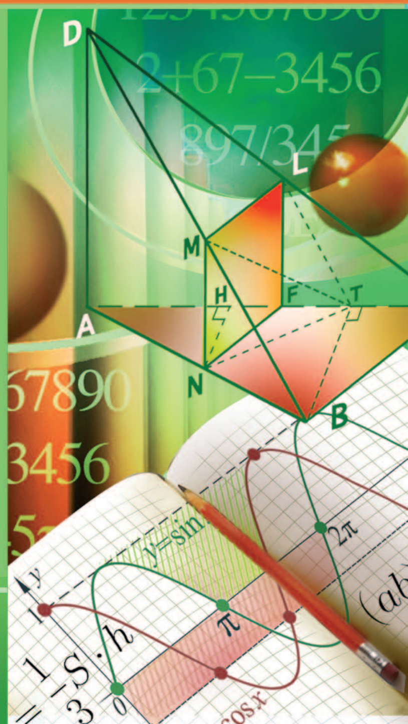
готовимся к ЕГЭ

РЕШЕБНИК
МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 1. РЕШЕНИЯ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

ЧАСТЬ 2. РЕШЕНИЯ СБОРНИКА ЗАДАЧ В ЭЛЕКТРОННОМ ВИДЕ на www.legionr.ru

ПОДГОТОВКА к ЕГЭ-2011



Разработано в соответствии с Федеральным компонентом государственного стандарта общего образования

ЛЕГИОН ™

Уважаемые читатели!

Загрузка с сайта издательства «Легион» (www.legionr.ru) является единственным официальным способом распространения пособия в электронном виде «Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2011. Часть II. Решения сборника задач».

ООО «Легион» не несет ответственности за содержание и/или вред, причиненные данным пособием в электронном виде, полученным из других источников.

Пользовательское соглашение.

1. Авторские права на пособие в электронном виде «Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2011. Часть II. Решения сборника задач» (далее — Пособие) принадлежат ООО «Легион» (далее — Издательство). Авторские права защищены законодательством РФ, охрана авторских прав Издательства регулируется Гражданским кодексом РФ, часть 4, главы 70, 71, Уголовным кодексом РФ, ст. 146, Кодексом РФ об административных правонарушениях, ст. 7.12.

2. Потребитель (читатель, посетитель сайта) имеет право безвозмездно произвести скачивание Пособия с сайта Издательства (www.legionr.ru) **только** для использования в учебных и/или ознакомительных целях.

3. Потребитель (читатель, посетитель сайта) не имеет права использовать Пособие в целях извлечения прибыли путем продажи электронной, бумажной и любых других видов копий Пособия либо любой его части.

4. С момента скачивания Пособия в электронном виде Потребитель (читатель, посетитель сайта) несет полную ответственность за использование Пособия. В случае обнаружения фактов незаконного использования материалов Пособия Издательство вправе осуществить защиту своих интересов в суде.

Рецензенты: *С. В. Дерезин* — ассистент каф. теории упругости ЮФУ,
Л. Л. Иванова — заслуженный учитель России.

Авторский коллектив:
Войта Е. А., Евич Л. Н., Иванов С. О., Кулабухов С. Ю., Ольховая Л. С., Перетятькин Ф. Г., Резникова Н. М., Таран А. А., Тимофеенко И. В.

Математика. Решебник. Подготовка к ЕГЭ-2011. **Часть II. Решения сборника задач** : учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион-М, 2010. — (Готовимся к ЕГЭ)

Данный решебник предназначен для самостоятельной или коллективной подготовки школьников к ЕГЭ. Он является логическим продолжением основной книги «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2011» под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова.

Решебник состоит из двух частей.

Часть I — книга, которую Вы можете приобрести в магазинах своего региона. Она содержит решения всех вариантов учебно-тренировочных тестов учебно-методического пособия «Математика. Подготовка к ЕГЭ-2011» под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова за исключением решения варианта, представленного в самой книге.

Часть II — пособие, которое Вы сейчас читаете, представленное в электронном виде на сайте издательства www.legionr.ru в свободном (бесплатном) доступе. Оно содержит решения задач, вошедших в главу «Сборник задач для подготовки к ЕГЭ» основной книги.

Решебник поможет выпускнику быстро освоить весь необходимый материал и успешно подготовиться к ЕГЭ. Также он может быть полезен учителям и методистам.

© ООО «Легион», 2010.

Решения задач из задачника

2. $2\sqrt{3}+3=\sqrt{(2\sqrt{3}+3)^2}=\sqrt{21+12\sqrt{3}}\Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[6]{21-12\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{3}+3}=\sqrt[6]{21-12\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{21+12\sqrt{3}}=$
$=\sqrt[6]{21^2-(12\sqrt{3})^2}=\sqrt[6]{441-432}=\sqrt[6]{9}=\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{72}=\sqrt[3]{3\cdot9\cdot8}=$
$=\sqrt[3]{3^3\cdot2^3}=3\cdot2=6.$

Ответ: 6.

3. $\left(\sqrt{1+\sqrt{6}}-\sqrt{\sqrt{150}+\sqrt{25}}\right)\cdot\sqrt{\sqrt{6}-1}+1-\sqrt{5}=$
$=\sqrt{1+\sqrt{6}}\big(1-\sqrt{5}\big)\cdot\sqrt{\sqrt{6}-1}+1-\sqrt{5}=$
$=\sqrt{\big(\sqrt{6}-1\big)\big(\sqrt{6}+1\big)}\big(1-\sqrt{5}\big)+1-\sqrt{5}=$
$=\sqrt{5}\big(1-\sqrt{5}\big)+1-\sqrt{5}=\sqrt{5}-5+1-\sqrt{5}=-4.$

Ответ: -4.

4. $\sqrt[6]{2\sqrt{7}+8}\cdot\sqrt[6]{8-2\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{36}=\sqrt[6]{8^2-(2\sqrt{7})^2}\cdot\sqrt[3]{36}=\sqrt[6]{36}\cdot\sqrt[3]{36}=$
$\sqrt[3]{6\cdot36}=6.$

Ответ: 6.

5. Преобразуем данное выражение, используя формулу суммы кубов:

$$\frac{m^{1,5}+2\sqrt{2}}{(m+2)-\sqrt{2m}}+\sqrt{2}\cdot\big(\sqrt{2m}-1\big)=$$

$$=\frac{\big(m^{0,5}+\sqrt{2}\big)\cdot\big(m-\sqrt{2m}+2\big)}{(m+2)-\sqrt{2m}}+\sqrt{2}\cdot\big(\sqrt{2m}-1\big)=m^{0,5}+\sqrt{2}+2m^{0,5}-\sqrt{2}=$$

$=3m^{0,5}$. Найдём значение выражения при $m=9$: $3m^{0,5}=3\sqrt{9}=3\cdot3=9.$

Ответ: 9.

6. Преобразуем данное выражение, используя формулу суммы кубов:

$$\frac{n^{1,2}-3\sqrt{3}}{(n^{0,8}+3)+\sqrt{3n^{0,8}}}-\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3n^{0,8}}-1\right)=$$

$$=\frac{\big(n^{0,4}-\sqrt{3}\big)\cdot\big(n^{0,8}+\sqrt{3}n^{0,4}+3\big)}{(n^{0,8}+3)+\sqrt{3n^{0,8}}}-\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3n^{0,8}}-1\right)=$$

$=n^{0,4}-\sqrt{3}-3n^{0,4}+\sqrt{3}=-2n^{0,4}.$

Найдём значение выражения при $n=32$:

$-2n^{0,4}=-2\cdot32^{\frac{2}{5}}=-2\cdot4=-8.$

Ответ: -8.

7. Вычислим сначала значение подкоренного выражения.

$$\frac{9^{-0,5}-2}{1-9^{0,5}+9^{-0,5}}=\frac{\dfrac{1}{3}-2}{1-3+\dfrac{1}{3}}=1;\ \sqrt[9]{1}=1.$$

Ответ: 1.

8. $\dfrac{\sqrt[3]{75a^2-3a^5}}{\sqrt[3]{25-a^3}}=\sqrt[3]{3a^2}$. Подставляя $a=3$, получаем 3.

Ответ: 3.

9. $\dfrac{\sqrt{35a^6-7a^5}-\sqrt{15a^2-3a}}{\sqrt{7a^5}-\sqrt{3a}}=\dfrac{\sqrt{7a^5}\cdot\sqrt{5a-1}-\sqrt{3a}\cdot\sqrt{5a-1}}{\sqrt{7a^5}-\sqrt{3a}}=$

$=\dfrac{\sqrt{5a-1}(\sqrt{7a^5}-\sqrt{3a})}{\sqrt{7a^5}-\sqrt{3a}}=\sqrt{5a-1}$. Подставляя $a=2$, получаем 3.

Ответ: 3.

10. $\sqrt[4]{\left(7-4\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{3}=\sqrt[4]{\left((\sqrt{3})^2-2\cdot2\cdot\sqrt{3}+4\right)^2}+\sqrt{3}=$

$=\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-2\right)^4}+\sqrt{3}=\left|\sqrt{3}-2\right|+\sqrt{3}$. Так как $\sqrt{3}-2<0$, то $\left|\sqrt{3}-2\right|=2-\sqrt{3}$.

Окончательно: $2-\sqrt{3}+\sqrt{3}=2$.

Ответ: 2.

11. Представим оба подкоренных выражения в виде полных квадратов: $6-2\sqrt{5}=(1-\sqrt{5})^2$ и $9+4\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^2$. Таким образом, $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}-\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}=|1-\sqrt{5}|-|2+\sqrt{5}|$.

Так как $\sqrt{5}>1$ и $2+\sqrt{5}>0$, то эта разность модулей примет вид $\sqrt{5}-1-(2+\sqrt{5})=-3$.

Ответ: -3.

12. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=$ $=\left|1+\sqrt{2}\right|+\left|3-\sqrt{2}\right|$. Так как $3>\sqrt{2}$, то сумма модулей примет вид: $1+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=4$.

Ответ: 4.

13. Представим подкоренные выражения в виде полных квадратов: $29-4\sqrt{7}=\left(1-2\sqrt{7}\right)^2$ и $11-4\sqrt{7}=\left(2-\sqrt{7}\right)^2$. Так как $2<\sqrt{7}$ и $1<2\sqrt{7}$, получим $\left|1-2\sqrt{7}\right|-2\left|2-\sqrt{7}\right|=2\sqrt{7}-1-2\sqrt{7}+4=3$.

Ответ: 3.

14. Представим подкоренные выражения в виде полных квадратов: $a-4\sqrt{a-4}=\left(2-\sqrt{a-4}\right)^2$ и $a+4\sqrt{a-4}=\left(2+\sqrt{a-4}\right)^2$. Тогда исходное

выражение примет вид $\sqrt{\left(2-\sqrt{a-4}\right)^2}+\sqrt{\left(2+\sqrt{a-4}\right)^2}=$
$=\left|2-\sqrt{a-4}\right|+\left|2+\sqrt{a-4}\right|$. Так как $a=4{,}125$, то $2-\sqrt{a-4}>0$ и $2+\sqrt{a-4}>0$. Поэтому выражение примет вид:
$2-\sqrt{a-4}+2+\sqrt{a-4}=4$.

Ответ: 4.

15. Представим подкоренные выражения в виде полных квадратов: $a+6\sqrt{a-9}=\left(\sqrt{a-9}+3\right)^2$ и $a-6\sqrt{a-9}=\left(\sqrt{a-9}-3\right)^2$. Тогда исходное выражение примет вид $\sqrt{\left(\sqrt{a-9}+3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{a-9}-3\right)^2}=$
$=\left|\sqrt{a-9}+3\right|+\left|\sqrt{a-9}-3\right|$. Так как $a=9{,}75$, то $\sqrt{a-9}+3>0$ и $\sqrt{a-9}-3<0$. Поэтому выражение примет вид:
$\sqrt{a-9}+3+3-\sqrt{a-9}=6$.

Ответ: 6.

16. $\sqrt{4x^2-5(4x-5)}+2\sqrt{9+x(x+6)}=\sqrt{(2x-5)^2}+2\sqrt{(x+3)^2}=$
$=|2x-5|+2|x+3|$. Учитывая, что $x=2{,}1283$, получим
$|2x-5|+2|x+3|=5-2x+2(x+3)=11$.

Ответ: 11.

17. Подставим $a=1$ в выражение. $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1$.

Ответ: 1.

18. $\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}+\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{14}-\sqrt{6}}=\dfrac{14-\sqrt{14\cdot6}+\sqrt{14\cdot6}+6}{14-6}=\dfrac{20}{8}=2{,}5$.

Ответ: 2,5.

20. $\sqrt{x+1-4\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+1+4\sqrt{x-3}}=$
$=\sqrt{\left(\sqrt{x-3}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-3}+2\right)^2}=\left|\sqrt{x-3}-2\right|+\left|\sqrt{x-3}+2\right|$. Так как $x=3{,}185$, то $\left|\sqrt{x-3}-2\right|+\left|\sqrt{x-3}+2\right|=2-\sqrt{0{,}185}+\sqrt{0{,}185}+2=4$.

Ответ: 4.

21. $\dfrac{\sqrt{33}}{\sqrt{37}-\sqrt{33}}+\dfrac{\sqrt{37}}{\sqrt{37}+\sqrt{33}}=\dfrac{\sqrt{33}(\sqrt{37}+\sqrt{33})+\sqrt{37}(\sqrt{37}-\sqrt{33})}{37-33}=$
$=\dfrac{33+37}{4}=17{,}5$.

Ответ: 17,5.

22. $(3-x)^{-1}\cdot\sqrt{(x-3)^2(x+1)}=\dfrac{1}{3-x}\cdot|x-3|\cdot\sqrt{x+1}$. Если $x=2{,}61$, то $|x-3|=3-x$ и выражение примет вид $\dfrac{1}{3-x}\cdot(3-x)\cdot\sqrt{x+1}=\sqrt{x+1}=$
$=\sqrt{3{,}61}=1{,}9$.

Ответ: 1,9.

23. $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{65}-\sqrt{45}}+\dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{65}+\sqrt{45}}=\dfrac{\sqrt{45}(\sqrt{65}+\sqrt{45})+\sqrt{65}(\sqrt{65}-\sqrt{45})}{65-45}=$

$=\dfrac{45+65}{20}=5{,}5.$

Ответ: 5,5.

24. $2^{3-\sqrt{2}}\cdot 2^{3+\sqrt{2}}-100=2^{3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}}-100=2^6-100=64-100=-36.$

Ответ: -36.

25. $3^{2+\sqrt{3}}\cdot 3^{2-\sqrt{3}}+3^2=3^{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})}+3^2=3^4+3^2=81+9=90.$

Ответ: 90.

26. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}\cdot(2+\sqrt{5})=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}\cdot(2+\sqrt{5})=$

$=|2-\sqrt{5}|\cdot(2+\sqrt{5})=(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=5-4=1.$

Ответ: 1.

27. $\sqrt{16-6\sqrt{7}}\cdot(\sqrt{7}+3)=\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}\cdot(\sqrt{7}+3)=|3-\sqrt{7}|\cdot(\sqrt{7}+3)=$

$=(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})=9-7=2.$

Ответ: 2.

28. $\sqrt{a-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{5}}=\sqrt{(a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5})}=\sqrt{a^2-(\sqrt{5})^2}=$

$=\sqrt{a^2-5}$. При $a=3$: $\sqrt{a^2-5}=\sqrt{9-5}=2.$

Ответ: 2.

29. $\sqrt[3]{\sqrt{33}-a}\cdot\sqrt[3]{a+\sqrt{33}}=\sqrt[3]{(\sqrt{33}-a)(\sqrt{33}+a)}=\sqrt[3]{(\sqrt{33})^2-a^2}=$

$=\sqrt[3]{33-a^2}$. При $a=5$: $\sqrt[3]{33-a^2}=\sqrt[3]{33-25}=2.$

Ответ: 2.

30. $3\cdot\sqrt[3]{216}\cdot\left(\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{3\cdot 6\cdot 4}{9}=8.$

Ответ: 8.

31. $\dfrac{20}{\sqrt[5]{1024}}\cdot\dfrac{3^2}{5^2}=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3^2}{4\cdot 5^2}=\dfrac{9}{5}=1{,}8.$

Ответ: 1,8.

32. $\sqrt[3+2n]{49^n\cdot 7^3}-\sqrt[3n-1]{\dfrac{27^n}{3}}=\sqrt[3+2n]{7^{2n+3}}-\sqrt[3n-1]{3^{3n-1}}=7-3=4.$

Ответ: 4.

33. $\sqrt[n]{9^{2n}}-\sqrt[2n]{25^n}+1=\sqrt[n]{(9^2)^n}-\sqrt[2n]{5^{2n}}+1=9^2-5+1=77.$

Ответ: 77.

34.

$\dfrac{\log_5 50}{\log_2 5}=\log_5(25\cdot 2)\cdot\log_5 2=(\log_5 25+\log_5 2)\cdot\log_5 2=$

$=(2+\log_5 2)\cdot\log_5 2=\log_5^2 2+2\log_5 2;$

$\dfrac{\log_5 10}{\log_{10} 5} = \log_5 10 \cdot \log_5 10 =$
$= \log_5^2 10 = \log_5^2(2\cdot 5) = (\log_5 2 + \log_5 5)^2 = (1+\log_5 2)^2 =$
$= 1 + 2\log_5 2 + \log_5^2 2;\ 5{,}5(\log_5^2 2 + 2\log_5 2 - 1 - 2\log_5 2 - \log_5^2 2) =$
$= 5{,}5\cdot(-1) = -5{,}5.$

Ответ: $-5{,}5$.

35. $\log_7 21\cdot\log_7 21 - \log_7(7\cdot 21)\cdot\log_7 3 =$
$= (\log_7(7\cdot 3))^2 - \log_7(7^2\cdot 3)\cdot\log_7 3 =$
$= (\log_7 7 + \log_7 3)^2 - (\log_7 7^2 + \log_7 3)\cdot\log_7 3 =$
$= (1+\log_7 3)^2 - (2+\log_7 3)\cdot\log_7 3 =$
$= 1 + 2\log_7 3 + \log_7^2 3 - 2\log_7 3 - \log_7^2 3 = 1.$

Ответ: 1.

36. $\log_2{}^2 3 + \dfrac{\log_2 12}{\log_{12} 2} - \dfrac{\log_2 144}{\log_3 2} = \log_2{}^2 3 + \log_2{}^2 12 - \log_2 144\cdot\log_2 3 =$
$= \log_2{}^2 3 + \log_2{}^2 12 - 2\log_2 12\cdot\log_2 3 = (\log_2 12 - \log_2 3)^2 = \log_2{}^2 4 = 2^2 = 4.$

Ответ: 4.

37. $\sqrt{12}^{\frac{\log_2\left(3+\sqrt5\right)+\log_2\left(4-\sqrt5\right)}{\log_2 2\sqrt3}} - \sqrt5 =$
$= \sqrt{12}^{\frac{\log_2\left(12+\sqrt5-5\right)}{\log_2 2\sqrt3}} - \sqrt5 = \sqrt{12}^{\log_2(7+\sqrt5)\cdot\log_{\sqrt{12}} 2} - \sqrt5 =$
$= \left(\sqrt{12}^{\log_{\sqrt{12}} 2}\right)^{\log_2(7+\sqrt5)} - \sqrt5 = 2^{\log_2(7+\sqrt5)} - \sqrt5 = 7 + \sqrt5 - \sqrt5 = 7.$

Ответ: 7.

38. $7{,}15\left(\dfrac{\log_7 21}{\log_{21} 7} - \dfrac{\log_7 147}{\log_3 7}\right) =$
$= 7{,}15\Big(\log_7(3\cdot 7)\cdot\log_7(3\cdot 7) - \log_7\big(7^2\cdot 3\big)\cdot\log_7 3\Big) =$
$= 7{,}15\Big(\big(\log_7 3 + 1\big)^2 - 2\log_7 3 - \log_7^2 3\Big) =$
$= 7{,}15\Big(\log_7^2 3 + 2\log_7 3 + 1 - 2\log_7 3 - \log_7^2 3\Big) = 7{,}15.$

Ответ: 7,15.

39. $2{,}3\Big(\dfrac{\log_5 45}{\log_{45} 5} - \dfrac{\log_5 225}{\log_9 5}\Big) = 2{,}3(\log_5^2 45 - \log_5 225\cdot\log_5 9) =$
$= 2{,}3((\log_5 5 + \log_5 9)^2 - (\log_5 25 + \log_5 9)\cdot\log_5 9) =$
$= 2{,}3((1+\log_5 9)^2 - (2+\log_5 9)\cdot\log_5 9) =$
$= 2{,}3(1 + 2\log_5 9 + \log_5^2 9 - 2\log_5 9 - \log_5^2 9) = 2{,}3\cdot 1 = 2{,}3.$

Ответ: 2,3.

40. $(3\log_{27} 3{,}5 - \log_3 10{,}5 - 1)\cdot 5^{3\log_5 2} =$

$= (\log_3 3{,}5 - \log_3 10{,}5 - 1) \cdot 8 = \left(\log_3 \dfrac{1}{3} - 1\right) \cdot 8 = -2 \cdot 8 = -16.$

Ответ: -16.

41. $5 \log_3 49 \cdot \log_7 81 + 17^{\log_{17} 8} = 10 \log_3 7 \cdot 4 \log_7 3 + 8 =$
$= 40 \dfrac{\log_3 7}{\log_3 7} + 8 = 48.$

Ответ: 48.

42. $\dfrac{1}{2} \ln a = 1; \ln a = 2.$

$$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} e^5 = \frac{1}{\log_{e^5} \dfrac{\sqrt{b}}{a^2}} = \frac{5}{\ln \sqrt{b} - \ln a^2} = \frac{5}{\dfrac{1}{2} \ln b - 2 \ln a} = \frac{5}{3-4} = -5.$$

Ответ: -5.

43. $\log_{a^6 \sqrt{b}} b = \dfrac{\log_a b}{\log_a (a^6 \cdot \sqrt{b})} = \dfrac{\log_a b}{6 \log_a a + \dfrac{1}{2} \log_a b} = \dfrac{12}{6+6} = 1.$

Ответ: 1.

44. $\log_{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}}} a^2 = \dfrac{2 \log_b a}{\dfrac{1}{2} \log_b a - \dfrac{1}{3} \log_b b} = \dfrac{2 \cdot 2}{\dfrac{1}{2} \cdot 2 - \dfrac{1}{3} \cdot 1} = \dfrac{12}{2} = 6.$

Ответ: 6.

45. $7 \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \dfrac{\sqrt{b}}{a} = \dfrac{7(\log_a \sqrt{b} - \log_a a)}{\log_a \sqrt{a} - \log_a b} = \dfrac{7\left(\dfrac{1}{2} \cdot 4 - 1\right)}{\dfrac{1}{2} - 4} = \dfrac{7 \cdot 2}{-7} = -2.$

Ответ: -2.

46. $5 \log_{\frac{b^2}{a}} \dfrac{a^2}{b} = \dfrac{5(\log_a a^2 - \log_a b)}{\log_a b^2 - \log_a a} = \dfrac{5(2-3)}{2 \cdot 3 - 1} = \dfrac{-5}{5} = -1.$

Ответ: -1.

48. Воспользуемся следующим свойством логарифмов:
$\log_a b \log_b c = \log_a b^{\log_b c} = \log_a c$. Получим:
$\log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_5 8 \cdot \log_7 9 = \log_3 5 \cdot \log_2 7 \cdot \log_5 2^3 \cdot \log_7 3^2 =$
$6 \log_3 5 \cdot \log_5 2 \cdot \log_2 7 \cdot \log_7 3 = 6 \log_3 2 \cdot \log_2 3 = 6.$

Ответ: 6.

49. Воспользуемся следующим свойством логарифмов:
$\log_a b \log_b c = \log_a b^{\log_b c} = \log_a c$. Получим:
$\log_{36} 5 \cdot \log_8 3 \cdot \log_{25} 2 \cdot \log_{\sqrt[3]{3}} 6 = \log_{6^2} 5 \cdot \log_{2^3} 3 \cdot \log_{5^2} 2 \cdot \log_{3^{\frac{1}{3}}} 6 =$

$0,25\log_6 5\cdot\log_5 2\cdot\log_2 3\cdot\log_3 6 = 0,25\log_6 2\cdot\log_2 6 = 0,25.$

Ответ: 0,25.

50. $\log_{p^2}(ab) = 12;\ ab = p^{24};\ \log_{p^2}\dfrac{a}{b} = 4;\ \dfrac{a}{b} = p^8$

$$\begin{cases} ab = p^{24}, \\ \dfrac{a}{b} = p^8; \end{cases} \quad b = p^8;\ a = p^{16};\ \frac{\log_p p^{16}}{\log_p p^8} = \frac{16}{8} = 2.$$

Ответ: 2.

51. $\log_t(ab) = 7;\ ab = t^7;\ \log_t\dfrac{a}{b} = 1;\ \dfrac{a}{b} = t.$

$$\begin{cases} ab = t^7, \\ \dfrac{a}{b} = t; \end{cases} \quad a = t^4; b = t^3; \log_t t^4\cdot\log_t t^3 = 4\cdot 3 = 12.$$

Ответ: 12.

52. Подставим значение a в данное выражение:

$$\frac{25^{-1}+\log_2\dfrac{1}{a}}{5^{-1}-\log_4 a} - \frac{3}{a^{-0,5}} = \frac{25^{-1}+\log_2\dfrac{1}{16}}{5^{-1}-0,5\log_2 16} - \frac{3}{16^{-0,5}} =$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 - 2^2}{\dfrac{1}{5}-2} - 12 = \frac{\left(\dfrac{1}{5}-2\right)\left(\dfrac{1}{5}+2\right)}{\dfrac{1}{5}-2} - 12 = -9,8.$$

Ответ: $-9,8$.

53. $7^{4\log_a 7\cdot\log_{49} a} = 7^{2\log_a 7\cdot\log_7 a}$. Так как $\log_a 7\cdot\log_7 a = 1$, то $7^{2\log_a 7\cdot\log_7 a} = 7^2 = 49.$

Ответ: 49.

54. $3^{\sqrt{2}(\log_{0,2} a+\log_5 a)} = 3^{\sqrt{2}(-\log_5 a+\log_5 a)} = 3^0 = 1.$

Ответ: 1.

55. $\lg 2\cdot\log_5 10\cdot\log_2 5 = \left(\lg 2\cdot\dfrac{1}{\lg 5}\right)\cdot\log_2 5 = \dfrac{\lg 2}{\lg 5}\cdot\log_2 5 = \log_5 2\cdot\log_2 5 = 1.$

Ответ: 1.

56. Подставим $m = 9$ в исходное выражение: $(7^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 7^2 = 49.$

Ответ: 49.

57. Подставим $a = 5$ в исходное выражение:

$$5 - \frac{2\log_{12} 3 + \dfrac{1}{\log_{10} 12} + \log_{12} 1,6}{\log_{10} 2 + \lg 5}.$$

В силу свойств и определения логарифма справедливы равенства:
$2\log_{12} 3 = \log_{12} 3^2 = \log_{12} 9$,
$\dfrac{1}{\log_{10} 12} = \log_{12} 10$,
$\log_{12} 9 + \log_{12} 10 + \log_{12} 1{,}6 = \log_{12}(9 \cdot 10 \cdot 1{,}6) = 2$,
$\log_{10} 2 = \lg 2$, $\lg 2 + \lg 5 = \lg(2 \cdot 5) = 1$.

Поэтому $5 - \dfrac{2\log_{12} 3 + \dfrac{1}{\log_{10} 12} + \log_{12} 1{,}6}{\log_{10} 2 + \lg 5} = 5 - \dfrac{2}{1} = 3$.

Ответ: 3.

58. 1) При $a = 7$ имеем

$$a + \frac{2\log_{13+a}(a-2) + \dfrac{1}{\log_{32}(3a-1)} - \log_{20}(a-5)}{\log_{a+3} 20 + \lg(12-a)} =$$
$$= 7 + \frac{2\log_{20} 5 + \dfrac{1}{\log_{32} 20} - \log_{20} 2}{\log_{10} 20 + \lg 5}.$$

2) В силу свойств и определений логарифмов справедливы равенства:
$2\log_{20} 5 = \log_{20} 5^2 = \log_{20} 25$,
$\dfrac{1}{\log_{32} 20} = \log_{20} 32$, $\log_{20} 25 + \log_{20} 32 - \log_{20} 2 = \log_{20} \dfrac{25 \cdot 32}{2} = 2$,
$\log_{10} 20 = \lg 20$, $\lg 20 + \lg 5 = \lg(20 \cdot 5) = 2$. Поэтому

$$7 + \frac{2\log_{20} 5 + \dfrac{1}{\log_{32} 20} - \log_{20} 2}{\log_{10} 20 + \lg 5} = 7 + \frac{2}{2} = 8.$$

Ответ: 8.

59. Заметим, что подкоренное выражение является полным квадратом:
$49^x - 10 \cdot 7^x + 25 = (7^x - 5)^2$. Тогда все выражение принимает вид:
$\sqrt{49^x - 10 \cdot 7^x + 25} + 7^x + 2{,}5 = \sqrt{(7^x - 5)^2} + 7^x + 2{,}5 = |7^x - 5| + 7^x + 2{,}5$.
Поскольку $6^x = 0{,}25 < 1$, то $x < 0$. Значит, $7^x < 1$ и $|7^x - 5| = 5 - 7^x$.
Отсюда: $|7^x - 5| + 7^x + 2{,}5 = 5 - 7^x + 7^x + 2{,}5 = 7{,}5$.

Ответ: 7,5.

60. $\dfrac{\ln((x+3)(x-2))}{\ln(x+3)} - \log_{x+3}(x-2) =$
$= \log_{x+3}(x-2) + 1 - \log_{x+3}(x-2) = 1$.

Ответ: 1.

61. $\dfrac{\lg((x-1)(x+4))}{\lg(x-1)} - \log_{x-1}(x+4) =$
$= \log_{x-1}(x+4) + 1 - \log_{x-1}(x+4) = 1.$

Ответ: 1.

62. $\dfrac{3\lg 2 - \lg 0{,}25}{\lg 14 - \lg 7} = \dfrac{3\lg 2 - \lg 2^{-2}}{\lg\dfrac{14}{7}} = \dfrac{3\lg 2 + 2\lg 2}{\lg 2} = \dfrac{5\lg 2}{\lg 2} = 5.$

Ответ: 5.

63. $\dfrac{3\log_7 2 - \log_7 24}{\log_7 3 + \log_7 27} = \dfrac{\log_7 \dfrac{2^3}{24}}{\log_7 81} = \dfrac{\log_7 \dfrac{1}{3}}{\log_7 81} = \log_{81}\dfrac{1}{3} = -0{,}25.$

Ответ: $-0{,}25$.

64. $\dfrac{7^{2p} - 5^p}{7^{2p} + 2\cdot 7^p\cdot 5^p + 5^{2p}} = \dfrac{(7^p-5^p)(7^p+5^p)}{(7^p+5^p)^2} =$

$= \dfrac{7^p - 5^p}{7^p + 5^p} = \dfrac{5^p}{5^p}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{7}{5}\right)^p - 1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^p + 1} = \dfrac{3-1}{3+1} = \dfrac{1}{2}$, так как $\log_{1,4} 3 = \log_{\frac{7}{5}} 3$.

Ответ: 0,5.

65. $98\cdot 7^{\log_7 \frac{1}{49}} = 98\cdot\dfrac{1}{49} = 2.$

Ответ: 2.

66. $256\cdot 4^{\log_4 \frac{1}{64}} = 256\cdot\dfrac{1}{64} = 2^8\cdot 2^{-6} = 2^2 = 4.$

Ответ: 4.

67. $\log_7 x\cdot\dfrac{5}{\log_7 2} = 5\cdot\dfrac{\log_7 x}{\log_7 2} = 5\cdot\log_2 x = 5\cdot 5 = 25$, так как $x = 5$.

Ответ: 25.

68. $\log_6 y\cdot\dfrac{10}{\log_6 5} = 10\cdot\dfrac{\log_6 y}{\log_6 5} = 10\cdot\log_5 y = 10\cdot 5 = 50$, так как $\log_5 y = 5$.

Ответ: 50.

69. $\log_2 t^7 - 3 = 7\log_2 t - 3 = 7\cdot 5 - 3 = 32$, так как $\log_2 t = 5$.

Ответ: 32.

70. Так как $\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{3}$, то $\operatorname{tg}^2 t=\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2}}\right)^2=\left(\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{9}}\right)^2=\dfrac{9}{16}$. Тогда

$$\frac{\operatorname{tg}^2 t+3}{5}=\frac{\dfrac{9}{16}+3}{5}=$$

$$=\frac{57}{80}=0,7125.$$

Ответ: $0,7125$.

71. $2\cdot 10^{\lg 14-\lg 4+\lg 5}=2\cdot 10^{\lg\frac{14\cdot 5}{4}}=2\cdot\dfrac{7\cdot 5}{2}=35.$

Ответ: 35.

72. $3^{\log_3 x^2}+1=3^{2\log_3 x}+1$. Учитывая, что $\log_3 x=\dfrac{1}{2}$, получаем $3^{2\cdot\frac{1}{2}}+1=4.$

Ответ: 4.

73. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 x^3}-4=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3\log_{\frac{1}{2}} x}-4$. Учитывая, что $\log_{\frac{1}{2}} x=\dfrac{1}{3}$, получаем $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{3}}-4=2-4=-2.$

Ответ: -2.

74. $\dfrac{\log_a b^3\cdot\log_b a}{ab}=\dfrac{3}{ab}\cdot\log_a b\cdot\log_b a=\dfrac{3}{ab}$. Учитывая, что $a=3$, $ab=5$, получаем $\dfrac{3}{3\cdot 5}=\dfrac{1}{5}$.

Ответ: 0,2.

75. $cd^2\cdot\dfrac{\log_c d^3}{\log_c d}=3cd^2$. Учитывая, что $c=\dfrac{1}{6}$, а $d=4$, получаем $3\cdot\dfrac{1}{6}\cdot 16=18.$

Ответ: 8.

76. $\log_5(7x^4)-\log_{25}(49x^2)=\log_5(7x^4)-\dfrac{1}{2}\log_5(49x^2)=$

$$=\log_5(7x^4)-\log_5(49x^2)^{\frac{1}{2}}=\log_5\frac{7x^4}{7x}=\log_5 x^3=3\log_5 x=-3\log_{\frac{1}{5}} x.$$

Так как $\log_{\frac{1}{5}} x = 1$, то $-3\log_{\frac{1}{5}} x = -3$.

Ответ: -3.

77. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3}{x^2} + \log_2 3 = -\log_2 \dfrac{3}{x^2} + \log_2 3 = \log_2 \dfrac{x^2}{3} + \log_2 3 =$

$= \log_2 \left(\dfrac{x^2}{3} \cdot 3\right) = \log_2 x^2 = 2\log_2 x$. Так как $\log_2 x = -3$, то $2\log_2 x = -6$.

Ответ: -6.

78. $11 - 3\log_3 \sqrt{3} = 11 - 3\log_3 3^{\frac{1}{2}} = 11 - 3 \cdot \dfrac{1}{2} = 11 - 1{,}5 = 9{,}5$.

Ответ: 9,5.

79. $13 - 3 \cdot \log_2 \sqrt{8} = 13 - 3 \cdot \log_2 8^{\frac{1}{2}} = 13 - \dfrac{3}{2} \cdot \log_2 2^3 = 13 - 4{,}5 = 8{,}5$.

Ответ: 8,5.

80. $49^{\log_7 4} = (7^2)^{\log_7 4} = (7^{\log_7 4})^2 = 4^2 = 16$.

Ответ: 16.

82. $\dfrac{3(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)}{2\sin 70^\circ} =$

$= \dfrac{-3 \cdot 2\sin 45^\circ \cos 35^\circ \cdot 2\sin 45^\circ \sin 35^\circ}{2\sin 70^\circ} = \dfrac{-3\sin 70^\circ \cdot 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2\sin 70^\circ} =$

$= \dfrac{-3\sin 70^\circ}{2\sin 70^\circ} = -1{,}5$.

Ответ: $-1{,}5$.

83. $\dfrac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2} \cdot \cos 46^\circ + \sqrt{2} \cdot \sin 44^\circ} = \dfrac{2\sin 45^\circ \cos 46^\circ}{\sqrt{2}\cos 46^\circ(9+1)} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{10\sqrt{2}} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

84. $(\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ + (\operatorname{tg} 20^\circ - \operatorname{tg} 5^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ =$

$= \dfrac{(\sin 20^\circ \cos 5^\circ + \sin 5^\circ \cos 20^\circ)\cos 25^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ \sin 25^\circ} +$

$+ \dfrac{(\sin 20^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cos 20^\circ)\cos 15^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ \sin 15^\circ} =$

$= \dfrac{\sin 25^\circ \cdot \cos 25^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ \sin 25^\circ} + \dfrac{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ \sin 15^\circ} = \dfrac{\cos 25^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ} =$

$= \dfrac{2\cos 20^\circ \cos 5^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ} = 2$

Ответ: 2.

85. $\sin 30^\circ(\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \sin 18^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{1}{4} = 0{,}25.$

Ответ: 0,25.

86. $\cos 60^\circ(\cos 25^\circ \cos 35^\circ - \sin 25^\circ \sin 35^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ =$
$= \dfrac{1}{4} = 0{,}25.$

Ответ: 0,25.

87. $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ =$
$$= \frac{2\sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 10^\circ}{2\cos 10^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{4\cos 10^\circ} =$$
$$= \frac{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{8\cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{8\sin 80^\circ} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Ответ: 0,125.

88. $\cos^2 135^\circ - (\sin 80^\circ \cos 55^\circ + \cos 80^\circ \sin 55^\circ)^2 =$
$= \cos^2 135^\circ - \sin^2 135^\circ = \cos 270^\circ = 0.$

Ответ: 0.

89. $\dfrac{\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\cos 68^\circ \cdot \cos 8^\circ + \cos 82^\circ \cdot \cos 22^\circ} =$
$$= \frac{\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\cos 68^\circ \cdot \cos 8^\circ + \sin 8^\circ \cdot \sin 68^\circ} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos 60^\circ} = 1.$$

Ответ: 1.

90. $\operatorname{tg}\left(2 \cdot \operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \dfrac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(2 \cdot \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\pi = 0.$

Ответ: 0.

91. $\dfrac{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2}{\sin^2 \dfrac{\alpha-\beta}{2}} =$
$$= \frac{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta}{\sin^2 \dfrac{\alpha-\beta}{2}} =$$
$$= \frac{2 - 2\cos(\alpha-\beta)}{\dfrac{1-\cos(\alpha-\beta)}{2}} = \frac{2 \cdot 2(1-\cos(\alpha-\beta))}{1-\cos(\alpha-\beta)} = 4.$$

Ответ: 4.

92. $\cos 75^\circ + \cos 75^\circ \cos 15^\circ - \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ + \dfrac{\sqrt{2}}{2} =$

$= (\cos 75^\circ - \cos 15^\circ) + \cos 60^\circ + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} =$

$= -2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}5.$

Ответ: 0,5.

93. $(\sin 35^\circ \cdot \cos 55^\circ + \cos 35^\circ \cdot \sin 55^\circ) + 6 \cdot \operatorname{tg}^2(55^\circ - 25^\circ) =$

$= \sin 90^\circ + 6 \cdot \operatorname{tg}^2 30^\circ = 1 + 6 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3.$

Ответ: 3.

94. $\left(\dfrac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}\right) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha =$

$= \dfrac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha =$

$= 2\operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = 2.$

Ответ: 2.

95. $\left(\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos^3(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} + 4\operatorname{ctg} 2\alpha\right) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha =$

$= \left(\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + 4\operatorname{ctg} 2\alpha\right) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha =$

$= \left(-\dfrac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + 4\operatorname{ctg} 2\alpha\right) \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = 2.$

Ответ: 2.

96. $\dfrac{8\sin 36^\circ(\cos 36^\circ - \sin 18^\circ)}{\cos 54^\circ} = \dfrac{4(\sin 72^\circ - 2\sin 36^\circ \sin 18^\circ)}{\cos 54^\circ} =$

$= \dfrac{4(\cos 18^\circ - \cos 18^\circ + \cos 54^\circ)}{\cos 54^\circ} = 4.$

Ответ: 4.

97. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 40^\circ} + \dfrac{1}{\cos 40^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}\cos 40^\circ + \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ} =$

$= \dfrac{2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ + \dfrac{1}{2}\sin 40^\circ\right)}{\dfrac{1}{2}\sin 80^\circ} = \dfrac{2(\cos(40^\circ - 30^\circ))}{\dfrac{1}{2}\sin 80^\circ} = \dfrac{4\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 4.$

Ответ: 4.

98. В силу формул $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$,

$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ справедлива цепочка равенств

$\dfrac{\sin 75^\circ}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 105^\circ}}+\dfrac{\cos 75^\circ}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 105^\circ}}=$
$=\sin 75^\circ\cdot|\cos 105^\circ|+\cos 75^\circ\cdot|\sin 105^\circ|=$
$=-\sin 75^\circ\cos 105^\circ+\cos 75^\circ\sin 105^\circ=$
$=\sin(105^\circ-75^\circ)=\sin 30^\circ=0{,}5$, так как $\cos 105^\circ<0$, а $\sin 105^\circ>0$.

Ответ: 0,5.

99. $\left(1-\dfrac{1}{\sin^2 63^\circ}\right)\left(1-\dfrac{1}{\cos^2 63^\circ}\right)=(1-1-\operatorname{ctg}^2 63^\circ)(1-1-\operatorname{tg}^2 63^\circ)=$
$=\operatorname{ctg}^2 63^\circ\operatorname{tg}^2 63^\circ=1$

Ответ: 1.

100. $\cos 15^\circ\cos 45^\circ-\cos 45^\circ\cos 75^\circ=\cos 15^\circ\cos 45^\circ-\sin 45^\circ\sin 15^\circ=$
$=\cos 60^\circ=0{,}5$.

Ответ: 0,5.

101. $\sqrt{3}\cos^2 75^\circ+\sqrt{3}\cos 165^\circ\sin 75^\circ=\sqrt{3}\cos^2 75^\circ-\sqrt{3}\sin^2 75^\circ=$
$=\sqrt{3}(\cos^2 75^\circ-\sin^2 75^\circ)=\sqrt{3}\cos 150^\circ=-\sqrt{3}\cos 30^\circ=$
$=-\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-1{,}5$

Ответ: $-1{,}5$.

102. $16\left(\cos^4\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{1}{4}\sin^2\dfrac{\pi}{6}\right)\sin^2 15^\circ=$

$$=16\left(\frac{\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}{4}+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{6}\right)\sin^2 15^\circ=$$

$$=4\left(1+2\cos\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}\right)\frac{1-\cos 30^\circ}{2}=$$

$$=4\left(2+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right)=4(2+\sqrt{3})\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)=4-3=1.$$

Ответ: 1.

103. $\dfrac{7}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\cos 75^\circ\cos 15^\circ-\cos 15^\circ\cos 105^\circ}{\sin 18^\circ\sin 63^\circ+\sin 108^\circ\sin 27^\circ}=$

$$= \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ}{\sin 18^\circ \sin 63^\circ + \cos 18^\circ \cos 63^\circ} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{2}} \frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{7 \cdot 1 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

Ответ: 3,5.

104. $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$. Так как $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}2$, то

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - 0{,}04}{1 + 0{,}04} = \frac{0{,}96}{1{,}04} = \frac{12}{13}; \ \frac{87}{3 + \dfrac{4 \cdot 12}{13}} = \frac{87 \cdot 13}{87} = 13.$$

Ответ: 13.

105. Из $\cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ и $0 < \alpha < \pi$ находим:

$\alpha - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$; $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -1$.

Ответ: -1.

106. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right) \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right) =$

$$= 2\left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\frac{2}{16} - \frac{2}{4} \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$= \dfrac{1}{8}\left(2 - 8\left(1 - \sin^2\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)\right) = \dfrac{1}{8}\left(2 - 8\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\right) = -0{,}5$, так как

$\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-0{,}5$.

107. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \dfrac{4}{13} = \dfrac{9}{13}$. Так как $-\pi < x < 0$, то $\sin x < 0 \Rightarrow$

$\sin x = -\sqrt{\dfrac{9}{13}} = \dfrac{-3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{-3}{\sqrt{13}} : \dfrac{-2}{\sqrt{13}} = 1{,}5$,

$\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{2 \cdot 1{,}5}{1 - (1{,}5)^2} = \dfrac{3}{-1{,}25} = -2{,}4$.

Ответ: $-2{,}4$.

108. $1{,}2\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1{,}2\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha=1{,}2\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1{,}2(1-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}=$

$\frac{1{,}2\left(1-\frac{1}{25}\right)}{\frac{1}{5}}=\frac{6\cdot5\cdot24}{5\cdot25}=5{,}76$, так как $\cos\alpha=\frac{1}{5}$.

Ответ: 5,76.

109. Так как $\sin x=\frac{1}{\sqrt5}$ и $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $\cos x=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2}=$

$=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt5}$. $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt5}:\frac{2}{\sqrt5}=\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$; $\operatorname{tg}2x=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$;

$3\operatorname{tg}2x=4$.

Ответ: 4.

110. Так как $\cos x=\frac{1}{\sqrt{17}}$ и $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $\sin x=\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$;

$\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\sqrt{17}}:\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Ответ: 0,25.

112. $\frac{(\cos2x+1)\cdot\operatorname{tg}x}{\cos^2x-2\sin(x+4{,}5\pi)\cdot\sin(x+9\pi)}=$

$=\frac{2\cos^2x\cdot\operatorname{tg}x}{\cos^2x+2\cos x\cdot\sin x}=\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos2x+\sin2x}=$

$=\frac{\sin2x}{\cos2x+\sin2x}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}=0{,}5$.

Ответ: 0,5.

113. При $\alpha=\frac{\pi}{4}$: $\frac{\pi}{3}-\alpha=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$ и $2\alpha-\frac{5\pi}{12}=2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$.
Тогда, используя формулу синуса двойного аргумента, получаем, что
$3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\cos\left(2\alpha-\frac{5\pi}{12}\right)=3\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}=\frac{3}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{6}=$

$= \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 0{,}75.$

Ответ: 0,75.

114. При $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ $\alpha - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$ и $\dfrac{5\pi}{12} - \alpha = \dfrac{5\pi}{12} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}$. Тогда, используя формулу $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, получаем, что

$$(8 + 4\sqrt{3}) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right) = (8 + 4\sqrt{3}) \sin\frac{\pi}{12} \cdot \sin\frac{\pi}{12} =$$

$$= (8+4\sqrt{3}) \sin^2\frac{\pi}{12} = (8+4\sqrt{3}) \cdot \frac{1 - \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)}{2} = (8+4\sqrt{3}) \cdot \frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2} =$$

$$= (4+2\sqrt{3})\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (4+2\sqrt{3}) \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = (2+\sqrt{3}) \cdot (2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1.$$

Ответ: 1.

115. Воспользовавшись формулами приведения и формулой синуса двойного аргумента, получаем $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(\pi - \alpha) =$

$$-\sin\alpha \cdot (-\cos\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

116. Преобразуем выражение $\dfrac{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha}{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}$, используя формулы суммы синусов и суммы косинусов. Имеем,

$$\frac{\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha}{\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{(\cos\alpha + \cos 4\alpha) + (\cos 2\alpha + \cos 3\alpha)}{(\sin\alpha + \sin 4\alpha) + (\sin 2\alpha + \sin 3\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} + 2\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2} + 2\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos\frac{5\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{5\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\frac{5\alpha}{2} =$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{35\pi}{6} = \operatorname{ctg}\left(6\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}, \text{ так как } \alpha = \frac{7\pi}{3}.$$

Ответ: 3.

117. Применим формулу понижения степени и разности косинусов. Имеем, $\sqrt{6}\left(\cos^2\left(\frac{17\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(1+\cos\left(\frac{17\pi}{4}-\alpha\right)-1-\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)\right)=$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)\right)=-\sqrt{6}\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin\frac{11\pi}{4}.$

Далее, воспользуемся формулами приведения и таблицей значений тригонометрических функций. Учитывая, что $\alpha=\frac{7\pi}{6}$, получим:

$\sqrt{6}\cos\alpha\sin\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{3}\cos\alpha=\sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{6}=-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=-1{,}5.$

Ответ: $-1{,}5$.

118. $(1-\sqrt{3})\sin 45^\circ\cos 15^\circ=(1-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}(\sin 30^\circ+\sin 60^\circ)=$

$=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=\frac{1}{4}(1-3)=-\frac{2}{4}=-0{,}5.$

Ответ: $-0{,}5$.

119. 1) Так как $\operatorname{ctg}\alpha=3$, то $\cos\alpha=3\sin\alpha$. Пусть $x=\sin\alpha$, $\sin\alpha>0$, так как $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Тогда $\sqrt{1-x^2}=3x\Rightarrow 1-x^2=9x^2\Rightarrow 10x^2=1\Rightarrow$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

2) $\sqrt{5}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{5}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)=\sqrt{\frac{5}{2}}(3\sin\alpha+\sin\alpha)=$

$=4\sqrt{\frac{5}{2}}\sin\alpha=4\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{4\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{20}}=\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=2.$

Ответ: 2.

120. $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)-3\operatorname{tg}9\pi=\frac{1}{2}\cdot 0-(-1)-0=1.$

Ответ: 1.

121. $\frac{16\operatorname{tg}18^\circ\cdot\cos^2(180^\circ-18^\circ)}{-5(1-2\sin^2 63^\circ)}=\frac{16\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ}{-5\cos 126^\circ}=\frac{8\sin 36^\circ}{5\sin 36^\circ}=1{,}6.$

Ответ: 1,6.

122. $\sin x=\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2}<x<\pi$. В силу того, что $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ $\cos x<0$ и

$\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\dfrac{15^2}{17^2}} = -\dfrac{8}{17}$; $1{,}5 - 3{,}4\cos x = 1{,}5 + 1{,}6 =$
$= 3{,}1.$

Ответ: 3,1.

123. $\dfrac{\operatorname{ctg} 21^\circ \cdot \sin^2\left(180^\circ + 21^\circ\right)}{2\left(1-2\cos^2 24^\circ\right)} = -\dfrac{\operatorname{ctg} 21^\circ \cdot \sin^2 21^\circ}{2\cos 48^\circ} =$
$= -\dfrac{\cos 21^\circ \cdot \sin 21^\circ}{2\cos 48^\circ} = -\dfrac{\sin 42^\circ}{4\cos 48^\circ} = -\dfrac{\sin 42^\circ}{4\sin 42^\circ} = -0{,}25.$

Ответ: −0,25.

124. $1-5\operatorname{ctg}^2 x\cdot\sin^2 x = 1-5\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x = 1-5\cos^2 x$. Так как $\cos x = 0{,}4$, то $1-5\cos^2 x = 1-5\cdot(0{,}4)^2 = 0{,}2.$

Ответ: 0,2.

125. $4+5\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2} = 4+\dfrac{5}{\cos^2 x} = 4+\dfrac{5}{0{,}5^2} = 24.$

Ответ: 24.

126. Так как $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha > 0$ и $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}36} = 0{,}8$;

$\operatorname{tg}(\alpha+7\pi) - \cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\alpha + \sin 2\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$= \dfrac{0{,}6}{0{,}8} + 2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8 = 1{,}71.$

Ответ: 1,71.

127. $5\sin\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right) + 2\cos(\alpha+3\pi) = 5\cos\alpha - 2\cos\alpha = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$, так как

$\cos\alpha = \dfrac{1}{4}.$

Ответ: 0,75.

128. Так как $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$, то $\sin\alpha < 0$. Так как $\cos\dfrac{5}{13}$, то

$\sin\alpha = -\sqrt{1-\dfrac{5^2}{13^2}} = -\dfrac{12}{13}$;

$2\operatorname{tg}(\alpha-5\pi) + \operatorname{ctg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{12}{5} = -2{,}4.$

Ответ: −2,4.

130. $2\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)+3\sin^2(\alpha-\pi)=-2\sin\alpha+3\sin^2\alpha=$
$=-2\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}5^2=-1+0{,}75=-0{,}25$, так как $\sin\alpha=0{,}5$.

Ответ: $-0{,}25$.

131. $\sin 2\alpha-2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)+\cos^2(\alpha+\pi)=2\sin\alpha\cos\alpha-$
$-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}=0{,}75$, так как $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $0{,}75$.

132. $5\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=5\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{4}{\operatorname{tg}\alpha}=1$, так как $\operatorname{tg}\alpha=4$.

Ответ: 1.

133. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)+3\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha+3\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\alpha=4$?, так как $\operatorname{tg}\alpha=2$.

Ответ: 4.

134. $3\cos(\pi-2\alpha)-\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-3\cos 2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=$
$=-3(1-2\sin^2\alpha)-\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-3(1-2\cdot 0{,}4^2)-\dfrac{1-0{,}4^2}{0{,}4^2}=-7{,}29$, так как $\sin\alpha=0{,}4$.

Ответ: $-7{,}29$.

135. $\dfrac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin 2x}=\dfrac{(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin 2x}=-\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=$
$=-\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}=1$, так как $x=\dfrac{3\pi}{8}$.

Ответ: 1.

136. ОДЗ: $x>0$. Преобразуем выражение: $4^{\log_2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}=2^{\log_2 x}+\dfrac{1}{x}=$
$=x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+1}{x}$. Подставим значение $x=2-\sqrt{3}$: $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1}{2-\sqrt{3}}=$
$=\dfrac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}}=4$.

Ответ: 4.

137. $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin^3 x-\cos^3 x}=\dfrac{\sin x-\cos x}{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)}=$

$$= \frac{1}{1+\sin x\cos x} = \frac{2}{2+\sin 2x} = \frac{2}{2+\sin\dfrac{\pi}{6}} = 0{,}8.$$

Ответ: 0,8.

139. $1-(\cos 45^\circ\cos 15^\circ - \sin 15^\circ \sin 45^\circ)^2 = 1-(\cos(45^\circ+15^\circ))^2 =$
$= 1-\cos^2 60^\circ = 1-0{,}25 = 0{,}75.$

Ответ: 0,75.

140. $(\sin 75^\circ\cdot\cos 15^\circ - \sin 15^\circ\cdot\cos 75^\circ)^2 + 0{,}5 = \big(\sin(75^\circ-15^\circ)\big)^2 +$
$+0{,}5 = (\sin 60^\circ)^2 + 0{,}5 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0{,}5 = 0{,}75+0{,}5 = 1{,}25.$

Ответ: 1,25.

141. $9\cos 2x = 9(2\cos^2 x - 1) = 18\cos^2 x - 9 =$
$= 18\cdot\dfrac{1}{9} - 9 = 2-9 = -7$, так как $\cos x = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: -7.

142. $3\,\mathrm{tg}^2\, x = 3\cdot\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3\cdot\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = 3\cdot\dfrac{4}{9} : \dfrac{5}{9} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$, так как $\sin x = \dfrac{2}{3}$.

Ответ: 2,4.

143. $\dfrac{\sqrt{2}(\sin 70^\circ + \sin 20^\circ)}{\cos 25^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 2\sin\dfrac{70^\circ+20^\circ}{2}\cos\dfrac{70^\circ-20^\circ}{2}}{\cos 25^\circ} =$
$= \dfrac{\sqrt{2}\cdot 2\sin 45^\circ\cdot\cos 25^\circ}{\cos 25^\circ} = \sqrt{2}\cdot 2\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2.$

Ответ: 2.

144. $\dfrac{\cos 50^\circ + \cos 40^\circ}{\sqrt{2}\cos 5^\circ} = \dfrac{2\cos\dfrac{50^\circ+40^\circ}{2}\cdot\cos\dfrac{50^\circ-40^\circ}{2}}{\sqrt{2}\cos 5^\circ} =$
$= \dfrac{2\cos 45^\circ\cdot\cos 5^\circ}{\sqrt{2}\cos 5^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1.$

Ответ: 1.

145. $\sin^2 t + \cos^2 t - 3\sin\pi + 7\cos\pi = 1 - 3\cdot 0 + 7\cdot(-1) = -6.$

Ответ: -6.

146. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + 4 = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + 4 =$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) + 4 = 2\cdot\frac{1}{2} + 4 = 5.$$

Ответ: 5.

147. $2\left(3 - \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right) = 2\left(3 - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(3 - \frac{1}{4}\right) = 5,5.$

Ответ: 5,5.

148. $6\operatorname{tg}^2 x - 5 = 6\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - 5 = 6 - 5 = 1$, так как $cos^2 x = 0{,}5$.

Ответ: 1.

149. $5 - 3\cos^2 x = 5 - \frac{3}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 5 - \frac{3}{1+2} = 4$, так как $\operatorname{tg}^2 x = 2$.

Ответ: 4.

150. $6(1+\sin^2\alpha) = 6(1+(1-\cos^2\alpha)) = 6(2-\cos^2\alpha) = 6\cdot\left(2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) =$

$$= 6\cdot\left(2-\frac{1}{3}\right) = 6\cdot\frac{5}{3} = 10.$$

Ответ: 10.

151. $9\cdot(1+\cos^2\alpha) = 9\cdot\left(1+\left(1-\sin^2\alpha\right)\right) = 9\cdot\left(2-\sin^2\alpha\right) =$

$$= 9\cdot\left(2-\frac{4}{9}\right) = 18 - 4 = 14.$$

Ответ: 14.

152. $\log_2\frac{\sin 25^\circ\cdot\sin 65^\circ}{\operatorname{tg}45^\circ\cdot\cos 40^\circ} = \log_2\frac{\cos 40^\circ - \cos 90^\circ}{2\cos 40^\circ} = \log_2\frac{1}{2} = -1.$

Ответ: −1.

154. $\sqrt{0{,}04}+\log_4 2\sqrt{2}+2^{\log_2 3} = \sqrt{(0{,}2)^2}+\frac{1}{2}\log_2 2^{\frac{3}{2}}+3 = 0{,}2+\frac{3}{4}+3 = 3{,}95$

Ответ: 3,95.

155. $3^{\log_3 2} - \sqrt{0{,}09} + 3\log_9\frac{1}{3\sqrt[3]{3}} = 2 - \sqrt{(0{,}3)^2} - 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_3 3\sqrt[3]{3} =$

$$= 2 - 0{,}3 - \frac{3}{2}\cdot\log_3 3^{1\frac{1}{3}} = 1{,}7 - \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 1{,}7 - 2 = -0{,}3.$$

Ответ: −0,3.

156. $5^{3x-1}\cdot 25^{7-5x} = 0{,}2;\ 5^{3x-1+14-10x} = 5^{-1};\ -7x+13 = -1;\ x = 2.$

Ответ: 2.

157. $8^{2x+3} - 4^{3x+2} = 62; 2^{6x+9} - 2^{6x+4} = 62; 2^{6x+4}(2^5-1) = 62;$
$2^{6x+4}\cdot 31 = 62; 2^{6x+4} = 2; 6x+4 = 1; x = -0{,}5.$

Ответ: $x = -0{,}5$.

158. $3^{x+3} - 2 \cdot 3^x = 675;\ 3^x\left(3^3 - 2\right) = 675;\ 3^x \cdot 25 = 675;\ 3^x = 27;\ x = 3.$

Ответ: 3.

159. $725 - 4 \cdot 5^x = 5^{x+2};\ 5^{x+2} + 4 \cdot 5^x = 725;\ 5^x(5^2 + 4) = 725;$
$5^x \cdot 29 = 725; 5^x = 25;\ x = 2.$

Ответ: 2.

160. $3^{\log_5 6} = 6^{\log_5 x + \log_5 4}$. ОДЗ: $x > 0$.

Так как $3^{\log_5 6} = 6^{\log_5 3}$, то $6^{\log_5 3} = 6^{\log_5 4x}$; $4x = 3$; $x = \dfrac{3}{4}$.

Ответ: 0,75.

161. $8^{\ln\pi} = \pi^{\ln x - \ln 2}$, ОДЗ: $x > 0$. $8^{\ln\pi} = \pi^{\ln\frac{x}{2}};\ \pi^{\ln 8} = \pi^{\ln\frac{x}{2}};\ \dfrac{x}{2} = 8;$
$x = 16.$

Ответ: 16.

162. $2^{\log_3 6} \cdot x^{\log_3 2} = 8;\ x > 0,\ 2^{\log_3 6} \cdot 2^{\log_3 x} = 2^3; 2^{\log_3 6 + \log_3 x} = 2^3;$
$2^{\log_3 6x} = 2^3;\ \log_3 6x = 3;\ 6x = 27;\ x = \dfrac{27}{6};\ x = 4{,}5.$

Ответ: 4,5.

163. $4^{x-2} + 2 \cdot 4^{x-1} = 9; 4^{x-2} \cdot (1 + 2 \cdot 4) = 9; 4^{x-2} \cdot 9 = 9; 4^{x-2} = 1;$
$4^{x-2} = 4^0 \Rightarrow x - 2 = 0, x = 2.$

Ответ: 2.

165. $9^x = 8 \cdot 3^{x+1} + 81; \left(3^2\right)^x - 8 \cdot 3 \cdot 3^x - 81 = 0; \left(3^x\right)^2 - 24 \cdot 3^x - 81 = 0.$
Сделаем замену $t = 3^x > 0$. Тогда уравнение записывается в виде
$t^2 - 24t - 81 = 0; t_{1,2} = 12 \pm \sqrt{144 + 81} = 12 \pm 15 \Rightarrow t_1 = 27, t_2 = -3 < 0$
$\Rightarrow t = 27$. Следовательно, $3^x = 27; 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3.$

Ответ: 3.

166. $0{,}7^{2x} \cdot 0{,}7^{2-5x} - 4 \cdot 0{,}7^{1-3x} = -\dfrac{330}{49}; 0{,}7^{2x+2-5x} - 4 \cdot 0{,}7^{1-3x} = -\dfrac{330}{49};$

$0{,}7^{2-3x} - 4 \cdot 0{,}7^{1-3x} = -\dfrac{330}{49}; 0{,}7^{1-3x} \cdot 0{,}7 - 4 \cdot 0{,}7^{1-3x} = -\dfrac{330}{49};$

$0{,}7^{1-3x} \cdot \left(\dfrac{7}{10} - 4\right) = -\dfrac{330}{49}; 0{,}7^{1-3x} \cdot \left(-\dfrac{33}{10}\right) = -\dfrac{330}{49}; 0{,}7^{1-3x} = \dfrac{100}{49};$

$0{,}7^{1-3x} = \left(\dfrac{10}{7}\right)^2; 0{,}7^{1-3x} = 0{,}7^{-2} \Rightarrow 1 - 3x = -2; 3x = 3; x = 1.$

Ответ: $x = 1$.

167. Вынесем за скобку 2^{2x+1}. Имеем, $2^{2x+1}(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3) = 240;$
$2^{2x+1}(1 + 2 + 4 + 8) = 240;\ 2^{2x+1} = 16; 2x + 1 = 4;\ x = 1{,}5.$

Ответ: 1,5.

168. Представим каждое слагаемое в правой части в виде степени 5. Получим, $5^{8x-4}+5^{8x-3}+5^{8x-2}+5^{8x-1}=6{,}24$.

Вынесем за скобку 5^{8x-4}. Имеем, $5^{8x-4}(1+5^1+5^2+5^3)=6{,}24$;

$5^{8x-4}(1+5+25+125)=6{,}24$; $5^{8x-4}=\dfrac{1}{25}$; $8x-4=-2$; $x=0{,}25$.

Ответ: 0,25.

169.ОДЗ: $7-4x>0$, $4x<7$, $x<\dfrac{7}{4}$, $x<1{,}75$.

Перейдём от уравнения к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{7}{13}\right)^{28x^2-5}=\left(\dfrac{7}{13}\right)^{127-5x^2}, \\ 7-4x=1;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}28x^2-5=127-5x^2, \\ 4x=6;\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}33x^2=132, \\ x=1{,}5;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=4, \\ x=1{,}5;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=2,\ x_2=-2, \\ x=1{,}5.\end{array}\right.$$

Из последней совокупности и ОДЗ следует, что корнями исходного уравнения являются только числа -2 и 1,5. Их произведение равно $-2\cdot1{,}5=-3$.

Ответ: -3.

170.ОДЗ: $2-2x^2>0$; $x^2<1$; $-1<x<1$.

1) $245\cdot5^{x-1}+5-2\cdot5^{2x+1}=0$; $10\cdot5^{2x}-49\cdot5^x-5=0$; $5^{2x}-4{,}9\cdot5^x-0{,}5=0$. Замена: $5^x=t$, $t>0$; $t^2-4{;}9t-0{,}5=0$. По теореме, обратной теореме Виета $t_1=5$, $t_2=-0{,}1$. $t_2=-0{,}1$ не удовлетворяет условию $t>0$. Вернёмся к замене $5^x=5\ \Rightarrow x=1$, но $x=1$ не входит в ОДЗ, значит не является корнем данного уравнения.

2) $\log_{0,5}\left(2-2x^2\right)=0$; $2-2x^2=1$; $x^2=0{,}5$; $x_1=\sqrt{0{,}5}$, $x_2=-\sqrt{0{,}5}$. Числа $\sqrt{0{,}5}$ и $-\sqrt{0{,}5}$ входят в ОДЗ, следовательно, являются корнями данного уравнения. Их произведение равно $-\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{0{,}5}=-0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

172. $\lg(x+3)=2\lg2-\lg x\Rightarrow\lg(x+3)+\lg x=\lg2^2\Rightarrow$
$\Rightarrow\lg\big(x(x+3)\big)=\lg4\Rightarrow x^2+3x=4\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow x_1=-4, x_2=1$.
Проверка: $x=1$, $\lg(3+1)=\lg4=2\lg2=2\lg2-0=2\lg2-\lg1$.
$x=-4$ не является корнем исходного уравнения, так как $\lg(-4)$ не существует. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=1$.

Ответ: 1.

173.$\log_7 36-\log_7(3x-12)=\log_7 4$; $\log_7(3x-12)=\log_7 36-\log_7 4$; $\log_7(3x-12)=\log_7 36-\log_7 4$; $\log_7(3x-12)=\log_7 9$; $3x-12=9$; $3x=21$; $x=7$.

Проверка: $\log_7 36 - \log_7(3\cdot 7 - 12) = \log_7 4$; $\log_7 36 - \log_7 9 = \log_7 4$; $\log_7 4 = \log_7 4$. $x = 7$ является корнем уравнения.

Ответ: 7.

174. $\log_5(8 - 24x) - \log_5 8 = \log_5 7$; $\log_5(8 - 24x) = \log_5 56$; $8 - 24x = 56$; $24x = -48$; $x = -2$.

Проверка: $\log_5(8 + 24\cdot 2) - \log_5 8 = \log_5 7$; $\log_5 56 - \log_5 8 = \log_5 7$; $\log_5 56 - \log_5 8 = \log_5 7$; $\log_5 7 = \log_5 7$. Откуда $x = -2$ является корнем уравнения.

Ответ: -2.

175. $2\cdot 16^x - 3\cdot 4^x = 2$; $2\cdot(4^x)^2 - 3\cdot 4^x = 2$. Пусть $4^x = t$, $t > 0$. Тогда $2t^2 - 3t - 2 = 0$; $t_{1,2} = \dfrac{3\pm 5}{4}$; $t_1 = 2$, $t_2 = -0{,}5$. Заметим, что t_2 не удовлетворяют условию $t > 0$. $4^x = 2$; $x = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

176. После преобразований получим: $\begin{cases} 3\log_2 x - \log_2 y = 1, \\ -\log_2 x + 2\log_2 y = 3. \end{cases}$ Обозначив, $\log_2 x = a$, $\log_2 y = b$: $\begin{cases} 3a - b = 1, \\ -a + 2b = 3. \end{cases}$ Решение системы: $a = 1$, $b = 2$. Значит $\log_2 x = 1$, $\log_2 y = 2$. Отсюда $x = 2$, $y = 4$. А значение искомого выражения $x + y = 2 + 4 = 6$.

Ответ: 6.

177. $3^{2x+1} = 28\cdot 3^x - 9$. Сделаем замену $3^x = t$, $t > 0$. Тогда $3t^2 = 28t - 9$; $3t^2 - 28t + 9 = 0$; $t_{1,2} = \dfrac{14\pm 13}{3}$; $t_1 = 9$, $t_2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Произведение корней равно: $x_1\cdot x_2 = 2\cdot(-1) = -2$.

Ответ: -2.

178. $\begin{cases} -\log_3 x + 3\log_3 y = 1, \\ \log_3 x - \log_3 y = 1; \end{cases}$ $\log_3 x = a$, $\log_3 y = b$,

$\begin{cases} -a + 3b = 1, \\ a - b = 1; \end{cases}$ $a = 2$, $b = 1$; $x = 9$, $y = 3$. Значение искомого выражения $x - 2y = 3$.

Ответ: 3.

179. Из второго уравнения системы $y = 3\cdot 9^x$. Подставим это значение в первое уравнение: $5\cdot 25^x - 8\cdot 15^x + 3\cdot 9^x = 0$. Разделим это уравнение на $9^x \neq 0$. Получим $5\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^{2x} - 8\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^x + 3 = 0$. Обозначим $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x = t > 0$.

Тогда $5t^2 - 8t + 3 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 1$, $t_2 = \dfrac{3}{5}$. Значит,

$\left(\frac{5}{3}\right)^x = 1$, $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5}$; $x_1 = 0$ или $x_2 = -1$. Им соответствуют значения $y_1 = 3$ и $y_2 = \frac{1}{3}$. Итак имеем два решения $(0; 3)$ и $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$. Наибольшей суммой $x + y$ будет $0 + 3 = 3$.

Ответ: 3.

180. ОДЗ: $x > 0$.
$9\log_3 x - x^2 \log x = 0$; $(9 - x^2)\log_3 x = 0$;

а) $9 - x^2 = 0 \Rightarrow x =_1= -3$, $x_2 = -3$. Заметим, что $x =_1= -3$ не удовлетворяет ОДЗ.

б) $\log_3 x = 0$; $x_3 = 1$.

Сумма корней равна: $x_2 + x_3 = 4$.

Ответ: 4.

181.Из второго уравнения найдем $y = -4^{x+1}$ и подставим это значение в первое: $14 \cdot 49^x - 18 \cdot 14^x + 4^{x+1} = 0$; $14 \cdot 7^{2x} - 18 \cdot 7^x \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{2x} = 0$. Разделим на $2^{2x} \neq 0$. Получим $14 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{2x} - 18 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^x + 4 = 0$. Обозначим $\left(\frac{7}{2}\right)^x = t > 0$. Тогда $14t^2 - 18t + 4 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{2}{7}$. Значит: $\left(\frac{7}{2}\right)^x = 1$, $x_1 = 0$; $\left(\frac{7}{2}\right)^x = \frac{2}{7}$; $x_2 = -1$. Им соответствуют значения $y_1 = -4$ и $y_2 = -1$. Итак, имеем два решения исходной системы $(0; -4)$ и $(-1; -1)$. Наибольшей суммой $x + y$ будет -2.

Ответ: -2.

182. Замена $3^y = z$ приводит к системе $\begin{cases} 9x^2 + z^2 = 6zx, \\ 7x + z = 30. \end{cases}$ Подставляя выраженное из второго уравнения $z = 30 - 7x$ в первое уравнение системы, получим после преобразований уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0$. Тогда $x = 3$ и $z = 30 - 7 \cdot 3 = 9$. Итак, $x + 3^y = x + z = 12$.

Ответ: 12.

183.ОДЗ: $x > 3$.
$2x\log_2(x - 3) - 3\log_2\big(x^2 - 6x + 9\big) = 4x - 12$;
$2x\log_2(x-3) - 6\log_2(x-3) - 4(x-3) = 0$; $2(x-3)\big(\log_2(x-3) - 2\big) = 0$;
$x_1 = 3$, $x_2 = 7$. Но x_1 не входит в ОДЗ.

Ответ: 7.

184. ОДЗ: $x > -2$.
$x^2\log_3(x + 2) - 9\log_3(x + 2) = 0$; $(x^2 - 9)\log_3(x + 2) = 0$.

а) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Заметим,что $x_1 = -3$ не удовлетворяет ОДЗ.

б) $\log_3(x+2) = 0 \Rightarrow x_3 = -1$.

Сумма корней: $x_2 + x_3 = 2$.

Ответ: 2.

185. ОДЗ: $x < 3$.
$25x\log_2(3-x) - x^3\log_2(3-x) = 0$; $(25x - x^3)\log_2(3-x) = 0$;

а) $25x - x^3 = 0$; $x(25 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -5$, $x_3 = 5$. Заметим, что x_3 не удовлетворяет ОДЗ.

б) $\log_2(3-x) = 0$; $3 - x = 1$; $x_4 = 2$.

Сумма корней: $x_1 + x_2 + x_4 = 0 - 5 + 2 = -3$.

Ответ: -3.

186. $\dfrac{x^2-5x+6}{5^{x-1}-25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ 5^{x-1} \neq 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = 3, \end{array}\right. \\ x \neq 3; \end{cases} \Rightarrow x = 2.$

Ответ: 2.

187. ОДЗ: $x \neq 2$.
Из первого уравнения $y_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_2 = -3$. Подставим $y = \dfrac{1}{2}$ во второе уравнение: $5^{2x} - 26\cdot 5^x + 25 = 0$. Пусть $5^x = t$, тогда $t^2 - 26t + 25 = 0$; $t_1 = 25$, $t_2 = 1$. $x_1 = 2$ не входит в ОДЗ, значит $x_2 = 0$. Аналогично при $y = -3$, получим, что решений нет. $y - x = \dfrac{1}{2} - 0 = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

188. ОДЗ: $\begin{cases} 3x+1 > 0, \\ 3x+1 \neq 1; \end{cases}$ $x \in \left(-\dfrac{1}{3}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.
На области определения преобразуем уравнение к виду
$4\cdot\dfrac{1}{\log_2(3x+1)} - \log_2(3x+1) + 3 = 0$. Выполнив замену $\log_2(3x+1) = t$, получаем $t^2 - 3t - 4 = 0$; $t_1 = -1$, $t_2 = 4$. Тогда $\left[\begin{array}{l} \log_2(3x+1) = -1, \\ \log_2(3x+1) = 4; \end{array}\right.$
$x_1 = -\dfrac{1}{6}$, $x_2 = 5$. Оба корня входят в ОДЗ, но наибольшим является корень $x = 5$.

Ответ: 5.

189. $\log_4\log_2\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$; $\log_2\left(\dfrac{1}{x}\right) = 4$; $\dfrac{1}{x} = 16$; $x = \dfrac{1}{16}$.

Проверка: $\log_4 \log_2 16 = \log_4 4 = 1$. Таким образом, $x = \dfrac{1}{16} = 0{,}0625$.

Ответ: $0,0625$.

191. $\lg(x^2 - 3x + 1)\lg(x - 1) = 0$;

а) $\lg(x^2 - 3x + 1) = 0$; $x^2 - 3x + 1 = 1$; $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

б) $\lg(x - 1) = 0$; $x - 1 = 1$; $x_3 = 2$.

Проверка:

для $x_1 = 0$ не определено; для $x_2 = 3$: $\lg(9-9+1)\lg(3-1) = \lg 1 \cdot \lg 2 = 0$; для $x_3 = 2$: $\lg(4-6+1)\lg(2-1) = \lg(-1)\cdot\lg 1$ не определено. Единственный корень $x_2 = 3$.

Ответ: 3.

192. $2^{x\log_2 7} \cdot 7^{x^2+x} = 1$; $7^x \cdot 7^{x^2+x} = 1$; $7^{x^2+2x} = 7^0$; $x^2 + 2x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Наибольший корень $x_1 = 0$.

Ответ: 0.

193. $\begin{cases} 3^x - 3^y = 6, \\ x + y = 3. \end{cases}$ $x = 3 - y$ подставим в первое уравнение. Получим: $3^{3-y} - 3^y = 6$. Замена $3^y = z$, $z > 0$. $\dfrac{27}{z} - z = 6$, решая имеем: $z_1 = -9$ (не удовлетворяет условию $z > 0$), $z_2 = 3$. После вычислений $y = 1$, $x = 2$. Итак, $3^y - 2x = -1$.

Ответ: -1.

194. $\log_3(x - 1) + \log_9(x - 1) = 3$; $\log_3(x - 1) + \dfrac{1}{2}\log_3(x - 1) = 3$; $\log_3(x - 1) = 2$; $x - 1 = 9$; $x = 10$.

Ответ: 10.

195. Перемножив уравнения системы, получим: $21^{2x} = 21$, откуда $x = \dfrac{1}{2}$. Первое уравнение сводится к уравнению $3^{x+y} = 7^{1-x}$; с учетом $x = \dfrac{1}{2}$ получаем $3^{x+y} = 7^{\frac{1}{2}}$; $9^{x+y} = \left(3^{x+y}\right)^2 = 7$.

Ответ: 7.

196. $2^{3x} \cdot 50^{3x} = 0{,}1 \cdot 10^{x^2+3}$; $100^{3x} = 10^{x^2+2}$; $10^{6x} = 10^{x^2+2}$; $6x = x^2 + 2$; $x^2 - 6x + 2 = 0$; $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{7}$; $x_1 + x_2 = 3 + \sqrt{7} + 3 - \sqrt{7} = 6$;

Ответ: 6.

197. Пусть $2^x = t$, $t > 0$. Тогда система примет вид

$\begin{cases} 3y = 10 - t, \\ 3t^2 - 12y = 24. \end{cases}$ Подставим $3y = 10 - t$ во второе уравнение системы:

$3t^2 + 4t - 64 = 0$; $t_1 = -\dfrac{16}{3}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$; $t_2 = 4$. Отсюда $x = 2$, $y = 2$. $4^{1,5x} - 6^y = 4^3 - 6^2 = 28$.

Ответ: 28.

198. ОДЗ: $\begin{cases} 2x + 6 > 0, \\ \dfrac{x-1}{x+3} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 > 0, \\ x - 1 > 0; \end{cases} \Rightarrow x > 1.$

$\log_2 \dfrac{x-1}{x+3} + \log_2(2x - 6) = 0$; $\log_2 \dfrac{(x-1)(2x+6)}{x+3} = 0$; $2(x-1) = 1$; $x = 1{,}5$. Заметим, что $x = 1{,}5$ принадлежит ОДЗ.

Ответ: 1,5.

199. $\begin{cases} 12^{x-y} \cdot 6^y = 10, \\ 2^{x-y} = \dfrac{5}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{12^x}{10} = 2^y, \\ 2^y = \dfrac{3}{5} \cdot 2^x. \end{cases}$

Подставим $2^y = \dfrac{3}{5} \cdot 2^x$ в первое уравнение системы: $\dfrac{12^x}{10} = \dfrac{3}{5} \cdot 2^x$, откуда $x = 1$. Имеем: $12^{2x-y} \cdot 6^y = 12^{x-y} \cdot 6^y \cdot 12^x = 120$.

Ответ: 120.

201. $\log_3(x + 5) = 3$.

По определению логарифма имеем $x + 5 = 3^3$, $x + 5 = 27$, $x = 22$.

Выполненные преобразования равносильны, $x = 22$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 22.

202. $\lg(10 - x) = 2$, по определению логарифма имеем $10 - x = 10^2$, $x = 10 - 100$, $x = -90$.

Ответ: -90.

203. $0,2^{3x+5} > 0,04$; $0,2^{3x+5} > 0,2^2$; $3x + 5 < 2$; $3x < -3$; $x < -1$. Следовательно, наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству, равно -2.

Ответ: -2.

204. $5^{2x-1} > 125$; $5^{2x-1} > 5^3$; $2x - 1 > 3$; $2x > 4$; $x > 2$. Следовательно, наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству, равно 3.

Ответ: 3.

205. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+1} = 64$. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+1} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}$; $x + 1 = -3$; $x = -4$.

Ответ: -4.

206. $7^{\frac{3}{x}} = 343$. $7^{\frac{3}{x}} = 7^3$, $\dfrac{3}{x} = 3$, $x = 1$.

Ответ: 1.

207. $4^{x-4} = 64$; $4^{x-4} = 4^3$; $x - 4 = 3$; $x = 7$.

Ответ: 7.

208. $5^{x+2} = 125$; $5^{x+2} = 5^3$; $x + 2 = 3$; $x = 1$.

Ответ: 1.

209. $\log_3(4 - x) = 4$; $4 - x = 81$; $x = -77$.

Ответ: -77.

210. $\cos 3x + \operatorname{ctg} x \cdot \sin 3x = \sin 4x$ на $[0; 2\pi]$.
ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $x \neq \pi n$.
$\cos 3x + \dfrac{\sin 3x \cos x}{\sin x} = \sin 4x$; $\sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x = \sin 4x \sin x$;
$\sin 4x(1 - \sin x) = 0$;
1) $\sin 4x = 0$; $4x = \pi n$; $x = \dfrac{\pi n}{4}$, $n \in Z$.

2) $\sin x = 1$; $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Объединение этих корней $x = \dfrac{\pi n}{4}$, $n \in Z$. Выберем корни из $[0; 2\pi]$: $0 \leqslant \dfrac{\pi n}{4} \leqslant 2\pi$; $0 \leqslant \dfrac{n}{4} \leqslant 2$; $0 \leqslant n \leqslant 8$. Так как $n \in Z$, то $n = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, так как $x \neq \pi n$, то $n \neq 0$, 4, 8. Таким образом, при $n = 1$, 2, 3, 5, 6, 7 корни $\in [0; 2\pi]$. Всего 6 корней.

Ответ: 6.

211. $\operatorname{tg} 2x \cos x + \sin x = \sin 3x$ на $(0; 2\pi)$.
ОДЗ: $\cos 2x \neq 0$; $2x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.
$\dfrac{\sin 2x \cos x}{\cos 2x} + \sin x = \sin 3x$; $\sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x = \sin 3x \cos 2x$;
$\sin 3x(1 - \cos 2x) = 0$;
1) $\sin 3x = 0$; $3x = \pi n$; $x = \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.
2) $\cos 2x = 1$; $2x = 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \pi n$, $n \in Z$.
Общее решение $x = \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

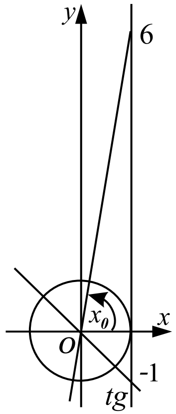


Рис. 1.

Выберем корни из промежутка $(0; 2\pi)$: $0 < \dfrac{\pi n}{3} < 2\pi$; $0 < \dfrac{n}{3} < 2$; $0 < n < 6$. Так как n — целое, то $n = 1, 2, 3, 4, 5$, то есть корни $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$; $x_2 = \dfrac{2\pi}{3}$; $x_3 = \pi$; $x_4 = \dfrac{4\pi}{3}$; $x_5 = \dfrac{5\pi}{3}$. Проверим, что полученные корни принадлежат ОДЗ. Если $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, то при $n = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$; при $n = 1$, $x = \dfrac{3\pi}{4}$; при $n = 2$, $x = \dfrac{5\pi}{4}$; при $n = 3$, $x = \dfrac{7\pi}{4}$; при $n = 4$, $x = \dfrac{9\pi}{4}$ не принадлежит промежутку $(0; 2\pi)$. Следовательно, найденные корни принадлежат ОДЗ.

Ответ: 5 корней.

212. Пусть x_0 — наименьший положительный корень уравнения $1 - 5\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0$; $\sin^2 x + \cos^2 x - 5\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0$; $\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$: $\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x - 6 = 0$. Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. $t^2 - 5t - 6 = 0$, так как $1 + 5 - 6 = 0$, то $t_1 = -1$, $t_2 = 6$. $\operatorname{tg} x = -1$, $\operatorname{tg} x = 6$. Из рисунка 1 видно, что наименьшим положительным корнем является угол x_0, если $\operatorname{tg} x_0 = 6$.

Ответ: 6.

213. Пусть x_0 — наименьший положительный корень уравнения $\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 2 = 0$; $\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 2\sin^2 x + 2\cos^2 x = 0$;

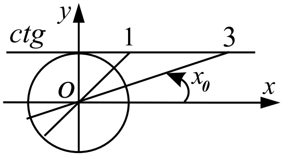


Рис. 2.

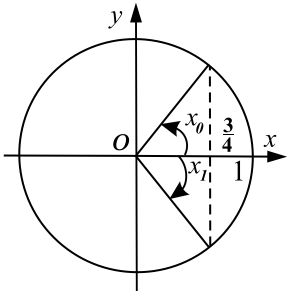


Рис. 3.

$2\cos^2 x - 7\sin x \cos x + 3\sin^2 x = 0$. Разделим обе части уравнения на $\sin^2 x \neq 0$: $2\operatorname{ctg}^2 x - 7\operatorname{ctg} x + 3 = 0$. Обозначим $\operatorname{ctg} x = t$. $2t^2 - 7t + 3 = 0$; $t_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \dfrac{7 \pm 5}{4}$, $t_1 = 3$, $t_2 = \dfrac{1}{2}$. $\operatorname{ctg} x = 3$; $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{2}$. Из рисунка 2 видно, что наименьшим положительным корнем является острый угол x_0, если $\operatorname{ctg} x_0 = 3$.

Ответ: 3.

214. Пусть x_0 — наименьший положительный, x_1 — наибольший отрицательный корни уравнения $2\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$;
$2(1 + \cos 2x) - 3\cos x = 0$; $4\cos^2 x - 3\cos x = 0$; $\cos x(4\cos x - 3) = 0$; $\cos x = \dfrac{3}{4}$, $x = \pm \arccos \dfrac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$. Из рисунка 3 видно, что x_0 — наименьший положительный, x_1 — наибольший отрицательный корни уравнения. $x_0 = \arccos \dfrac{3}{4}$; $x_1 = -\arccos \dfrac{3}{4}$, тогда $x_0 + x_1 = 0$.

Ответ: 0.

215. Пусть x_0 — наименьший положительный, x_1 — наименьший положительный, лежащий во второй четверти, корни уравнения.
$2\sin x + 3\cos 2x - 3 = 0$; $2\sin x - 3(1 - \cos 2x) = 0$; $2\sin x - 3 \cdot 2\sin^2 x = 0$;
$2\sin x(1 - 3\sin x) = 0$;

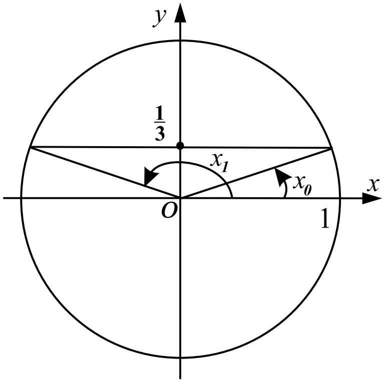


Рис. 4.

1) $\sin x = 0$; $x = \pi n$, $n \in Z$;

2) $\sin x = \dfrac{1}{3}$; $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{1}{3} + \pi n$, $n \in Z$. Из рисунка 4 видно, что x_0 — наименьший положительный, x_1 — наименьший положительный, лежащий во второй четверти, корни уравнения.
$x_0 + x_1 = x_0 + (\pi - x_0) = \pi \approx 3$.

Ответ: 3.

216. Задача сводится к нахождению корней данного уравнения, принадлежащих множеству $\left[0, \dfrac{5\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$.

Решаем уравнение. $\cos^2 x - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) - \sin x = 0$; $\sin^2 x - \sin x = 0$; $\sin x(\sin x - 1) = 0$.

1) $\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in Z$. Из полученной серии корней принадлежат указанному множеству следующие: $x_0 = 0$, $x_1 = \pi$, $x_2 = 2\pi$.

2) $\sin x - 1 = 0$; $\sin x = 1$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Из этой серии корней принадлежит указанному множеству лишь $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Всего 4 корня.

Ответ: 4.

217. Задача сводится к нахождению корней данного уравнения, принадлежащих множеству $\left[-\dfrac{7\pi}{3}; \dfrac{9\pi}{5}\right)$.

$2\cos 2x + 5 = 7\cos x - 2\sin^2 x$; $2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 5 = 7\cos x - 2\sin^2 x$;

$2\cos^2 x - 7\cos x + 5 = 0$. Обозначим $\cos x = t,\ -1 \leqslant t \leqslant 1$.
$2t^2 - 7t + 5 = 0$. Так как $2 - 7 + 5 = 0$, то $t_1 = 1,\ t_2 = 2{,}5$; $2{,}5$ не принадлежит отрезку $[-1; 1]$. $\cos x = 1$; $x = 2\pi n,\ n \in Z$. Из полученной серии принадлежат указанному множеству $x_0 = -2\pi$; $x_1 = 0$.

Ответ: 2.

218. Задача сводится к нахождению корней данного уравнения, принадлежащих множеству $\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.
$\cos 4x + 2\cos 2x + 1 = 0$; $2\cos^2 2x - 1 + 2\cos 2x + 1 = 0$;
$2\cos^2 2x + 2\cos 2x = 0$; $2\cos 2x(\cos 2x + 1) = 0$;

1) $\cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. Из полученной серии корней указанному множеству принадлежат: $x_0 = -\frac{\pi}{4}$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

2) $\cos 2x = -1$; $2x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. Из этой серии принадлежат промежутку $\left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$: $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; $x_1 = \frac{\pi}{2}$.

Всего 5 корней.

Ответ: 5.

219. Требуется найти количество различных корней уравнения $f(x) = g(x)$ на промежутке $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.
$4\sin^4 x = 1 - 3\cos 2x$; $4\sin^4 x = 1 - 3\big(1 - 2\sin^2 x\big)$;
$4\sin^4 x - 6\sin^2 x + 2 = 0$; $2\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = 0$.
Обозначим $\sin^2 x = t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$. $2t^2 - 3t + 1 = 0$; $t_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{2}$.

1) $\sin^2 x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. В указанный промежуток попадут: $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$.

2) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$; $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. Попадут в промежуток $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$: $x_0 = -\frac{3\pi}{4}$, $x_1 = -\frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{\pi}{4}$.

Всего 5 корней.

Ответ: 5.

220. Фактически требуется найти количество различных корней уравнения $f(x) = g(x)$ на промежутке $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

$4\cos^4 x = 3\cos 2x + 1;\ 4\cos^4 x = 3\big(2\cos^2 x - 1\big) + 1;$
$4\cos^4 x - 6\cos^2 x + 2 = 0; 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0.$

Обозначим $\cos^2 x = t,\ t \in [0; 1]$. $2t^2 - 3t + 1 = 0; t_1 = 1,\ t_2 = \dfrac{1}{2}$.

1) $\cos^2 x = 1; \cos x = \pm 1; x = \pi n,\ n \in Z$. Из этой серии корней в указанный промежуток попадут: $x_0 = -4\pi$, $x_1 = -3\pi$, $x_2 = -2\pi$. Заметим, что $x_3 = -\pi$ не принадлежит промежутку $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

2) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}; \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$. Из этой серии попадут в промежуток $\left[-4\pi; -\dfrac{5\pi}{4}\right)$: $x_0 = -\dfrac{15\pi}{4}$, $x_1 = -\dfrac{13\pi}{4}$, $x_2 = -\dfrac{11\pi}{4}$, $x_3 = -\dfrac{9\pi}{4}$, $x_4 = -\dfrac{7\pi}{4}$.

Всего 8 корней.

Ответ: 8.

221. Требуется найти количество различных корней уравнения $f(x) = g(x)$ на промежутке $\left(-\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

$8\sin^4 x = \cos 2x + 2; 8\sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x + 2; 8\sin^4 x + 2\sin^2 x - 3 = 0.$

Обозначим $\sin^2 x = t,\ t \in [0; 1]$. $8t^2 + 2t - 3 = 0; t_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{16} = \dfrac{-2 \pm 10}{16}; t_1 = -\dfrac{3}{4};\ t_2 = \dfrac{1}{2}$. Заметим, что $-\dfrac{3}{4}$ не принадлежит отрезку $[0; 1]$.

$\sin^2 x = \dfrac{1}{2}; \sin x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$. В указанный промежуток попадут: $x_0 = -\dfrac{3\pi}{4}; x_1 = -\dfrac{\pi}{4}, x_2 = \dfrac{\pi}{4}, x_3 = \dfrac{3\pi}{4}$.

Всего 4 корня.

Ответ: 4.

222. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \pi x \neq \pi n,\ n \in Z, \\ -1 \leqslant \dfrac{x^2}{3} \leqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg} \pi x - 1 = 0, \\ \arccos\left(\dfrac{x^2}{3}\right) - \dfrac{\pi}{3} = 0; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq n,\ n \in Z, \\ \dfrac{x^2}{3} \leqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg} \pi x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \\ \arccos\left(\dfrac{x^2}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq n,\ n \in Z, \\ -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}, \\ \left[\begin{array}{l} \pi x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z, \\ \dfrac{x^2}{3} = \dfrac{1}{2}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq n,\ n \in Z, \\ -\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} + k,\ k \in Z, \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}. \end{array} \right. \end{cases}$$

Из последней системы находим 6 корней исходного уравнения:

$x_1 = -\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ x_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{2},\ x_3 = -\dfrac{5}{3},\ x_4 = -\dfrac{2}{3},\ x_5 = \dfrac{1}{3},\ x_6 = \dfrac{4}{3}.$

Ответ: 6.

223. $\cos 2x - \cos x + 1 = 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = \cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z. \end{array} \right.$$

Таким образом, на отрезке $[-\pi; \pi]$ уравнение имеет 4 корня: $x_{1,2} = \pm\dfrac{\pi}{2}$, $x_{3,4} = \pm\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: 4.

224. $5(1 + \sin 2x) = 5(1 + 2\sin x \cdot \cos x) = 5(1 + 2 \cdot 0{,}2) = 7$.

Ответ: 7.

225. $\cos(\cos \pi x) = 1;\ \cos \pi x = 2\pi k,\ k \in Z$, так как множество значений косинуса $[-1; 1]$, то $\cos \pi x = 0;\ \pi x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;\ x = \dfrac{1}{2} + k,\ k \in Z$ на указанном промежутке лежит только 1,5.

Ответ: 1,5.

226. $\sin(\sin \pi x) = 0;\ \sin \pi x = \pi k,\ k \in Z$, так как множество значений синуса $[-1; 1]$, то $\sin \pi x = 0;\ \pi x = \pi k,\ k \in Z;\ x = k,\ k \in Z$ на указанном промежутке лежит только 3.

Ответ: 3.

227. Областью определения данного уравнения являются те значения x, при которых $\cos x \neq 0$.

Запишем исходное уравнение в виде: $\sin x + \dfrac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x\cos x = 0$.

Последнее уравнение на области определения ($\cos x \neq 0$) равносильно уравнению:

$\sin x(\cos x + 1 - 2\cos^2 x) = 0$;

$\sin x(\cos x - 1)\left(\cos x + \dfrac{1}{2}\right) = 0$. (1)

Уравнение (1) равносильно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = 1,\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$

Их корни входят в ОДЗ исходного уравнения ($\cos x \neq 0$). Найдём эти корни, построив графики (см. рис. 5):

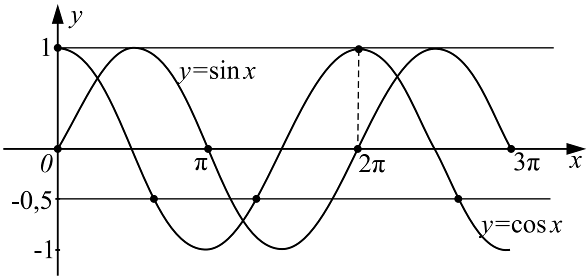


Рис. 5.

Делаем вывод: уравнение на отрезке $x \in [0;\ !3\pi]$ имеет 7 различных корней.

Ответ: 7.

228. ОДЗ: $\sin x \neq 0$. Решим исходное уравнение:

$\dfrac{\cos x}{\sin x} - 2\sin x\cos x = \cos x$, $\cos x\big(1 - 2\sin^2 x - \sin x\big) = 0$. Отсюда $\cos x = 0$ или $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Из второго уравнения получим: $\sin x = -1, \sin x = \dfrac{1}{2}$. Решения всех трёх простейших тригонометрических уравнений удовлетворяют ОДЗ. Для того, чтобы ответить на поставленный в задаче вопрос, воспользуемся геометрической иллюстрацией (см. рис. 6). Вывод: на отрезке $x \in [-\pi; 2\pi]$ наше уравнение имеет 5 корней.

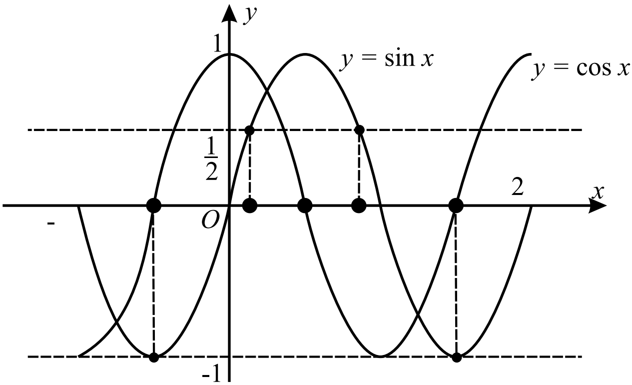


Рис. 6.

Ответ: 5.

229. Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin x(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x = -1. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z. \end{array} \right.$$

Отрезку $[-2\pi; 2\pi]$ принадлежат следующие корни: $x_1 = -2\pi$, $x_2 = -\pi$, $x_3 = 0$, $x_4 = \pi$, $x_5 = 2\pi$, $x_6 = -\dfrac{5\pi}{4}$, $x_7 = -\dfrac{\pi}{4}$, $x_8 = \dfrac{3\pi}{4}$, $x_9 = \dfrac{7\pi}{4}$.

Ответ: 9.

230. Запишем исходное уравнение в виде:

$$(\sin x - \cos x)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z. \end{array} \right.$$

Отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат следующие корни: $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$, $x_3 = \dfrac{7\pi}{4}$, $x_4 = \dfrac{9\pi}{4}$, $x_5 = -\dfrac{\pi}{3}$, $x_6 = \dfrac{\pi}{3}$, $x_7 = \dfrac{7\pi}{3}$.

Ответ: 7.

231. Сделаем замену $\sin^2 x = t$. Тогда имеем из ОДЗ: $t \neq 0$, $t \neq 1$. Получим уравнение $1+\dfrac{t}{1-t}=4t$. После преобразований: $4t^2-4t+1=0$; $(2t-1)^2=0$; $t=\dfrac{1}{2}$. Теперь $\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-2t=0$.

Ответ: 0.

232. Сделаем замену $\cos x=t$. Тогда имеем из ОДЗ: $t\neq 0$. Получим уравнение $t+1=\dfrac{2}{t}$. После преобразований: $t^2+t-2=0$; $t_1=1, t_2=-2$. Очевидно, что t_2 – посторонний корень. Если $\cos x=1$, то $\sin x=0$. Теперь $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot 0\cdot 1=0$.

Ответ: 0.

234. Так как $x=0$ не является корнем данного уравнения, можно умножить уравнение на x^2:
$x^4-10x^2+9=0$, $\left(x^2-9\right)\left(x^2-1\right)=0$, $x^2=9$, $x=-3$, $x=3$; $x^2=1$, $x=-1$, $x=1$. $x=-3$ — наименьший корень данного уравнения.

Ответ: -3.

235. Решим данное уравнение.

$2x^2+3x-2=0$; $D=9+4\cdot 2\cdot 2=25$; $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm 5}{4}$; $x_1=-2$, $x_2=\dfrac{1}{2}$.

Наиболее близкий к нулю — $x_2=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

236. Решим данное уравнение.

$2x^2-3x-14=0$; $D=9+4\cdot 2\cdot 14=121$; $x_{1,2}=\dfrac{3\pm 11}{4}$; $x_1=-2$, $x_2=3{,}5$.
Наиболее близкий к нулю — $x_1=-2$.

Ответ: -2.

237. $\sqrt{12x^2+4}=6x+10$; $\sqrt{3x^2+1}=3x+5$;

$$\begin{cases}3x^2+1=9x^2+30x+25,\\ 2x+5\geqslant 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+30x+24=0,\\ x\geqslant -2{,}5;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+5x+4,\\ x\geqslant -2{,}5;\end{cases}\Rightarrow x=-1.$$

Ответ: -1.

238. $\sqrt{0{,}5x^2+2}=\dfrac{x+2}{2}$; $\sqrt{2x^2+8}=x+2\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+8=x^2+4x+4,\\ x+2\geqslant 0;\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0, \\ x \geqslant -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0, \\ x \geqslant -2; \end{cases} \Rightarrow x = 2.$

Ответ: 2.

240. $3 + \sqrt{3x^2 - 8x + 14} = 2x$; $\sqrt{3x^2 - 8x + 14} = 2x - 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x + 14 = 4x^2 - 12x + 9, \\ 2x - 3 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0, \\ x \geqslant 1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 5, \end{array} \right. \\ x \geqslant 1{,}5; \end{cases} \Rightarrow x = 5.$

Проверка показывает, что $x = 5$ — корень данного уравнения.

Ответ: 5.

241. $\sqrt{x^4 - 11x^2 - x + 30} = 6 - x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 11x^2 - x + 30 = 36 - 12x^2 + x^4, \\ 6 - x^2 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ |x| \leqslant \sqrt{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -2, \\ x_2 = 3, \end{array} \right. \\ |x| \leqslant \sqrt{6}; \end{cases} \Rightarrow x = -2.$

Ответ: -2.

242. $\sqrt{5x+4} - \sqrt{x+3} = 1$; $\left(\sqrt{5x+4}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{x+3}\right)^2$;
$5x + 4 = 1 + 2\sqrt{x+3} + x + 3$; $2\sqrt{x+3} = 4x$; $\sqrt{x+3} = 2x$; $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x + 3 = 4x^2; \end{cases}$
$4x^2 - x - 3 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{3}{4}$; $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x = 1, x = -\dfrac{3}{4}; \end{cases} \Rightarrow x = 1.$

Проверка: $\sqrt{5 \cdot 1 + 4} - \sqrt{1+3} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$; $1 = 1$.

Ответ: $x = 1$.

243. $\sqrt{15x^2 - 7x + 8} = 4x$. Уравнение равносильно системе:
$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 15x^2 - 7x + 8 = 16x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2 + 7x - 8 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -8, \\ x = 1; \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow$
$x = 1$.

Ответ: 1.

244. $\sqrt{x^2 + x} = 2 - x$; $x^2 + x = 4 - 4x + x^2$; $5x = 4$; $x = 0{,}8$. При $x = 0{,}8$: $\sqrt{0{,}64 + 0{,}8} = 2 - 0{,}8$; $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ — верное равенство.

Ответ: $x = 0{,}8$.

245. $2x - \sqrt{x^4 - 45} = 0$; $\sqrt{x^4 - 45} = 2x$, где $x \geqslant 0$; $x^4 - 45 = 4x^2$; $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$. Пусть $x^2 = t$, где $t \geqslant 0$; $t^2 - 4t - 45 = 0$; $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 45} = 2 \pm 7$; $t_1 = 9$, $t_2 = -5$. Заметим, что $t_2 = -5$

не удовлетворяет условию $t \geqslant 0$. $x^2 = 9$; $x_{1,2} = \pm 3$; $x_2 = -3$ не удовлетворяет $x \geqslant 0$.

При $x = 3$: $2 \cdot 3 - \sqrt{3^4 - 45} = 0$; $0 = 0$, значит, $x = 3$ является корнем данного уравнения .

Ответ: 3.

246. ОДЗ: $\begin{cases} -x+3 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \leqslant 1; \end{cases} \Rightarrow x \leqslant 1.$

$-x+3 = 1-2x+x^2$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$; $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Заметим, что $x_1 = 2$ — не входит в ОДЗ.

При $x = -1$: $\sqrt{4} = 2$ — верное равенство, значит, $x = -1$ — корень данного уравнения.

Ответ: -1.

247. $3 - \sqrt{6x+19} = 2x$; $3 - 2x = \sqrt{6x+19} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \geqslant 0, \\ (3-2x)^2 = 6x+19; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1{,}5, \\ 9-12x+4x^2 = 6x+19; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1{,}5, \\ 4x^2-18x-10 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1{,}5, \\ 2x^2-9x-5 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1{,}5, \\ x_{1,2} = \dfrac{9 \pm 11}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 5, \\ x_2 = -0{,}5; \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow x = -0{,}5.$$

Ответ: $-0{,}5$.

248. Сделаем замену $t = \sqrt{\dfrac{5x+4}{3x-2}}$, тогда $t > 0$ и $\sqrt{\dfrac{3x-2}{5x+4}} = \dfrac{1}{t}$. Уравнение примет вид $4t - \dfrac{5}{t} = 8$. Решаем уравнение и получаем корни $t = \dfrac{5}{2}$ и $t = -\dfrac{1}{2}$. Второй корень является лишним, так как $t > 0$. Вернемся к переменной x. Получим $\sqrt{\dfrac{5x+4}{3x-2}} = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{5x+4}{3x-2} = \dfrac{25}{4} \Leftrightarrow x = 1{,}2$.

Ответ: 1,2.

249. $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x+3} - 1$; $x+1 = 2x+3-2\sqrt{2x+3}+1$; $x+3 = 2\sqrt{2x+3} \Rightarrow x^2+6x+9 = 4(2x+3)$; $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: 2.

250. $\begin{cases} \sqrt{(3x-1)^2} = -7-4y, \\ y = 5x-13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3x-1| = -7-4y, \\ y = 5x-13; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} |3x-1| = -7-4(5x-13), \\ y = 5x-13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3x-1| + 20x = 45, \\ y = 5x-13. \end{cases}$

Решим первое уравнение последней системы:

$|3x-1| + 20x = 45.$

1) $3x-1 \geqslant 0;\ x \geqslant \frac{1}{3}$. Тогда $3x-1+20x = 45$; $x = 2$. Заметим, что $x = 2$ удовлетворяет условию $x \geqslant \frac{1}{3}$.

2) $3x-1 < 0;\ x < \frac{1}{3}$. Тогда $1-3x+20x = 45;\ x = \frac{44}{17}$. Но $x = \frac{44}{17}$ не удовлетворяет условию $x < \frac{1}{3}$.

$y = 5x-13$; $y = 5\cdot 2 - 13 = -3$.

Таким образом, $(2; -3)$ — решение данной системы уравнений.

$x_0 + y_0 = 2 - 3 = -1$.

Ответ: -1.

251. $\begin{cases} \sqrt{(2x-1)^2} = 4+3y, \\ y = 1-2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1| = 4+3y, \\ y = 1-2x. \end{cases}$

Подставим $y = 1-2x$ в первое уравнение последней системы:

$|2x-1| = 4+3(1-2x)$; $|2x-1| = 7-6x$.

1) $2x-1 \geqslant 0;\ x \geqslant \frac{1}{2}$. Тогда $2x-1 = 7-6x;\ x = 1$. Заметим, что $x = 1$ удовлетворяет условию $x \geqslant \frac{1}{2}$.

2) $2x-1 < 0;\ x < \frac{1}{2}$. Тогда $1-2x = 7-6x$; $x = 1{,}5$. Но $x = 1{,}5$ не удовлетворяет условию $x < \frac{1}{2}$.

$y = 1-2x;\ y = 1-2\cdot 1 = -1$.

Таким образом, $(1; -1)$ — решение данной системы уравнений.

$x_0 + y_0 = 1 - 1 = 0$.

Ответ: 0.

252. $\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2} + 5y = -3, \\ y + 2x - 7 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| = -3-5y, \\ y = 7-2x. \end{cases}$

Подставим $y = 7-2x$ в первое уравнение последней системы:

$|x-2| = -3-5(7-2x)$; $|x-2| = -38+10x$.

1) $x-2\geqslant 0$; $x\geqslant 2$. Тогда $x-2=-38+10x$; $9x=36$; $x=4$. Заметим, что $x=4$ удовлетворяет условию $x\geqslant 2$.

2) $x-2<0$; $x<2$. Тогда $2-x=-38+10x$; $11x=40$; $x=\dfrac{40}{11}$. Но $x=\dfrac{40}{11}$ не удовлетворяет условию $x<2$.

$y=7-2x$; $y=7-2\cdot 4=-1$.

Таким образом, $(4;-1)$ — решение данной системы уравнений.

$\dfrac{x_0}{y_0}=\dfrac{4}{-1}=-4$.

Ответ: -4.

253. $\begin{cases}\sqrt{(x+2)^2}-2y=-1,\\ y+3x-5=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x+2|=2y-1,\\ y=5-3x.\end{cases}$

Подставим $y=5-3x$ в первое уравнение последней системы:

$|x+2|=2\cdot(5-3x)-1$; $|x+2|=9-6x$.

1) $x+2\geqslant 0$; $x\geqslant -2$.

$x+2=9-6x$; $7x=7$; $x=1$. Заметим, что $x=1$ удовлетворяет условию $x\geqslant -2$.

2) $x+2<0$; $x<-2$.

$-x-2=9-6x$; $5x=11$; $x=\dfrac{11}{5}$. Но $x=\dfrac{11}{5}$ не удовлетворяет условию $x<-2$.

$y=5-3x$; $y=5-3\cdot 1=2$.

Таким образом, $(1;2)$ — решение данной системы уравнений.

$y_0-x_0=2-1=1$.

Ответ: 1.

254. Возведём обе части первого уравнения в квадрат, выразим x через y и подставим это выражение во второе уравнение.

$x-2y+2=4$; $x=2y+2$.

$\sqrt{y-2(2y+2)+11}=2y+2-5$;

$\sqrt{-3y+7}=2y-3$ (1); $7-3y=4y^2-12y+9$; $4y^2-9y+2=0$; $y_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{81-32}}{8}$; $y_1=2$, $y_2=\dfrac{1}{4}$. Заметим, что $y_1=2$ является корнем уравнения (1). Но $y_2=\dfrac{1}{4}$ не является корнем уравнения (1), так как правая часть его при $y_2=\dfrac{1}{4}$—отрицательное число.

$x=2y+2$; $x=2\cdot 2+2=6$.

Проверка: $x = 6,\ y = 2.$

1) $\sqrt{6 - 2 \cdot 2 + 2} = 2$; $2 = 2$; верно.
2) $\sqrt{2 - 2 \cdot 6 + 11} = 1$; $1 = 1$; верно.
Таким образом, $(6; 2)$ — решение данной системы уравнений.
$x_0 \cdot y_0 = 6 \cdot 2 = 12.$

Ответ: 12.

255. Возведём обе части первого уравнения в квадрат, выразим x через y и подставим это выражение во второе уравнение.
$x + y - 1 = 1$; $x = 2 - y$.
$\sqrt{2 - y - y + 2} = 2y - 2$; $\sqrt{4 - 2y} = 2y - 2$.
Левая часть уравнения неотрицательна, тогда для правой части выполняется неравенство $2y - 2 \geqslant 0$, $y \geqslant 1$.
$4 - 2y = 4y^2 - 8y + 4$; $4y^2 - 6y = 0$; $y_1 = 0,\ y_2 = 1{,}5$.
Заметим, что $y_1 = 0$ не удовлетворяет условию $y \geqslant 1$.
$y_2 = 1{,}5$ удовлетворяет условию $y \geqslant 1$.
Проверка: $x = 0{,}5,\ y = 1{,}5.$

1) $\sqrt{0{,}5 + 1{,}5 - 1} = 1$; $1 = 1$; верно.
2) $\sqrt{0{,}5 - 1{,}5 + 2} = 1$; $1 = 1$; верно.
Таким образом, $(0{,}5; 1{,}5)$ — решение данной системы уравнений.

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{1{,}5}{0{,}5} = 3.$$

Ответ: 3.

256. $\begin{cases} 2x = -\sqrt{y^2 - 5}, \\ |x - 1| = y - 3; \end{cases}$

Из первого уравнения системы: $x \leqslant 0$. Отсюда $x - 1 < 0;\ x < 1$;
$x - 1 = 3 - y$; $x = 4 - y$. Подставляем это выражение в первое уравнение системы:

$$\sqrt{y^2 - 5} = 2y - 8 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 5 = 4y^2 - 32y + 64, \\ 2y - 8 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 32y + 69 = 0, \\ y \geqslant 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{1,2} = \dfrac{16 \pm \sqrt{256 - 207}}{3}, \\ y \geqslant 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y_1 = 3, \\ y_2 = \dfrac{23}{3}, \end{array} \right. \\ y \geqslant 4; \end{cases} \Rightarrow y = \frac{23}{3}.$$

Заметим, что $x = -\dfrac{11}{3}$ — удовлетворяет условию $x < 1$.

Проверка: $x = -\frac{11}{3}$, $y = \frac{23}{3}$.

1) $\sqrt{\frac{529}{9} - 5} - \frac{22}{3} = \sqrt{\frac{484}{9}} - \frac{22}{3} = 0$; $0 = 0$; верно.

2) $\sqrt{\frac{121}{9} + \frac{22}{3} + 1} = \sqrt{\frac{121+66+9}{9}} = \frac{14}{3}$; $\frac{23}{3} - 3 = \frac{14}{3}$; $\frac{14}{3} = \frac{14}{3}$; верно.

Таким образом, $\left(-\frac{11}{3}; \frac{23}{3}\right)$ — решение данной системы уравнений.

$x_0 + y_0 = -\frac{11}{3} + \frac{23}{3} = \frac{12}{3} = 4$.

Ответ: 4.

257. $\begin{cases} \sqrt{25-x^2} + y = 1, \\ |y+3| + x = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3 = 4 - \sqrt{25-x^2}, \\ |y+3| = 5 - x. \end{cases}$

1) $y + 3 \geqslant 0$, $y \geqslant -3$.

$y + 3 = 5 - x$, $5 - x = 4 - \sqrt{25-x^2}$.

$\sqrt{25-x^2} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - x^2 = x^2 - 2x + 1, \\ x - 1 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x - 24 = 0, \\ x \geqslant 1; \end{cases}$

$\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x^2 - x - 12 = 0, \\ x \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3,\ x_2 = 4, \\ x \geqslant 1; \end{cases} \Rightarrow x = 4.$

$y + 3 = 5 - 4$, $y = -2$.

Заметим, что $y = -2$ удовлетворяет условию $y \geqslant -3$.

2) $y + 3 < 0$; $y < -3$.

$y + 3 = x - 5$; $x - 5 = 4 - \sqrt{25-x^2}$.

$\sqrt{25-x^2} = 9 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - x^2 = 81 - 18x + x^2, \\ 9 - x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 18x + 56 = 0, \\ x \leqslant 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 28 = 0, \\ x \leqslant 9; \end{cases}$ решений нет, так как уравнение $x^2 - 9x + 28 = 0$ не имеет действительных корней ($D = 81 - 28 \cdot 4$, $D < 0$).

Проверка: $x = 4$, $y = -2$.

1) $\sqrt{25-16} - 2 = 1$; $1 = 1$; верно.

2) $\sqrt{4 - 12 + 9} + 4 = 5$; $5 = 5$; верно.

Таким образом, $(4; -2)$ — решение данной системы уравнений.

$x_0 + y_0 = 4 - 2 = 2$.

Ответ: 2.

258. $\begin{cases} \sqrt{8-x^2}-y=0, \\ |y+1|=x+5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8-x^2}=y, \\ |y+1|=x+5. \end{cases}$

Из первого уравнения: $y \geqslant 0$. Следовательно, $y+1>0$ и $|y+1|=y+1$. $y+1=x+5$; $\sqrt{8-x^2}+1=x+5$.

$\sqrt{8-x^2}=x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x^2=x^2+8x+16, \\ x+4 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+8x+8=0, \\ x+4 \geqslant 0; \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+4=0, \\ x+4 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2, \\ x \geqslant -4; \end{cases} \Rightarrow x=-2.$

$y+1=-2+5,\ y=2$.

Заметим, что $y=2$ удовлетворяет условию $y \geqslant -1$.

Проверка: $x=-2,\ y=2$.

1) $\sqrt{8-4}-2=0$; $0=0$; верно.

2) $\sqrt{4+4+1}=3$; $3=3$; верно.

Таким образом, $(-2;2)$ — решение данной системы уравнений.

$x_0+y_0=-2+2=0$.

Ответ: 0.

259. ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Замена: $\sqrt{x}=a,\ a \geqslant 0;\ \ \sqrt{y}=b,\ b \geqslant 0$.

$\begin{cases} a+b=5, \\ 2a^2-3b^2=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b, \\ 2(5-b)^2-3b^2=6; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b, \\ 50-20b+2b^2-3b^2=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b, \\ b^2+20b-44=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-b, \\ \left[\begin{array}{l} b_1=-22, \\ b_2=2. \end{array} \right. \end{cases}$

Заметим, что $b_1=-22$ не удовлетворяет условию $b \geqslant 0$, $b_2=2$ удовлетворяет условию $b \geqslant 0$.

$a=5-2=3$. $a=3$ удовлетворяет условию $a \geqslant 0$.

Вернёмся к замене.

$\sqrt{x}=3;\ x=9;\ \sqrt{y}=2;\ y=4$.

Оба числа 4 и 9 входят в ОДЗ.

Итак, $(9;4)$ — решение данной системы уравнений.

$x_0-y_0=9-4=5$.

Ответ: 5.

260. ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Замена: $\sqrt{x}=a,\ a \geqslant 0;\ \ \sqrt{y}=b,\ b \geqslant 0$.

$\begin{cases} a-b=1, \\ 4a^2-8b^2=7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1+b, \\ 4(1+b)^2-8b^2=7; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ 4 + 8b + 4b^2 - 8b^2 = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ 4b^2 - 8b + 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ b_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + b, \\ \left[\begin{array}{l} b_1 = 0{,}5, \\ b_2 = 1{,}5. \end{array} \right. \end{cases}$

Оба числа 0,5 и 1,5 удовлетворяют условию $b \geqslant 0$.

$a_1 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$; $a_2 = 1 + 1{,}5 = 2{,}5$.

Вернёмся к замене.

1) $\sqrt{x} = 1{,}5;\ x = 2{,}25;\ \sqrt{y} = 0{,}5;\ y = 0{,}25.$

Числа 2,25 и 0,25 входят в ОДЗ, но не удовлетворяют условию $x_0 \cdot y_0 > 1$.

2) $\sqrt{x} = 2{,}5;\ x = 6{,}25;\ \sqrt{y} = 1{,}5;\ y = 2{,}25.$

Числа 6,25 и 2,25 входят в ОДЗ и удовлетворяют условию $x_0 \cdot y_0 > 1$.

$x_0 - y_0 = 6{,}25 - 2{,}25 = 4.$

Ответ: 4.

261. $\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{(5-3x)^2};\ |x-2| = |5-3x|;\ x - 2 = 3x - 5$ или $x - 2 = 5 - 3x \Leftrightarrow -2x = -3;\ x_1 = \dfrac{3}{2};\ 4x = 7,\ x_2 = \dfrac{7}{4};$

$|x_2 - x_1| = \left|\dfrac{7}{4} - \dfrac{6}{4}\right| = \dfrac{1}{4} = 0{,}25.$

Ответ: 0,25.

262. $\sqrt{(3-x)^2} = \sqrt{(4x-1)^2};\ |3-x| = |4x-1|;\ \left[\begin{array}{l} 3 - x = 4x - 1, \\ 3 - x = 1 - 4x; \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + x = 4, \\ 3x = -2; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0{,}8, \\ x = -\dfrac{2}{3}; \end{array} \right. \ 3 \cdot (-\dfrac{2}{3}) \cdot 0{,}8 = -1{,}6.$

Ответ: $-1{,}6$.

263. Возведем обе части уравнения в квадрат: $128 - x^2 = (-x)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 128 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 128 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8.$

Проверка: $x = -8,\ \sqrt{128 - (-8)^2} = \sqrt{128 - 64} = \sqrt{64} = 8 = -(-8).$

$x = 8$ не является корнем, так как $\sqrt{128 - 8^2} = \sqrt{128 - 64} = 8 \neq -8.$

Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x = -8$.

Ответ: -8.

264. ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y < -\dfrac{1}{28}. \end{cases}$

Из уравнения (2) $x = 1 + 7y$. Из уравнения (1) $\sqrt{x} = -1 - 28y$.

$1 + 7y = (-1 - 28y)^2 = (1 + 28y)^2$; $16y^2 + y = 0$; $y_1 = 0$; $y_2 = -\dfrac{1}{16}$.

Заметим, что y_1 не входит в ОДЗ. $x = 1 + 7y = \dfrac{9}{16}$. $x + y = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

265. $x - 6 = \sqrt{8 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 12x + 36 = 8 - x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 6, \\ x^2 - 11x + 28 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 6, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 7, \\ x_2 = 4; \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow x = 7.$

Ответ: 7.

266. $x - 3 = \sqrt{9 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 9 = 9 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ x^2 - 5x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3, \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_2 = 5; \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow x = 5.$

Ответ: 5.

267. ОДЗ: $x \geqslant 1$.
$x\sqrt{x-1} = x^2\sqrt{x-1}$; $(x^2 - x)\sqrt{x-1} = 0$; $x(x-1)\sqrt{x-1} = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Заметим, что $x_1 = 0$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 1.

268. Выразим x из первого уравнения $x = y - 2$ и подставим его во второе:
$y - \sqrt{y - 3(y-2)} = 3$; $\sqrt{6 - 2y} = y - 3$; (1)
$6 - 2y = y^2 - 6y + 9$; $y^2 - 4y + 3 = 0$, $y_1 = 3$; $y_2 = 1$. Проверка показывает, $y = 1$ не является корнем уравнения (1) (правая часть при $y < 3$ отрицательна).

$y = 3$ — корень уравнения (1). Тогда $x = y - 2 = 3 - 2 = 1$. Вычислим искомое значение $y + 2x = 3 + 2 = 5$.

Ответ: 5.

269. Из второго уравнения системы $y = 5 - 3x$. Подставим значение y в первое уравнение: $3x - \sqrt{5 - 3x + 2x} = 1$; $\sqrt{5 - x} = 3x - 1$. Тогда $5 - x = 9x^2 - 6x + 1$; $9x^2 - 5x - 4 = 0$. Решение этого уравнения $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{4}{9}$. Второй корень $x = -\dfrac{4}{9}$ посторонний, так как при этом значении x выражение $3x - 1$ отрицательно. Поэтому: $x = 1$. $y = 5 - 3x = 2$. Значение искомого выражения $y - x = 2 - 1 = 1$.

Ответ: 1.

270. Возведем исходное уравнение в квадрат: $5x^3 + 4x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$;

$5x^3+3x^2-2x=0$; $x\big(5x^2+3x-2\big)=0$; $5x(x+1)\Big(x-\dfrac{2}{5}\Big)=0$. Отсюда $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=\dfrac{2}{5}$. При этих значениях x должно быть $-x-1\geqslant 0$. Этому условию удовлетворяет только $x=-1$.

Ответ: -1.

271. ОДЗ: $\begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ x^2+x-6\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\geqslant 0, \\ (x+3)(x-2)\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant -3, \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant -3, \\ x\geqslant 2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{-3\}\cup[2;\ +\infty).$

$x\sqrt{x+3}-3\sqrt{x^2+x-6}=0$;

а) $x\sqrt{x+3}-3\sqrt{x+3}\sqrt{x-2}=0$; $x_1=-3$ — входит в ОДЗ и является корнем.

б) Решим при $x\geqslant 2$:

$\sqrt{x+3}(x-3\sqrt{x-2}=0)$; $x-3\sqrt{x-2}=0$; $x^2=9(x-2)$; $x^2-9x+18=0$; $x_{2,3}=\dfrac{9\pm 3}{2}$; $x_2=6$, $x_3=3$. Заметим, что оба корня входят в ОДЗ.

Сумма корней равна $x_1+x_2+x_3=-3+6+3=6$.

Ответ: 6.

272. $3\sqrt{x+2}+\sqrt{x(x+4)+4}=10$; $3\sqrt{x+2}+\sqrt{(x+2)^2}=10$. Так как $x+2\geqslant 0$, то $3\sqrt{x+2}+x+2=10$. Пусть $t=\sqrt{x+2}\geqslant 0$, тогда $t^2+3t-10=0$; $t_1=2$, t_2-5. Условию $t\geqslant 0$ удовлетворяет только корень $t_1=2$. Тогда $\sqrt{x+2}=2$, $x=2$.

Ответ: 2.

273. ОДЗ: $\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x^2-6x+8\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 2, \\ (x-2)(x-4)\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 2, \\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant 2, \\ x\geqslant 4; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{2\}\cup[4;\ +\infty).$

$5\sqrt{x^2-6x+8}-x\sqrt{x-2}=0$. Заметим, что $x_1=2$ входит в ОДЗ и является корнем. Решим уравнение при $x\geqslant 4$:

$5\sqrt{x-2}\sqrt{x-4}-x\sqrt{x-2}=0$; $\sqrt{x-2}(5\sqrt{x-4}-x)=0$; $5\sqrt{x-4}=x$; $x^2-25x+100=0$; $x_2=20$, $x_3=5$. Оба корня входят в ОДЗ.

Сумма корней равна $x_1+x_2+x_3=2+20+7=27$.

Ответ: 27.

274. ОДЗ: $x\geqslant 0$.

$(2\sqrt{3x})^2+3x=45$; $4\cdot 3x+3x=45$; $x=3$ — входит в ОДЗ.

Ответ: 3.

275. ОДЗ: $\begin{cases} 2x-3\geqslant 3, \\ x+1\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\geqslant 3, \\ x\geqslant -1; \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 1{,}5.$

$\sqrt{2x-3}(\sqrt{x+1}-2)=5\sqrt{x+1}-10;$
$\sqrt{2x-3}\sqrt{x+1}-2\sqrt{2x-3}-5\sqrt{x+1}+10=0;$
$(\sqrt{2x-3}-5)(\sqrt{x+1}-2)=0;$

а) $\sqrt{2x-3}=5$; $2x-3=25$; $x_1=14$. Заметим, что $x_1=14$ принадлежит ОДЗ.

б) $\sqrt{x+1}=2$; $x_2=3$ — входит в ОДЗ.

Сумма корней равна $x_1+x_2=14+3=17$.

Ответ: 17.

276. ОДЗ: $\begin{cases} x+2\geqslant 0, \\ x-1\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow x\geqslant 1.$

$\sqrt{x+2}(\sqrt{x-2}-2)=3\sqrt{x-1}-6;$
$\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}-3\sqrt{x-1+6}=0$; $(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x-1}-2)=0$;

а) $\sqrt{x+2}=3$; $x_1=7$ — входит в ОДЗ.

б) $\sqrt{x-1}=2$; $x_2=5$ — входит в ОДЗ.

Сумма корней равна $x_1+x_2=7+5=12$.

Ответ: 12.

277. ОДЗ: $x\geqslant -3$.
$x^2\sqrt{x+3}+5x\sqrt{x+3}=0$; $(x^2+5x)\sqrt{x+3}=0$; $x(x+5)\sqrt{x+3}=0$; $x_1=0$, $x_2=-3$ — входят в ОДЗ, $x_3=-5$ — не входит в ОДЗ.

Сумма корней равна $x_1+x_2=0-3=-3$.

Ответ: -3.

278. ОДЗ: $x>-3$. Проведя замену $\sqrt{x+3}=t$, $t>0$, получим $3t^2-8t-3=0$; $t_1=3$, $t_2=-\dfrac{1}{3}$ — не удовлетворяет условию $t>0$.
$\sqrt{x+3}=3$, $x=6$.

Ответ: 6.

280. Запишем уравнение в виде $\sqrt{x-3}=x-3$ и возведем его в квадрат: $x-3=(x-3)^2$; $(x-3)^2-(x-3)=0$; $(x-3)(x-4)=0$. Отсюда: $x_1=3$, $x_2=4$. Оба корня удовлетворяют исходному уравнению. Сумма корней $3+4=7$.

Ответ: 7.

281. ОДЗ: $x\geqslant 5$.
$x^2(x-5)^{\frac{1}{4}}-49(x-5)^{\frac{1}{4}}=0$; $(x^2-49)(x-5)^{\frac{1}{4}}=0$; $(x+7)(x-7)(x-5)^{\frac{1}{4}}=0$; $x_1=-7$ — не входит в ОДЗ; $x_2=7$ и $x_3=5$ — входят в ОДЗ.

Произведение корней равно $x_2 \cdot x_3 = 7 \cdot 5 = 35$.

Ответ: 35.

282. ОДЗ: $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

$2x - 3\sqrt{2x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 18x - 9, \quad x_1 = \dfrac{1}{2}, x_2 = 5,$ $x_1 \cdot x_2 = 2{,}5$.

Ответ: 2,5.

283. ОДЗ: $x \geqslant 4$.

$(x^2-2x+1)(x-4)^{\frac{1}{2}} = 16(x-4)^{\frac{1}{2}} = 0$; $(x-5)(x+3)(x-4)^{\frac{1}{2}} = 0$; $x_1 = 5$, $x_2 = 4$ — входят в ОДЗ, $x_3 = -3$ — входит в ОДЗ.

Сумма корней равна $x_1 + x_2 = 5 + 4 = 9$.

Ответ: 9.

284. 1) ОДЗ. $5x + 2 \geqslant 0$; $x \geqslant -0{,}4$.

2) $\sqrt{5x+2} = 10$; $5x + 2 = 100$; $5x = 98$; $x = 19{,}6$ — принадлежит ОДЗ.

Ответ: 19,6.

285. ОДЗ. $4x - 6 \geqslant 0$; $x \geqslant 1{,}5$. $\sqrt{4x-6} = 12$; $4x - 6 = 144$; $4x = 150$; $x = 37{,}5$ — принадлежит ОДЗ.

Ответ: 37,5.

288. ОДЗ: $\begin{cases} 1 - 2x > 0, \\ 25 - 6x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0{,}5, \\ x \leqslant \dfrac{25}{6}l; \end{cases}$ $\Leftrightarrow x < 0{,}5$. Разделим исходное неравенство на $\sqrt{25-6x}$ ($\sqrt{25-6x} \neq 0$ на ОДЗ), тем самым приведем уравнение к виду $\log_3(1-2x) = \dfrac{14}{\sqrt{25-6x}}$. Так как функции $f(t) = \log_3 t$ и $y(t) = \sqrt{t}$ строго возрастают на множестве своего определения, а функции $g(x) = 1 - 2x$ и $h(x) = 25 - 6x$ строго убывают на множестве своего определения, то композиции $f(g(x)) = \log_3(1-2x)$ и $y(h(x)) = \sqrt{25-6x}$ строго убывают на множестве своего определения. Так как функция $z(x) = \sqrt{25-6x}$ положительна на ОДЗ и строго убывает на ОДЗ, то функция $\dfrac{1}{z(x)}$ строго возрастает на ОДЗ. Таким образом, получаем, что левая часть уравнения $\log_3(1-2x) = \dfrac{14}{\sqrt{25-6x}}$ является строго убывающей функцией на ОДЗ, а правая часть — строго возрастающей. Так как графики строго возрастающей функции и строго убывающей не могут пересекаться более чем в одной точке, то исходное уравнение либо не имеет корней, либо имеет единственный корень. Подбором находим корень $x = -4$.

Ответ: -4.

289. ОДЗ: $\begin{cases} 3x + 4 > 0, \\ x > 0,\ x \neq 1. \end{cases}$

Разделим исходное уравнение на $\log_x 5$ ($\log_x 5 \neq 0$), тем самым приведем уравнение к виду $\log_5 \sqrt{3x+4} = \dfrac{1}{\log_x 5}$; $\log_5 \sqrt{3x+4} = \log_5 x \Rightarrow$

$\sqrt{3x+4} = x$; $3x + 4 = x^2$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$

$\Rightarrow x = 4 \in$ ОДЗ.

Ответ: 4.

290. ОДЗ: $\begin{cases} 0,5x + 0,5 > 0, \\ -x > 0,\ -x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0.$

$\log_{11} \sqrt{0,5x + 0,5} \cdot \log_{-x} 11 = 1$. Разделим исходное неравенство на $\log_{-x} 11$ ($\log_{-x} 11 \neq 0$), тем самым приведем уравнение к виду $\log_{11} \sqrt{0,5x + 0,5} =$ $= \dfrac{1}{\log_{-x} 11}$;

$\log_{11} \sqrt{0{,}5x + 0{,}5} = \log_{11}(-x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{0,5x + 0,5} = -x, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,5x + 0,5 = x^2, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0, \\ x < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}, \\ x < 0; \end{cases} \Rightarrow x = -0{,}5 \in$ ОДЗ.

Ответ: $-0{,}5$.

291. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ \log_9^2 x + \log_3 x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

Если $x \in$ ОДЗ, то $\log_3 x^2 = 2\log_3 |x| = 2\log_3 x$, так как $x > 0$. Применяя свойства логарифмов в ОДЗ, получаем уравнение, равносильное исходному.

$\sqrt{(\log_{3^2} x)^2 + 2\log_3 x} = \log_3(9\sqrt{3}) - \log_3 x$; $\sqrt{\dfrac{1}{4}\log_3^2 x + 2\log_3 x} = \dfrac{5}{2} - \log_3 x.$

Сделаем замену $t = \log_2 x$, тогда уравнение примет вид

$\sqrt{\dfrac{1}{4}t^2 + 2t} = \dfrac{5}{2} - t \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 8t = (5 - 2t)^2, \\ \dfrac{5}{2} - t \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 - 28t + 25 = 0, \\ t \leqslant \dfrac{5}{2}; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = \dfrac{25}{3}, \end{array} \right. \\ t \leqslant \dfrac{5}{2}; \end{cases} \quad \Leftrightarrow t = 1.$$

Вернемся к исходной переменной: $\log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$. Все сделанные нами преобразования равносильны, поэтому проверка не нужна.

Ответ: 3.

292. ОДЗ: $\begin{cases} -1 \leqslant 0{,}5x \leqslant 1, \\ -2 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

1) $\arcsin(0,5x) = 0$; $0{,}5x = 0$; $x = 0$ — входит в ОДЗ, значит является корнем данного уравнения.

2) $\sin^6 x - \cos^6 x = 0$; $\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\left(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x\right) = 0$; $\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x > 0$, значит $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$; $\cos 2x = 0$; $2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z$. С учетом ОДЗ корнями данного уравнения являются числа $-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}$. Исходное уравнение имеет 3 корня.

Ответ: 3.

293. $\sqrt{4 - x^2} = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$. $\sin 2 \neq 0$ и $\sin(-2) \neq 0$, $x = \pm 2$ — корни данного уравнения. $4 - x^2 \geqslant 0$; $x^2 \leqslant 4$; $|x| \leqslant 2$; $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

$\dfrac{1}{\sin x} - 1 = 0$; $\sin x = 1$; $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

При $k = 0$: $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $-2 \leqslant \dfrac{\pi}{2} \leqslant 2$; $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ — корень данного уравнения.

При $k = 1$: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi = \dfrac{9\pi}{2} \notin [-2; 2]$.

При $k = 1$ и $k > 1$: x_k — не является корнем данного уравнения.

При $k = -1$: $x_{-1} = -\dfrac{3\pi}{2}$, $-\dfrac{3\pi}{2} \notin [-2; 2]$; $x_{-1} = -\dfrac{3\pi}{2}$ — не корень данного уравнения. Легко понять, что при $k < -1$, $x_k \notin [-2; 2]$. Корни данного уравнения: ± 2; $\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: 3.

294. ОДЗ: $\begin{cases} 5 - x^2 \geqslant 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}, \\ x \neq 0, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[-\sqrt{5}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{5}\right].$

1) $\frac{\sqrt{5-x^2}}{x} = 0;\ \sqrt{5-x^2};\ x = \pm\sqrt{5}$ —входят в ОДЗ.

2) $\operatorname{tg} x = 0;\ x = \pi k,\ k \in Z$. Из этой серии ни одно число не входит в ОДЗ.

Ответ: 2.

295. ОДЗ: $\begin{cases} 9 - x^2 \geqslant 0, \\ -3 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

$(2\sin 2x - 1)\sqrt{9-x^2} = 0.$

1. $2\sin 2x - 1 = 0; \sin 2x = \frac{1}{2}; 2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$. Выберем корни из [-3;3].

1) при $n = -2$: $x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}; -\frac{11\pi}{12} \in [-3; 3];$

2) при $n = -1$: $x_2 = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12} \in [-3; 3];$

3) при $n = 0$: $x_3 = \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12} \in [-3; 3];$

4) при $n = 1$: $x_4 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12}; \frac{5\pi}{12} \in [-3; 3].$

При остальных $n \in Z \quad x \notin [-3; 3]$.

2. $\sqrt{9-x^2} = 0; 9 - x^2 = 0; x_{5,6} = \pm 3$. Всего 6 корней.

Ответ: 6.

296. ОДЗ: $\begin{cases} \sin^2 x \neq 0, \\ 9 - x^2 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi n, n \in Z, \\ -3 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

$\left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right)\sqrt{9-x^2} = 0.$

1. $1 - \frac{1}{\sin^2 x} = 0; \sin^2 x = 1;\ \sin x = \pm 1;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$. Выберем корни, принадлежащие ОДЗ:

1) при $n = -1$: $x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \in [-3; 3].$

2) при $n = 0$: $x = \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \in [-3; 3]$. При остальных $n \in Z\ x \notin [-3; 3]$.

2. $\sqrt{9-x^2} = 0; 9 - x^2 = 0;\ x = \pm 3$. Всего 4 корня.

Ответ: 4.

297. ОДЗ: $x \geqslant -\dfrac{7}{4}$.

а) $\sqrt{4x+7}$; $x_1 = -\dfrac{7}{4}$ — входит в ОДЗ.

б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5x^2-29} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2+5} = 0$; $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{29-5x^2} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^{x^2+5}$; $29 - 5x^2 = x^2 + 5$; $6x^2 = 24$; $x^2 = 4$; $x_2 = 2$ — входит в ОДЗ, $x_3 = -2$ — не входит в ОДЗ. $x_1 = -1{,}75$ и $x_2 = 2$ — корни данного уравнения. Их сумма: $-1{,}75 + 2 = 0{,}25$.

Ответ: 0,25.

298. ОДЗ: $0 < x \leqslant 3$.
$\sin x \cdot \log_3 x \cdot \sqrt{3-x} = 0$; $\sqrt{3-x} = 0$; $x_1 = 3$; $\log_3 x = 0$; $x_2 = 1$; $\sin x = 0$; $x = \pi n, n \in Z$, $0 < \pi n \leqslant 3$, $0 < n < 1$, на интервале $(0; 1)$ нет целых чисел, значит уравнение не имеет корней на промежутке $(0; 3]$. Сумма корней равна $x_1 + x_2 = 4$.

Ответ: 4.

299. ОДЗ: $\begin{cases} x \leqslant 2{,}5, \\ x^2 < 17; \end{cases}$
$\sqrt{5-2x} \cdot \ln(17 - x^2) = 0$.
$\begin{cases} x \leqslant 2{,}5, \\ -\sqrt{17} < x < \sqrt{17}; \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{17} < x \leqslant 2{,}5.$
1) $\sqrt{5-2x} = 0$; $5 - 2x = 0$; $x = 2{,}5$, $2{,}5 \in (-\sqrt{17}; 2{,}5]$.
2) $\ln(17 - x^2) = 0$; $17 - x^2 = 1$; $x^2 = 16$; $x_{1,2} = \pm 4$, $4 \notin (-\sqrt{17}; 2{,}5]$, $-4 \in (-\sqrt{17}; 2{,}5]$. Итак, $x = 2{,}5$ и $x = -4$ являются корнями данного уравнения. $2{,}5 - 4 = -1{,}5$.

Ответ: $-1{,}5$.

300. ОДЗ: $0 < x \leqslant 3$.
$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \log_3 3x \cdot \sqrt{3-x} = 0$.
$3 - x = 0$; $x_1 = 3$.
$\log_3 3x = 0$; $3x = 1$; $x_2 = \dfrac{1}{3}$.
$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 0$; $\sin x = 0$; $x = \pi n$, $n \in Z$, $0 < \pi n \leqslant 3$, $0 < n < 1$. На интервале $(0;\ 1)$ нет целых чисел , значит уравнение не имеет корней на промежутке $(0;\ 3]$. Произведение корней равно $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot \dfrac{1}{3} = 1$.

Ответ: 1.

301. ОДЗ: $2 - x > 0$, $x < 2$. Выразим y через x из второго уравнения системы и подставим значение этого выражения в первое уравнение:
$y = |x-1| - 2$; $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = |x-1| - 2$.

а) $1 \leqslant x < 2$. $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = x-3$. На промежутке $[1;\ 2)$ $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) \geqslant 0$, $x - 3 < 0$. Следовательно, решений нет.

б) $x < 1$. $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -x+1-2$; $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -x-1$. Функция $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2-x)$ монотонно возрастает при $x < 1$, а функция $g(x) = -x-1$ монотонно убывает. Поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня при $x < 1$. Решая это уравнение перебором, находим $x_0 = 0$. Тогда $y_0 = -1$. Проверка показывает, что $(0; -1)$ — решение данной системы уравнений.
$x_0 \cdot y_0 = 0 \cdot (-1) = 0$.

Ответ: 0.

302. ОДЗ: $4 - x > 0$, $x < 4$. Следовательно, $|x-4| = 4-x$. Выразим y через x из второго уравнения системы и подставим в первое:
$y = 3 - |x-4|$; $y = 3 - 4 + x$; $y = x - 1$. $\log_2(4-x) = x-1$. Функция $f(x) = \log_2(4-x)$ монотонно убывает при $x < 4$, а функция $g(x) = x-1$ монотонно возрастает. Поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня при $x < 4$. Решая это уравнение подбором, находим $x_0 = 2$. Тогда $y_0 = 1$. Проверка показывает, что $(2; 1)$ — решение данной системы уравнений. $x_0 \cdot y_0 = 2 \cdot 1 = 2$.

Ответ: 2.

303. ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$. Выразим x через y из первого уравнения системы и подставим во второе:
$\lg x = 2\lg y$; $x = y^2$. $\sqrt{y^2+8} = 2y - 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y^2 + 8 = 4y^2 - 4y + 1, \\ 2y - 1 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 4y - 7 = 0, \\ y \geqslant \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -1, y_2 = \dfrac{7}{3}, \\ y \geqslant \dfrac{1}{2}; \end{cases}$$

$\Rightarrow y = \dfrac{7}{3}$. Тогда $x = \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{49}{9}$. Числа $\dfrac{49}{9}$ и $\dfrac{7}{3}$ входят в ОДЗ.

$\left(\dfrac{49}{9}; \dfrac{7}{3}\right)$ — решение данной системы уравнений. $\dfrac{3x_0}{y_0} = \dfrac{3 \cdot 49 \cdot 3}{9 \cdot 7} = 7$.

Ответ: 7.

304. ОДЗ: $x \geqslant -1{,}8$.

1) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{4x^2-23} - \left(\dfrac{5}{2}\right)^{5x^2-13} = 0$; $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{4x^2-23} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{13-5x^2}$; $4x^2 - 23 =$

$= 13 - 5x^2$; $9x^2 = 36$; $x^2 = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. В область определения входит только $x_1 = 2$, значит, является корнем данного уравнения.
2) $\sqrt[6]{5x+9} = 0$; $x_3 = -1{,}8$ — входит в ОДЗ, значит, является корнем данного уравнения. Произведение корней уравнения: $2 \cdot (-1{,}8) = -3{,}6$.

Ответ: $-3{,}6$.

305. ОДЗ: $4 - x^2 > 0$; $-2 < x < 2$.

1) $\sin^2 x - 1 = 0$; $\dfrac{1-\cos 2x}{2} - 1 = 0$; $\cos 2x = -1$; $2x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. Промежутку $(-2; 2)$ принадлежат корни $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$,

$x_2 = -\dfrac{\pi}{2}$.

2) $\log_{0,5}\left(4 - x^2\right) = 0$; $4 - x^2 = 1$; $x^2 = 3$; $x_3 = \sqrt{3}, x_4 = -\sqrt{3}$. Оба числа входят в ОДЗ, значит, являются корнями данного уравнения. Исходное уравнение имеет 4 корня.

Ответ: 4.

306. ОДЗ: $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$.

1) $4\cos^2 \pi x - 3 = 0$; $2(1 + \cos 2\pi x) - 3 = 0$; $\cos 2\pi x = \dfrac{1}{2}$; $2\pi x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

$x = \pm\dfrac{1}{6} + n$, $n \in Z$. Найдём набор корней, принадлежащих промежутку $(-\sqrt{7};\sqrt{7})$.

$n = -2$: $x_1 = -1\dfrac{5}{6}, x_2 = -2\dfrac{1}{6}$;

$n = -1$: $x_3 = -1\dfrac{1}{6}, x_4 = -\dfrac{5}{6}$;

$n = 0$: $x_5 = -\dfrac{1}{6}, x_6 = \dfrac{1}{6}$;

$n = 1$: $x_7 = \dfrac{5}{6}, x_8 = 1\dfrac{1}{6}$;

$n = 2$: $x_9 = 1\dfrac{5}{6}, x_{10} = 2\dfrac{1}{6}$.

Корни x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} принадлежат промежутку $(-\sqrt{7}; \sqrt{7})$. При $n < -2$ и $n > 2$ полученные корни не принадлежат указанному промежутку.
2) $\log_2\left(7 - x^2\right) - 1 = 0$; $7 - x^2 = 2$; $x^2 = 5$; $x_{11} = \sqrt{5}, x_{12} = -\sqrt{5}$. Оба числа $\sqrt{5}$ и $-\sqrt{5}$ входят в ОДЗ, значит, являются корнями исходного

уравнения. Данное уравнение имеет 12 корней.

Ответ: 12.

307. ОДЗ: $\begin{cases} x^2-3x>0, \\ -1 \leqslant \dfrac{x}{5}-\dfrac{5}{6} \leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)>0, \\ -\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{x}{5} \leqslant \dfrac{11}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<0, x>3, \\ -\dfrac{5}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{55}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{6} \leqslant x < 0, \\ 3 < x \leqslant \dfrac{55}{6}. \end{array} \right.$

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2\left(x^2-3x\right)-2=0, \\ \arcsin\left(\dfrac{x}{5}-\dfrac{5}{6}\right)=0, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{6} \leqslant x < 0, \\ 3 < x \leqslant \dfrac{55}{6}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-3x=4, \\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{5}{6}=0, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{6} \leqslant x < 0, \\ 3 < x \leqslant \dfrac{55}{6}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-3x-4=0, \\ \dfrac{x}{5}=\dfrac{5}{6}, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{6} \leqslant x < 0, \\ 3 < x \leqslant \dfrac{55}{6}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=4, \end{array} \right. \quad x_3=\dfrac{25}{6}, \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{5}{6} \leqslant x < 0, \\ 3 < x \leqslant \dfrac{55}{6}; \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow x_2=4, x_3=\frac{25}{6}.$$

Минимальный корень $x_{\min}=4$, $3x_{\min}=3\cdot 4=12$.

Ответ: 12.

309. ОДЗ: $\begin{cases} 5x-2x^2-1>0, \\ -1 \leqslant 3x-2 \leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+1<0, \\ 1 \leqslant 3x \leqslant 3; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5-\sqrt{17}}{4} < x < \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}, \\ \dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

Сравним $\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$ и $\dfrac{1}{3}$: $4{,}1 < \sqrt{17} < 4{,}2$; $-4{,}2 < -\sqrt{17} < -4{,}1$;

$0{,}8 < 5-\sqrt{17} < 0{,}9$; $0{,}2 < \dfrac{5-\sqrt{17}}{4} < 0{,}225 \Rightarrow \dfrac{5-\sqrt{17}}{4} < \dfrac{1}{3}$ (см. рис. 7).

Исходное уравнение равносильно системе

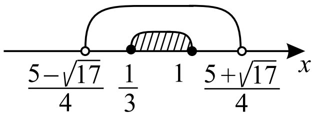


Рис. 7.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2\left(5x-2x^2-1\right)=0, \\ \arccos(3x-2)=0, \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5x-2x^2-1=1, \\ 3x-2=1, \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-5x+2=0, \\ 3x=3, \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}, \\ x_3=1, \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1=2, \\ x_2=\dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad x_3=1, \\ \dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Из последней системы следует, что данное уравнение имеет только два корня: $\frac{1}{2}$ и 1. Их сумма равна $\frac{1}{2}+1=1{,}5$.

Ответ: 1,5.

310. ОДЗ: $\begin{cases} 6x-8x^2+26>0, \\ -1\leqslant 3-3x\leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-6x-26<0, \\ -4\leqslant -3x\leqslant -2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-3x-13<0, \\ \dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{217}}{8}<x<\dfrac{3+\sqrt{217}}{8}, \\ \dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant \frac{4}{3}.$$

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3\left(6x-8x^2+26\right)-3=0, \\ \arcsin(3-3x)=0, \end{array}\right. \\ \dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 6x-8x^2+26=27, \\ 3-3x=0, \end{array}\right. \\ \dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 8x^2-6x+1=0, \\ 3x=3, \end{array} \right. \\ \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{8}, \\ x_3=1, \end{array} \right. \\ \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=\dfrac{1}{4},\ x_3=1, \\ \dfrac{2}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{4}{3}; \end{cases} \Rightarrow x=1.$$

Ответ: 1.

312. а) ОДЗ:$-x^2+5x \geqslant 0$; $x^2-5x \leqslant 0$; $x(x-5) \leqslant 0$; $0 \leqslant x \leqslant 5$. Отметим, что только числа 0 и 5 обращают выражение $\sqrt{-x^2+5x}$ в нуль, следовательно, $x_1=0$, $x_2=5$ — корни данного уравнения.

б) $\begin{cases} \cos x+\cos(1+3x)=0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\dfrac{4x+1}{2}\cos\dfrac{2x+1}{2}=0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)=0, \\ \cos\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=0, \end{array} \right. \\ 0 \leqslant x \leqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z, \\ x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z; \end{array} \right. \\ 0 \leqslant x \leqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z, \\ x=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z; \end{array} \right. \\ 0 \leqslant x \leqslant 5; \end{cases} \Rightarrow$$

$x_3=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\pi}{4}$, $x_4=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3\pi}{4}$, $x_5=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{5\pi}{4}$, $x_6=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{2}$, $x_7=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\pi}{2}$. Данное уравнение имеет 7 корней.

Ответ: 7.

313. ОДЗ: $\begin{cases} 5-x^2>0, \\ 3-2x-x^2 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}, \\ x^2+2x-3 \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}, \\ (x-1)(x+3) \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}, \\ -3 \leqslant x \leqslant 1; \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{5}<x \leqslant 1$. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3\left(5-x^2\right)=0, \\ \sqrt[4]{3-2x-x^2}=0, \end{array} \right. \\ -\sqrt{5}<x \leqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=-2,\ x_2=2, \\ x_3=-3,\ x_4=1, \end{array} \right. \\ -\sqrt{5}<x \leqslant 1. \end{cases}$$

Из последней системы следует, что данное уравнение имеет только два корня $x = -2$ и $x = 1$. Их сумма равна: $-2 + 1 = -1$.

Ответ: -1.

314. ОДЗ: $\begin{cases} 6x^2 + 3x - \dfrac{2}{3} > 0, \\ 9x^2 - 6x - 8 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+2)(6x-1) > 0, \\ (3x+2)(3x-4) \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{2}{3}, \\ x > \dfrac{1}{6}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\dfrac{2}{3}, \\ x \geqslant \dfrac{4}{3}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{2}{3}, \\ x \geqslant \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

1) $\sqrt{9x^2 - 6x - 8} = 0$; $x_1 = \dfrac{4}{3}$; $x_2 = -\dfrac{2}{3}$. Из чисел $\dfrac{4}{3}$ и $-\dfrac{2}{3}$ в область определения входит только $\dfrac{4}{3}$, следовательно, $x_1 = \dfrac{4}{3}$ — корень данного уравнения.

2) $\log_{0,7}\left(6x^2 + 3x - \dfrac{2}{3}\right) = 0$; $6x^2 + 3x - \dfrac{2}{3} = 1$; $6x^2 + 3x - \dfrac{5}{3} = 0$; $18x^2 + 9x - 5 = 0$; $x_2 = -\dfrac{5}{6}$, $x_3 = \dfrac{1}{3}$. Из чисел $-\dfrac{5}{6}$ и $\dfrac{1}{3}$ в область определения входит только $-\dfrac{5}{6}$, следовательно $x_2 = -\dfrac{5}{6}$ — корень данного уравнения. Сумма корней: $\dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

315. ОДЗ: $7x - 2x^2 - 5 > 0$. Из данного уравнения будем иметь:

1) $\begin{cases} 3x - 8 = 0, \\ 7x - 2x^2 - 5 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\dfrac{2}{3}, \\ 2x^2 - 7x + 5 < 0; \end{cases}$

решений нет.

2) $\log_5\left(7x - 2x^2 - 5\right) = 0$; $7x - 2x^2 - 5 = 1$; $2x^2 - 7x + 6 = 0$; $D = 49 - 48 = 1$; $x_{1,2} = \dfrac{7 \pm 1}{4}$; $x_1 = 2$, $x_2 = 1{,}5$.

Произведение корней: $2 \cdot 1{,}5 = 3$.

Ответ: 3.

316. Решим данное уравнение.
ОДЗ: $3x - 2x^2 > 0$; $x(1{,}5 - x) > 0$; $0 < x < 1{,}5$.

От уравнения перейдем к совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \cos\pi x = -\dfrac{1}{2}, \\ 3x - 2x^2 = 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{2}{3} + 2k, k \in Z, \\ x_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{4}. \end{array}\right.$$

Из последней совокупности и ОДЗ следует, что корнями исходного уравнения являются только числа $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}$. Их сумма равна $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+1+\frac{4}{3} = 3{,}5$.

Ответ: 3,5.

317. ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l} \sin 2\pi x \neq 0, \\ 3 - 2x - 5x^2 \geqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\pi x \neq \pi n, n \in Z, \\ 5x^2 + 2x - 3 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \dfrac{n}{2}, n \in Z, \\ (x+1)\left(x - \dfrac{3}{5}\right) \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \dfrac{n}{2}, n \in Z, \\ -1 \leqslant x \leqslant 0{,}6. \end{array}\right.$$

1) $\operatorname{ctg} 2\pi x = 0$; $2\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $k \in Z$; $x = \frac{1}{4} + \frac{k}{4}$, $k \in Z$. С учетом ОДЗ, корнями данного уравнения являются числа $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

2) $\sqrt[4]{3 - 2x - 5x^2} = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0{,}6$. С учетом ОДЗ, корнем данного уравнения является число 0,6. Сумма корней:
$-0{,}75 - 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}6 = -0{,}15$.

Ответ: $-0{,}15$.

318. ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l} \cos\pi x \neq 0, \\ 2 + 3x - 2x^2 \geqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \pi x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x^2 - 1{,}5x - 1 \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \dfrac{1}{2} + n, n \in Z, \\ (x-2)(x+0{,}5) \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \dfrac{1}{2} + n, n \in Z, \\ -0{,}5 \leqslant x \leqslant 2. \end{array}\right.$$

1) $\operatorname{tg}\pi x+1=0;\ x=-\dfrac{1}{4}+k,\, k\in Z.$

С учетом ОДЗ корнями данного уравнения являются числа $-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4},\ 1\dfrac{3}{4}.$

2)$\sqrt{2+3x-2x^2}=0;\, x=-0{,}5,\, x=2.$
С учетом ОДЗ корнем данного уравнения является число 2.

Сумма корней: $-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}+2+1\dfrac{3}{4}=4{,}25.$

Ответ: 4,25.

319. ОДЗ: $\begin{cases}\sin\dfrac{\pi x}{2}\neq 0,\\ 13x-x^2-40\geqslant 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi x}{2}\neq\pi n, n\in Z,\\ x^2-13x+40\leqslant 0;\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{2}\neq n, n\in Z,\\ (x-5)(x-8)\leqslant 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2n, n\in Z,\\ 5\leqslant x\leqslant 8.\end{cases}$

1) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}-1=0;\ \operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}=1;\ \dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z;\ x=\dfrac{1}{2}+2k, k\in Z.$
С учетом ОДЗ корнем данного уравнения является число 6,5.
2) $\sqrt{13x-x^2-40}=0;\ x_1=5,\, x_2=8.$ С учетом ОДЗ корнем данного уравнения является число 5. Сумма корней: $5+6{,}5=11{,}5.$

Ответ: 11,5.

320. ОДЗ: $4-x^2\geqslant 0;\ x^2\leqslant 4;\ -2\leqslant x\leqslant 2.$
1) $5^{2x-7}=5^2;\ 2x-7=2;\ x=4{,}5$ — не входит в ОДЗ.
2) $\sqrt{4-x^2}=0;\ x_1=2;\, x_2=-2.$ Оба числа входят в ОДЗ, значит являются корнями данного уравнения. Сумма корней: $2-2=0.$

Ответ: 0.

321. ОДЗ: $9-x^2\geqslant 0.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}7^{9-2x}-49=0,\\ 9-x^2\geqslant 0,\end{cases}\\ 9-x^2=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}9-2x=2,\\ -3\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}\\ x_1=3,\ x_2=-3;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3{,}5,\\ -3\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}\\ x_1=3,\ x_2=-3.\end{array}\right.$

Из последней совокупности следует, что данное уравнение имеет только два корня: $x_1=3,\, x_2=-3.$ Сумма корней: $3-3=0.$

Ответ: 0.

322. ОДЗ: $7x^2-62>0;\ x<-\sqrt{\dfrac{62}{7}},\ x>\sqrt{\dfrac{62}{7}}.$ От уравнения перейдем к совокупности

$\left[\begin{array}{l}x^2-7x+15=5,\\ 7x^2-62=1;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-7x+10=0,\\ x^2=9;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2,\ x_2=5,\\ x_3=-3, x_4=3.\end{array}\right.$

Из последней совокупности и ОДЗ следует, что корнями данного уравнения являются числа -3, 3, 5. Их сумма равна $-3+3+5=5$.

Ответ: 5.

323. ОДЗ: $\begin{cases} 9-x^2>0, \\ \cos x\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<3, \\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z; \end{cases}$

От уравнения перейдем к совокупности

$\left[\begin{array}{l} 9-x^2=1 \\ \operatorname{tg} x=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2\sqrt{2}, x_2=-2\sqrt{2} \\ x=\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$

Из последней совокупности и ОДЗ следует, что корнями данного уравнения являются числа $2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$, 0, следовательно, уравнение имеет 3 корня.

Ответ: 3.

324. ОДЗ: $x^2-2x-2>0$; $\big(x-(1-\sqrt{3})\big)\big(x-(1+\sqrt{3})\big)>0$; $x<1-\sqrt{3}$, $x>1+\sqrt{3}$.

1) $9^{3x}-\dfrac{108\cdot 3^{6x}}{27}+1=0$; $3^{6x}-4\cdot 3^{6x}+1=0$; $3\cdot 3^{6x}=1$; $3^{6x}=\dfrac{1}{3}$;

$6x=-1$; $x=-\dfrac{1}{6}$ — не входит в ОДЗ.

2) $x^2-2x-2=1$; $x^2-2x-3=0$; $x_1=-1$, $x_2=3$. Оба числа входят в ОДЗ, значит являются корнями данного уравнения. Сумма корней $-1+3=2$.

Ответ: 2.

325. ОДЗ: $\begin{cases} 9-x^2\geqslant 0, \\ \cos x\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\leqslant x\leqslant 3, \\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z. \end{cases}$

1) $\sqrt{9-x^2}=0$; $x_1=3$, $x_2=-3$. Оба числа входят в ОДЗ, значит являются корнями данного уравнения, но целыми.

2) $\operatorname{tg} x=0$; $x=\pi n$, $n\in Z$. Только число 0 входит в ОДЗ, значит $x=0$ — корень данного уравнения, но целый. Уравнение не содержит нецелых корней.

Ответ: 0.

326. ОДЗ: $\begin{cases} 4-x^2\geqslant 0, \\ \sin x\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leqslant x\leqslant 2, \\ x\neq \pi n, n\in Z. \end{cases}$

а) $\sqrt{4-x^2}=0$; $x_1=2$, $x_2=-2$. Оба числа входят в ОДЗ, но они целые.

б) $\operatorname{ctg} x=0$; $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$. С учетом ОДЗ имеем $x_1=-\dfrac{\pi}{2}, x_2=\dfrac{\pi}{2}$ —

корни данного уравнения. Уравнение имеет 2 нецелых корня.

Ответ: 2.

327. ОДЗ: $\begin{cases} -1 \leqslant x^2 - 4 \leqslant 1, \\ 9 - x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leqslant x^2 \leqslant 5, \\ -3 < x < 3. \end{cases}$

1) $\arcsin\left(x^2 - 4\right) = 0;\ x^2 - 4 = 0;\ x_1 = 2, x_2 = -2$. Оба числа входят в ОДЗ, а значит $x_1 = 2, x_2 = -2$ — корни данного уравнения.

2) $\ln\left(9 - x^2\right) = 0;\ 9 - x^2 = 1;\ x_3 = 2\sqrt{2}, x_4 = -2\sqrt{2}$. Оба числа не входят в ОДЗ. Произведение корней: $-2 \cdot 2 = -4$.

Ответ: -4.

328. ОДЗ: $49 - 4x^2 > 0;\ -\dfrac{7}{2} < x < \dfrac{7}{2}$.

1) $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = 0;\ \cos x \sin x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0;$

$\dfrac{1}{2}\sin 2x \cos 2x = 0;\ \sin 4x = 0;\ 4x = \pi k, k \in Z;\ x = \dfrac{\pi k}{4}, k \in Z$. С учетом ОДЗ имеем корни данного уравнения: $x_1 = -\pi$, $x_2 = -\dfrac{3\pi}{4}$, $x_3 = -\dfrac{\pi}{2}$, $x_4 = -\dfrac{\pi}{4}, x_5 = 0, x_6 = \dfrac{\pi}{4}, x_7 = \dfrac{\pi}{2}, x_8 = \dfrac{3\pi}{4}, x_9 = \pi$.

2) $\log_2\left(49 - 4x^2\right) = 0;\ 49 - 4x^2 = 1;\ 4x^2 = 48;\ x^2 = 12;\ x_{10} = -2\sqrt{3}$, $x_{11} = 2\sqrt{3}$. Оба числа входят в ОДЗ, а значит являются корнями данного уравнения. Исходное уравнение имеет 11 корней.

Ответ: 11.

329. ОДЗ: $9 - 5x - 4x^2 \geqslant 0;\ 4x^2 + 5x - 9 \leqslant 0;\ (x - 1)(4x + 9) \leqslant 0;$ $-\dfrac{9}{4} \leqslant x \leqslant 1$.

1) $2\cos x - 1 = 0;\ \cos x = \dfrac{1}{2};\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. С учетом ОДЗ имеем $x_1 = -\dfrac{\pi}{3}$ — корень данного уравнения.

2) $\sqrt{9 - 5x - 4x^2} = 0;\ x_2 = -\dfrac{9}{4}, x_3 = 1$ входят в ОДЗ, значит являются корнями данного уравнения. Исходное уравнение имеет 3 корня.

Ответ: 3.

330. ОДЗ: $18 + x - 4x^2 > 0;$

1) $\begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = 0, \\ 18 + x - 4x^2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ 4x^2 - x - 18 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ (4x-9)(x+2) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ -2 < x < \dfrac{9}{4}; \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{\pi}{4}.$$

2) $\log_7\left(18 + x - 4x^2\right) = 0$; $18 + x - 4x^2 = 1$; $4x^2 - x - 17 = 0$; $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+272}}{8}$; $x_3 = \dfrac{1-\sqrt{273}}{8}$, $x_4 = \dfrac{1+\sqrt{273}}{8}$. Данное уравнение имеет 4 корня.

Ответ: 4.

331. 1) $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0, \\ 10x - x^2 - 21 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 1, \\ x^2 - 10x + 21 \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ 3 \leqslant x \leqslant 7; \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{5\pi}{4}, x_2 = \frac{7\pi}{4}.$$

2) $\begin{cases} 10x - x^2 - 21 = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 3, x_4 = 7, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \end{cases} \Rightarrow x_3 = 3$, $x_4 = 7$. Данное уравнение имеет 4 корня.

Ответ: 4.

332. 1) $\begin{cases} 3 - \operatorname{ctg}^2 x = 0, \\ -8 - 17x - 2x^2 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} x = \pm\sqrt{3}, \\ 2x^2 + 17x + 8 \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \end{array}\right. \\ (2x+1)(x+8) \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \end{array}\right. \\ -8 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решением системы являются значения:

$x_1 = -\dfrac{13\pi}{6}$, $x_2 = -\dfrac{11\pi}{6}$, $x_3 = -\dfrac{7\pi}{6}$, $x_4 = -\dfrac{5\pi}{6}$, $x_5 = -\dfrac{\pi}{6}$.

2) $\begin{cases} \sqrt{-8 - 17x - 2x^2} = 0, \\ \sin x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_6 = -\dfrac{1}{2}, x_7 = -8, \\ x \neq \pi n, n \in Z; \end{cases} \Rightarrow x_6 = -\dfrac{1}{2}$, $x_7 = -8$. Данное уравнение имеет 7 корней.

Ответ: 7.

333. 1) Оценим левую часть уравнения. Имеем, $0 < \cos^2 4\pi x \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{2}{\cos^2 4\pi x} \geqslant 2$.

2) Оценим правую часть уравнения. Получаем, $4-(4x-1)^2 \leqslant 4 \Rightarrow \log_2(4-(4x-1)^2) \leqslant 2$.

3) Таким образом, если x_0 является корнем данного уравнения, то левая и правая части в этой точке равны 2. Имеем, $\log_2(4-(4x-1)^2)=2 \Leftrightarrow 4-(4x-1)^2=4 \Leftrightarrow x=0{,}25$. Проверкой убеждаемся, что при $x=0{,}25$ левая часть также равна 2. Следовательно, $x=0{,}25$ корень исходного уравнения.

Ответ: 0,25.

334. 1) Оценим левую часть уравнения. Имеем, $\dfrac{3}{\cos^2 5\pi x} \geqslant 3$.

2) Оценим правую часть уравнения. Получаем, $27-(5x+1)^2 \leqslant 27 \Rightarrow \log_3(27-(5x+1)^2) \leqslant 3$.

3) Таким образом, если x_0 является корнем данного уравнения, то левая и правая части в этой точке равны 3. Имеем, $\log_3(27-(5x+1)^2)=3 \Leftrightarrow 27-(5x+1)^2=27 \Leftrightarrow x=-0{,}2$. Проверкой убеждаемся, что при $x=-0{,}2$ левая часть также равна 3. Следовательно, $x=-0{,}2$ корень исходного уравнения.

Ответ: $-0{,}2$.

335. 1) Оценим левую часть уравнения. Имеем, $\dfrac{3}{\sin^2 6\pi x} \geqslant 3$.

2) Оценим правую часть уравнения. Получаем, $(4x-5)^2+0{,}125 \geqslant 0{,}125 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}((4x-5)^2+0{,}125) \leqslant 3$.

3) Таким образом, если x_0 является корнем данного уравнения, то левая и правая части в этой точке равны 3. Имеем, $\log_{\frac{1}{2}}((4x-5)^2+0{,}125)=3 \Leftrightarrow (4x-5)^2=0 \Leftrightarrow x=1{,}25$. Проверкой убеждаемся, что при $x=1{,}25$ левая часть также равна 3. Следовательно, $x=1{,}25$ корень исходного уравнения.

Ответ: 1,25.

336. 1) $(\sqrt{3}-\cos 20\pi x)\cdot(\sqrt{3}+\cos 20\pi x)=3-\cos^2 20\pi x \leqslant 3$;
$3^{3-\cos^2 20\pi x} \leqslant 27$; $27+(40x-3)^2 \geqslant 27$.

2) Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} (40x-3)^2=0, \\ \cos^2 20\pi x=0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственный корень $x=\dfrac{3}{40}=0{,}075$, проверкой убеждаемся, что $x = \dfrac{3}{40}$ удовлетворяет второму уравнению.

Ответ: 0,075.

337. Умножив обе части уравнения на $\sqrt{10-3x}$, представим его в виде: $\log_3(5x-6) = 2 \cdot \sqrt{10-3x}$. Левая часть последнего уравнения является строго возрастающей функцией аргумента x, а правая часть — строго убывающей, поэтому равенство может достигаться лишь в одной точке. Подбором легко найти, что $x = 3$ удовлетворяет данному равенству.

Ответ: 3.

338. Левая и правая части уравнения являются чётными функциями, поэтому, если x_0 — корень уравнения, то и $-x_0$ — его корень. Значит, достаточно найти лишь положительные корни уравнения ($x = 0$ не является корнем, так как не входит в ОДЗ). На интервале $(0; +\infty)$ левая часть уравнения является монотонно возрастающей, а правая часть — монотонно убывающей функцией. Следовательно, данное уравнение может иметь лишь один положительный корень. Подбором находим, что $x = 4$ является его корнем, и, значит, $x = -4$ также его корень. Таким образом, произведение всех корней уравнения равно $4 \cdot (-4) = -16$.

Ответ: -16.

339. Левая часть уравнения не меньше единицы, а правая не больше единицы. Поэтому равенство возможно, только если правая и левая части уравнения равны единице. Решая уравнение $2^{\sqrt{x-3}} = 1$, имеем $\sqrt{x-3} = 0$, то есть $x = 3$. Подставляя в исходное уравнение, убеждаемся, что $x = 3$ является корнем.

Ответ: 3.

340. В левой части уравнения стоит нечётная функция. У нечётной функции каждому корню $x_1 = a$ соответствует корень $x_2 = -a$, таким образом все корни, кроме, быть может, нулевого, разбиваются на пары корней, дающих в сумме ноль. Поэтому сумма всех корней равна нулю.

Ответ: 0.

341. В левой части уравнения стоит нечётная функция. У нечётной функции каждому корню $x_1 = a$ соответствует корень $x_2 = -a$, таким образом все корни, кроме, быть может, нулевого, разбиваются на пары корней, дающих в сумме ноль. Поэтому сумма всех корней равна нулю.

Ответ: 0.

342. $3^{2x+1}x - 3 \cdot 9^{x+1} = 0;\ 3^{2x+1}x - 3^{2x+3} = 0;\ 3^{2x+1}(x-9) = 0$, то есть $x = 9$.

Ответ: 9.

343. Левая часть уравнения не больше единицы, потому, что аргумент тангенса принимает значения $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right]$. Правая часть уравнения равна $1+(x+7)^2$, она не меньше единицы. Поэтому равенство возможно, только если правая и левая части уравнения равны единице. Решая уравнение $1+(x+7)^2 = 1$, находим $x = -7$. Подставляя в исходное уравнение, убеждаемся, что корень не посторонний.

Ответ: -7.

344. Функция f чётна. Пусть у нашего уравнения есть корень $x_1 = a$, то есть $f(\log_2 a) = 0$, тогда $f\left(\log_2 \dfrac{1}{a}\right) = f(-\log_2 a) = f(\log_2 a) = 0$, это значит, что $\dfrac{1}{a}$ — тоже корень нашего уравнения. Таким образом, все корни, кроме, быть может, $x = 1$, разбиваются на пары корней, дающих в произведении 1. Тогда произведение всех корней равно единице.

Ответ: 1.

345. $3^x + 2^{x \log_2 3} \cdot x = 0$; $3^x + 3^x \cdot x = 0$; $3^x(x+1) = 0$, то есть, $x = -1$.

Ответ: -1.

346. Левая часть уравнения не больше единицы, а правая часть равна $1 + (x+1)^2$, она не меньше единицы. Поэтому равенство возможно, только если правая и левая части уравнения равны единице. Решая уравнение $1 + (x+1)^2 = 1$, находим $x = -1$. Подставляя в исходное уравнение, убеждаемся, что корень не посторонний.

Ответ: -1.

347. 1) Воспользуемся формулой двойного аргумента косинуса и преобразуем заданное уравнение к виду: $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{\cos(12\pi x)-1} = -4x^2 + 12x - 8$.

$-1 \leqslant \cos(12\pi x) \leqslant 1$; $-2 \leqslant \cos(12\pi x) - 1 \leqslant 0$. Поскольку график функции вида $y = a^x$, при $0 < a < 1$, убывает на R, то

$\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-2} \geqslant \left(\dfrac{1}{10}\right)^{\cos(12\pi x)-1} \geqslant \left(\dfrac{1}{10}\right)^{0}$.

2) Получаем $1 \leqslant -4x^2 + 12x - 8 \leqslant 100$.

График функции $y = -4x^2 + 12x - 8$ — парабола с вершиной в точке $x_0 = 1{,}5$, $y(x_0) = 1$. Поскольку у рассматриваемой параболы ветви направлены вниз, то найденная вершина является ее точкой максимума. Причем, значение функции в этой точке совпадает с наименьшим из возможных значений последнего неравенства. Следовательно, это неравенство имеет единственное решение $x = 1{,}5$, которое является решением заданного уравнения.

3) *Проверка:* Подставляя $x = 1{,}5$ в исходное уравнение, убеждаемся, что это значение является корнем заданного уравнения.

Ответ: 1,5.

348. 1) $0 \leqslant \sin^2(10\pi x) \leqslant 1$; $-1 \leqslant -\sin^2(10\pi x) \leqslant 0$. Поскольку график функции вида $y = a^x$, при $a > 1$ возрастает, то $5^{-1} \leqslant 5^{-\sin^2(10\pi x)} \leqslant 1$.

2) Для правой части заданного уравнения должно выполняться: $\dfrac{1}{5} \leqslant 4x^2 - 12x + 10 \leqslant 1$. Рассмотрим функцию $y = 4x^2 - 12x + 10$. График этой функции есть парабола с вершиной в точке $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = 1{,}5$, $y(x_0) = 1$. Поскольку у рассматриваемой параболы ветви направлены вверх, то найденная вершина является ее точкой минимума. Причем, значение функции в этой точке совпадает с наибольшим из возможных значений последнего неравенства. Следовательно, это неравенство имеет единственное решение $x = 1{,}5$, которое является решением заданного уравнения.

3) *Проверка:* Подставляя $x = 1{,}5$ в исходное уравнение, убеждаемся, что это значение является корнем заданного уравнения.

Ответ: 1,5.

349. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 6 - 5\log_5 x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leqslant 6$. Далее, $x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Учитывая ОДЗ, получим, что $x = 2$.

Ответ: 2.

350. Замена $4^{2x} = t$, $0 < t \leqslant 8{,}5$ приводит уравнение к виду
$\left(3 - \dfrac{1}{4}t\right)^2 = 17 - 2t$; $9 - \dfrac{3}{2}t + \dfrac{1}{16}t^2 + 2t - 17 = 0$; $t^2 + 8t - 128 = 0$; $t_1 = 8$, $t_2 = -16$ — не удовлетворяет условию $t \in (0; 8{,}5]$. Итак, $4^{2x} = 8$; $2^{4x} = 2^3$; $x = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

351. Сделаем замену $t = 2^{2x-2}$, $t > 0$. Тогда $2^{2x} = 4t$. Получим уравнение: $3 - t = \sqrt{9 - 4t}$. Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем $9 - 6t + t^2 = 9 - 4t$; $t^2 - 2t = 0$; $t_1 = 0$, $t_2 = 2$. Так как $t > 0$, то $t = 2$. Отсюда $2^{2x-2} = 2$; $2x - 2 = 1$; $2x = 3$; $x = 1{,}5$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1{,}5$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 1,5.

352. Сделаем замену $t = 5^{2x-1}$, $t > 0$. В результате получим уравнение $1 + t = \sqrt{9 - 5t}$. Возведя обе части уравнения в квадрат, имеем $1 + 2t + t^2 = 9 - 5t$; $t^2 + 7t - 8 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = -8$. Так как $t > 0$, то $t = 1$. Отсюда $5^{2x-1} = 1$; $2x - 1 = 0$; $x = 0{,}5$. Проверкой убеждаемся, что $x = 0{,}5$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 0,5.

353. ОДЗ: $x > 2$. Решая уравнение $x(x^2 - 4)\log_3(x-2) = 0$, получим, что $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. С учетом ОДЗ корнем исходного уравнения является $x = 3$.

Ответ: 3.

354. $9^x + 50 = 5 + 14 \cdot 3^x$. Пусть $3^x = t$, тогда $t^2 - 14t + 45 = 0$; $t_{1,2} = 7 \pm 2$; $x_1 = 2$, $x_2 = \log_3 5$; $x_1 > x_2$.

Ответ: 2.

355. Решая уравнение $5^{4|x|}(5^{3x+7-4|x|} - 1) = 0$, получим, что $x_1 = -1$, $x_2 = 7$. Наибольший из корней равен 7.

Ответ: 7..

356. Так как $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$, то система примет вид: $\begin{cases} y = |x-4|, \\ y = |x+3|. \end{cases}$ Откуда $|x-4| = |x+3|$. Возведем обе части последнего равенства в квадрат: $x^2 - 8x + 16 = x^2 + 6x + 9$. Отсюда $x = \dfrac{1}{2}$, $y = \left|\dfrac{1}{2} + 3\right| = \dfrac{7}{2}$. Решение системы $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{7}{2}\right)$. А искомое выражение $x_0 + y_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2} = 4$.

Ответ: 4.

357. $\begin{cases} \sqrt{4x^2 - 4x + 1} - y = 0, \\ y - |2x+3| = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1| = y, \\ y = |2x+3|; \end{cases} \quad |2x-1| = |2x+3|;$

$x = -\dfrac{1}{2}$, $y = 2$; $x - y = -\dfrac{1}{2} - 2 = -2{,}5$.

Ответ: $-2{,}5$.

361. $x + 3\sqrt{x + 4,96} = |x|$. При $x \geqslant 0$ уравнение принимает вид: $3\sqrt{x + 4,96} = 0$. Его единственный корень $x = -4,96$ не удовлетворяет условию $x \geqslant 0$. При $x < 0$: $3\sqrt{x + 4,96} = -2x$; $9(x + 4,96) = 4x^2$; $4x^2 - 9x - 44,64 = 0$; $x_1 = -2,4$, $x_2 = 4,65$. Только x_1 удовлетворяет условию $x < 0$.

Проверкой убеждаемся, что $x = -2,4$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $-2,4$.

362. $\begin{cases} y = 3^x, \\ x + y = 11; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3^x, \\ y = 11 - x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 - x = 3^x, \\ y = 11 - x; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 9. \end{cases}$

Найдём $2x_0 + y_0$; $2 \cdot 2 + 9 = 13$.

Ответ: 13.

363. $\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \\ y = x + 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \\ y = x + 6. \end{cases}$

Функция $y = x + 6$ возрастает, функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывает, тогда если уравнение $x + 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ имеет корень, то он единственный. Подбором находим $x = -2$, $y = -2 + 6 = 4$.

Найдём $3x_0 + y_0$; $3 \cdot (-2) + 4 = -2$.

Ответ: -2.

364. $7^{2x} - 49 \cdot 7^x - 50 \leqslant 0$. Замена: $7^x = t$, $t > 0$. $t^2 - 49t - 50 \leqslant 0$, $(t + 1)(t - 50) \leqslant 0$. Так как $t > 0$, то $t + 1 > 0$, тогда $t - 50 \leqslant 0$, $t \leqslant 50$. Вернемся к замене $7^x \leqslant 50$, $7^2 = 49 < 50$. Наибольшее целое решение $x = 2$.

Ответ: 2.

365. $2^{2x} - 18 \cdot 2^x + 32 < 0$. Замена: $2^x = t$, $t > 0$. $t^2 - 18t + 32 < 0$, $(t-16)(t-2) < 0, 2 < t < 16$. Вернемся к замене $2 < 2^x < 16, 2 < 2^x < 2^4$. Так как показательная функция $y = 2^t$ возрастающая, то $1 < x < 4$. Наибольшее целое решение 3, наименьшее целое 2. Их произведение: $2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6.

366. $3^{2x} - \frac{3^x}{3} - 27 \cdot 3^x + 9 < 0, 3 \cdot 3^{2x} - 82 \cdot 3^x + 27 < 0$. Замена: $3^x = t$, $t > 0$. $3t^2 - 82t + 27 < 0$. $3t^2 - 82t + 27 = 0$, $t_{1,2} = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 81}}{3}$, $t_{1,2} = \frac{41 \pm 40}{3}$, $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{2}{7}$, $3t^2 - 82t + 27 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)(t - 27)$. $\left(t - \frac{1}{3}\right)(t - 27) < 0$, $\frac{1}{3} < t < 27$. Вернемся к замене $\frac{1}{3} < 3^x < 27$, $3^{-1} < 3^x < 3^3$. Показательная функция $y = 3^t$ возрастает, значит, $-1 < x < 3$. Наибольшее целое решение 2, наименьшее целое 0. Их произведение: $2 \cdot 0 = 0$.

Ответ: 0.

367. Используя свойства степеней, находим, что $8^{\frac{1}{2}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{2}} =$

$= 2^{\frac{3}{2}}$, а $4^{\frac{5}{6}} = \left(2^2\right)^{\frac{5}{6}} = 2^{2\cdot\frac{5}{6}} = 2^{\frac{5}{3}}$. Так как $\frac{5}{3} > \frac{3}{2}$, то $2^{\frac{5}{3}} > 2^{\frac{3}{2}}$, а потому $8^{\frac{1}{2}} < 4^{\frac{5}{6}}$. Из неравенства $4 < 8 < 9$ следует, что $2 = 4^{\frac{1}{2}} < 8^{\frac{1}{2}} < 9^{\frac{1}{2}} = 3$. Поэтому целая часть числа $8^{\frac{1}{2}}$ равна 2.

Ответ: 2.

368. Используя свойства степеней, находим, что $27^{\frac{5}{12}} = \left(3^3\right)^{\frac{5}{12}} == 3^{3\cdot\frac{5}{12}} = 3^{\frac{5}{4}}$, а $81^{\frac{1}{3}} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{4\cdot\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{3}}$. Так как $\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$, то $3^{\frac{4}{3}} > 3^{\frac{5}{4}}$, а потому $81^{\frac{1}{3}} > 27^{\frac{5}{12}}$. Из неравенства $64 < 81 < 125$ следует, что $4 = 64^{\frac{1}{3}} < 81^{\frac{1}{3}} < 125^{\frac{1}{3}} = 5$. Поэтому целая часть числа $81^{\frac{1}{3}}$ равна 4.

Ответ: 4.

369. Решением неравенства $x^2 + 17x - 3 \leqslant 0$ является отрезок $\left[\frac{-17-\sqrt{301}}{2}; \frac{-17+\sqrt{301}}{2}\right]$. Так как $17^2 < 301 < 18^2$, $17 < \sqrt{301} < 18$, $\frac{-17+17}{2} < \frac{-17+\sqrt{301}}{2} < \frac{-17+18}{2}$, $0 < \frac{-17+\sqrt{301}}{2} < 0{,}5$, то $\frac{-17+\sqrt{301}}{2} \in (0; 1)$.

Аналогично можно показать, что $\frac{-17-\sqrt{301}}{2} \in (-18; -17)$.

Таким образом, множество решений неравенства содержит целые числа $-17,\ -16, \ldots, -1,\ 0$, то есть 18 целых чисел.

Ответ: 18.

370. $$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 \leqslant 1, \\ \frac{1}{3}x + 4 \geqslant \frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x \leqslant -2, \\ \frac{1}{3}x \geqslant -3\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -4, \\ \frac{1}{3}x \geqslant -\frac{7}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -4, \\ x \geqslant -\frac{21}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow -10{,}5 \leqslant x \leqslant -4.$$

Решением данной системы является промежуток $[-10{,}5; -4]$ содержащий 7 целых значений: $-10;\ -9,\ \ldots\ -5,\ -4$.

Ответ: 7.

371. $\begin{cases} \dfrac{x+4}{2} < 3, \\ \dfrac{1-x}{3} \leqslant 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 < 6, \\ 1-x \leqslant 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant -5; \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leqslant x < 2.$

Решением данной системы является промежуток $[-5; 2)$, содержащий 7 целых значений: $-5;\ -4,\ \ldots\ 0,\ 1$.

Ответ: 7.

372. Из условия следует $\begin{cases} \dfrac{x-5}{x+1} \leqslant 0, \\ \log_{0,2}\left(1+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi x}{3}\right)\right) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 5], \\ \log_{0,2}\left(2+\cos^2\left(\pi+\dfrac{2}{3}\pi x\right)\right) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 5), \\ 2+\cos\left(\pi+\dfrac{2}{3}\pi x\right) > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 5), \\ \cos\dfrac{2}{3}\pi x < 1, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 5], \\ \dfrac{2}{3}\pi x \neq 2\pi k, \text{ т.е. } x \neq 3k,\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; 5], \\ x \neq 0,\ x \neq 1. \end{cases}$

Таким образом, целочисленные решения неравенства: $2;\ 3;\ 4;\ 5$.

Ответ: 4.

373. ОДЗ: $\begin{cases} 3x+2 \geqslant 0, \\ x-3 > 0; \end{cases} \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{2}{3}, \\ x > 3; \end{cases} x > 3.$

Решим неравенство: $\sqrt{3x+2}\cdot\sqrt{x-3} \geqslant x-1$; $(3x+2)(x-3) \geqslant (x-1)^2$; $3x^2-7x-6 \geqslant x^2-2x+1$; $2x^2-5x-7 \geqslant 0$; $x \in (-\infty; -0{,}5] \cup [3{,}5; +\infty)$. Учитывая ОДЗ получим ответ $x \in [3{,}5; +\infty)$.

Ответ: $[3{,}5; +\infty)$.

375. $\begin{cases} 2^x > 8, \\ 3x \leqslant 15; \end{cases} \begin{cases} 2^x > 2^3, \\ x \leqslant 5; \end{cases} \begin{cases} x > 3, \\ x \leqslant 5; \end{cases} 3 < x \leqslant 5.$

Решением данной системы является промежуток $(3; 5]$, содержащий два целых решения 4 и 5.

Ответ: 2.

376. $\begin{cases} 3^x \leqslant 9, \\ 4x > -1; \end{cases} \begin{cases} 3^x \leqslant 3^2, \\ x > -\dfrac{1}{4}; \end{cases} \begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > -0{,}25; \end{cases} -0{,}25 < x \leqslant 2.$

Решением данной системы является промежуток $(-0{,}25; 2]$, содержащий

3 целых решения: 0, 1, 2.

Ответ: 3.

377. Найдём множество чисел, на котором функции совпадают, решив систему $\begin{cases} 2x^2-8x+9-|x-2|>0, \\ 2x^2-8x+9-|x-2|\neq 1, \\ x>0. \end{cases}$

Рассмотрим два возможных случая.

1) $\begin{cases} 0<x\leqslant 2, \\ 2x^2-8x+9+x-2>0, \\ 2x^2-8x+9+x-2\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 0<x\leqslant 2, \\ 2x^2-7x+7>0, \\ 2x^2-7x+6\neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 0<x\leqslant 2, \\ x \text{ — любое действительное число,} \\ (2x-3)(x-2)\neq 0; \end{cases} \Rightarrow 0<x<1{,}5,\ 1{,}5<x<2.$

2) $\begin{cases} x>2, \\ 2x^2-8x+9-x+2>0, \\ 2x^2-8x+9-x+2\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x>2, \\ 2x^2-9x+11>0, \\ 2x^2-9x+10\neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x>2, \\ x\text{— любое действительное число,} \\ (2x-5)(x-2)\neq 0; \end{cases} \Rightarrow 2<x<2{,}5,\ x>2{,}5.$

Данные функции совпадают на множестве $(0;1{,}5)\cup(1{,}5;2)\cup(2;2{,}5)\cup(2{,}5;+\infty)$. Найдём натуральные и положительные полуцелые числа, на которых функции не совпадают: 1,5, 2, 2,5. Их сумма $1{,}5+2+2{,}5=6$.

Ответ: 6.

380. Так как функция $y=t^{\frac{1}{4}}$ определена при всех $t\geqslant 0$, то найдем область определения данной функции на промежутке $(-6;0)$ решив систему неравенств

$\begin{cases} -6<x<0, \\ |3-x|+x\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -6<x<0, \\ 3-x+x\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -6<x<0, \\ 0\cdot x\geqslant -3; \end{cases} \Rightarrow -6<x<0.$

На заданном промежутке область определения данной функции $(-6;0)$ содержит 5 целых чисел.

Ответ: 5.

381. Областью определения данной функции является множество решений неравенства $\log_{0,4}|0{,}2x-1|-1\geqslant 0$, $\log_{0,4}|0{,}2x-1|\geqslant 1$,

$\log_{0,4}|0{,}2x-1|\geqslant \log_{0,4}0{,}4$, $\begin{cases} |0{,}2x-1|\leqslant 0{,}4, \\ 0{,}2x-1\neq 0; \end{cases}$

так как функция $y=\log_{0,4}t$, $t>0$, $0<0{,}4<1$ убывающая.

$\begin{cases} -0{,}4 \leqslant 0{,}2x - 1 \leqslant 0{,}4, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}6 \leqslant 0{,}2x \leqslant 1{,}4, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 3 \leqslant x \leqslant 7, \\ x \neq 5; \end{cases}$
$\Rightarrow 3 \leqslant x < 5,\ 5 < x \leqslant 7$. Область определения данной функции $[3; 5) \cup (5; 7]$ содержит 4 целых числа.

Ответ: 4.

382. Областью определения данной функции является множество решений неравенства $\dfrac{2x+5}{|x+1|} - 1 > 0,\ \dfrac{2x+5-|x+1|}{|x+1|} > 0,\ |x+1| > 0$, при всех $x \neq -1$, значит, неравенство равносильно неравенству
$2x + 5 - |x+1| > 0,\ x \neq -1$.

1) $\begin{cases} x < -1, \\ 2x+5+x+1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1, \\ 3x > -6; \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1, \\ x > -2; \end{cases}$ $-2 < x < -1$.

2) $\begin{cases} x > -1, \\ 2x+5-x-1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1, \\ x > -4; \end{cases}$ $x > -1$.

Область определения данной функции $(-2; -1) \cup (-1; +\infty)$. Наименьшее целое число 0.

Ответ: 0.

383. $y = \sqrt{16 - 13 \cdot 3^{-|x|}}$. Найдём $E(y)$ и выберем наименьшее целое значение. $|x| \geqslant 0,\ -|x| \leqslant 0,\ 0 < 3^{-|x|} \leqslant 3^0,\ -13 \leqslant -13 \cdot 3^{-|x|} < 0$, $3 \leqslant 16 - 13 \cdot 3^{-|x|} < 16,\ \sqrt{3} \leqslant \sqrt{16 - 13 \cdot 3^{-|x|}} < 4$.
$E(y) = \left[\sqrt{3}; 4\right)$, наименьшее целое 2.

Ответ: 2.

384. $y = \dfrac{15}{2}\sqrt{7\cos 2x - 12\cos^2 x + 23}$. Найдём $E(y)$ и посчитаем количество целых значений.
$7\cos 2x - 12\cos^2 x + 23 = 7(2\cos^2 x - 1) - 12\cos^2 x + 23 = 2\cos^2 x + 16$;
$0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, $0 \leqslant 2\cos^2 x \leqslant 2$, $16 \leqslant 2\cos^2 x + 16 \leqslant 18$,
$4 \leqslant \sqrt{7\cos 2x - 12\cos^2 x + 23} \leqslant \sqrt{18}$,
$30 \leqslant \dfrac{15}{2}\sqrt{7\cos 2x - 12\cos^2 x + 23} \leqslant \dfrac{15\sqrt{18}}{2} \approx 31{,}8$. Целые значения в этом промежутке: 30, 31. Всего 2.

Ответ: 2.

385. $y = \dfrac{17}{3}\sqrt{49\sin^2 2x + 16}$. Найдём $E(y)$ и посчитаем количество целых значений $49\sin^2 2x + 16$. $0 \leqslant \sin^2 2x \leqslant 1$, $0 \leqslant 49\sin^2 2x \leqslant 49$, $16 \leqslant 49\sin^2 2x + 16 \leqslant 65$, $4 \leqslant \sqrt{49\sin^2 2x + 16} \leqslant \sqrt{65}$,
$\dfrac{17 \cdot 4}{3} \leqslant \dfrac{17}{3}\sqrt{49\sin^2 2x + 16} \leqslant \dfrac{17\sqrt{65}}{3}$, $\dfrac{17 \cdot 4}{3} = 22\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{17\sqrt{65}}{3} \approx 45, \ldots$

Целые 23, 24, ..., 45. Всего 23.

Ответ: 23.

386. $y = \log_{\sqrt{5}}(-x^2 - 10x)$.

Так как $\sqrt{5} > 1$, то $y = \log_{\sqrt{5}} t$ монотонно возрастающая, значит ее наибольшее значение при $t = -x^2 - 10x$ наибольшем. t наибольшее при $x = x_0$, $x_0 = -\dfrac{10}{2} = -5$. $y_{\text{наиб.}} = \log_{\sqrt{5}}(-25 + 50) =$

$= \log_{\sqrt{5}} 25 = 4\log_5 5 = 4$.

387. $y = \dfrac{10}{x^2 - 8x + 21}$. Функция представляет собой дробь, в числителе которой положительное число, а в знаменателе квадратный трёхчлен, принимающий положительные значения (первый коэффициент больше нуля, дискриминант отрицательный). Тогда меньшему значению
знаменателя соответствует большее значение функции. $x^2 - 8x + 21$ принимает наименьшее значение при $x = \dfrac{8}{2} = 4$.

$y_{\text{наиб.}} = y(4) = \dfrac{10}{16 - 32 + 21} = \dfrac{10}{5} = 2$.

Ответ: 2.

389. $y = \dfrac{17}{5 - 2^{-|x|}}$. Найдём $E(y)$ и выберем наименьшее целое: $|x| \geqslant 0$, $-|x| \leqslant 0$, $0 < 2^{-|x|} \leqslant 2^0$, $-1 \leqslant -2^{-|x|} < 0$, $4 \leqslant 5 - 2^{-|x|} < 5$, $\dfrac{17}{5} < \dfrac{17}{5 - 2^{-|x|}} \leqslant \dfrac{17}{4}$.

$y_{\text{наим. целое}} = 4$.

Ответ: 4.

390. $y = \log_3(3+24x-6x^2)$ задана на $[-\sqrt{3}+2; 4]$. Найдём $E(y)$. $y = \log_3 t$ монотонно возрастает и принимает наибольшее значение при t наибольшем. $t = 3 + 24x - 6x^2$, то есть при $x = \dfrac{-24}{-12} = 2$.

$y_{\text{наиб.}} = y(2) = \log_3(3 + 48 - 24) = \log_3 27 = 3$. А наименьшее
$\min\{y(2 - \sqrt{3}); y(4)\} = \min\{2; 1\} = 1$. Следовательно $E(y) = [1; 3]$. Длина отрезка, который является областью значений для данной функции на $[-\sqrt{3} + 2; 4]$, равна 2.

Ответ: 2.

391. $y = 2 \cdot 3^{x+1} - 9^x - 8$ на $[0; 3]$. Обозначим $3^x = t$, $t \in [1; 27]$. $y = -t^2 + 6t - 8$. y наибольшее при $t = \dfrac{6}{2} = 3$. $y(3) = -9 + 18 - 8 = 1$,

$y(1) = -1 + 6 - 8 = -2,\ y(27) = -27^2 + 6 \cdot 27 - 8 = -575,$
$E(y) = [-575; 1]$. Длина отрезка 576.
Ответ: 576.

392. Запишем данную функцию в виде $y = \log_{\frac{1}{3}}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)\right)$. Так как $0 < \frac{1}{3} < 1$, то функция $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ монотонно убывающая. $y_{\text{наим}}$ при t наибольшем. $t = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$. Функция $t(k) = \operatorname{tg} k$, $k \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ монотонно возрастающая. $t_{\text{наиб}}$ при k наибольшем. $k = \frac{\pi}{3} - x^2$ принимает наибольшее значение при $x = 0$, $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$y_{\text{наим}} = y(0) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

393. Так как $0 < \frac{1}{3} < 1$, то функция $y = \log_{\frac{1}{3}} t$, $t > 0$ монотонно убывающая. $y_{\text{наиб}}$ при t наименьшем. $t = 2x^2 - 4x + 3$ принимает наименьшее значение при $x = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1$, $1 \in [-1; 2]$.
$y_{\text{наиб}} = y(1) = \log_{\frac{1}{3}}(2 - 4 + 3) = \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$.

Ответ: 0.

394. $y = \sqrt[5]{\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x - 31}$
$\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x - 31 = \cos 3x - 31$.
$y = \sqrt[5]{t}$ монотонно возрастает, то ее наименьшее значение при t наименьшем. $\cos 3x - 31$ принимает наименьшее значение, если $\cos 3x$ — наименьшее, то есть $\cos 3x = -1$.
$y_{\text{наим.}} = \sqrt[5]{-1 - 31} = \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$.
Ответ: -2.

395. Отметим, что “подлогарифмическое” выражение — квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом и положительным первым коэффициентом. Следовательно, подлогарифмическое выражение всегда положительно. Основание логарифма больше единицы, следовательно, меньшему (наименьшему) значению подлогарифмического выражения соответствует меньшее (наименьшее) значение данной функции. Наименьшее

значение квадратичная функция в нашем случае принимает при
$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12}{8} = -\dfrac{3}{2}$.

$$y\Big(-\frac{3}{2}\Big) = \log_2\Big(4\cdot\frac{9}{4} + 12\cdot\Big(-\frac{3}{2}\Big) + 13\Big) =$$
$$= \log_2(9 - 18 + 13) = \log_2 4 = 2.$$

Ответ: 2.

396. Функция представляет собой дробь, в числителе которой положительное число. Дробь принимает наибольшее значение при наименьшем значении знаменателя. Так как $0{,}5 < 1$, то функция $f = \log_{0,5} t$, $t > 0$ монотонно убывающая и принимает наименьшее значение при t наибольшем.
$t = 4x - x^2$ наибольшее значение принимает при $x = \dfrac{-4}{-2} = 2,\ 2 \in [1;3]$.

$y_{\text{наиб}} = y(2) = \dfrac{12}{\log_{0,5}(4\cdot 2 - 2^2)} = \dfrac{12}{-2} = -6.$

Ответ: -6.

398. Рассмотрим данную функцию как частное двух функций $g(x)$ и $f(x)$. Для ответа на вопрос задачи необходимо найти $g_{\text{наиб}}$, $f_{\text{наим}}$.
Функция $g = t^{\frac{2}{3}}$ монотонно возрастающая. $g_{\text{наиб}}$, когда t наибольшее. $k = \dfrac{7}{6}x - \dfrac{43}{6}$ принимает наибольшее значение на промежутке $[7;13]$ при $x = 13$. Функция $f = \sqrt{k}$ на отрезке $[7;13]$ монотонно убывающая. $k = 30 - 2x$. $f_{\text{наим}}$ при $x = 13$.

$$y_{\text{наиб}} = y(13) = \frac{\Big(\dfrac{7\cdot 13}{6} - \dfrac{43}{6}\Big)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{30 - 2\cdot 13}} = \frac{\sqrt[3]{\Big(\dfrac{48}{6}\Big)^2}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

399. $y = \dfrac{2^{3x^2 - ax + 2}}{4^{3x^2 - 2ax}} = 2^{3x^2 - ax + 2 - 6x^2 + 4ax} = 2^{-3x^2 + 3ax + 2}$.

Функция $y = 2^t$, $2 > 1$ монотонно возрастающая. $y_{\max}$ в точке, в которой t имеет максимум. $t = -3x^2 + 3ax + 2$ имеет максимум в точке $x = \dfrac{-3a}{2\cdot(-3)} = \dfrac{a}{2}$. По условию $x = 5$. Найдём a из уравнения $\dfrac{a}{2} = 5$. $a = 10$.

Ответ: 10.

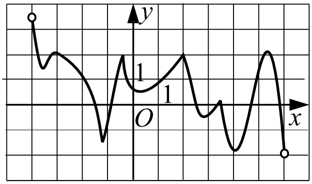


Рис. 8.

400. Две точки минимума $x = -3$ и $x = 0{,}5$.

Ответ: 2.

401. В точке максимума производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, график производной в точке максимума пересекает ось OX сверху вниз.

Производная функции $g(x) = f(x) - x - 2$ на промежутке $(-4; 6)$ равна $g'(x) = f'(x) - 1$. Таким образом, в точках максимума функции $g(x)$ график функции $y = f'(x)$ должен пересекать прямую $y = 1$ сверху вниз. Из рисунка 8 видно, что таких точек 4.

Ответ: 4.

402. Точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ меняет в этой точке знак с «$-$» на «$+$». Из графика $f'(x)$ видим, что $x = 0$ единственная такая точка.

Ответ: 0.

403. Функция $f(x)$ может принимать наибольшее значение на отрезке либо в точке максимума, в которой производная $f'(x)$ меняет свой знак с "$+$"на "$-$", либо на одном из концов отрезка. Поскольку изображенная на рисунке 9 производная $f'(x)$ неположительна на отрезке $[-4; 1]$, то функция $f(x)$ не возрастает на этом отрезке и, следовательно, принимает наибольшее значение на левом конце отрезка, то есть в точке $x_0 = -4$.

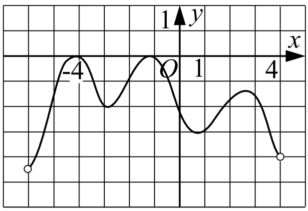


Рис. 9.

Ответ: -4.

404. Функция $f(x)$ может принимать наименьшее значение на отрезке либо в точке минимума, в которой производная $f'(x)$ меняет свой знак с «$-$» на «$+$», либо на одном из концов отрезка. Поскольку, изображенная на рисунке 10 производная $f'(x)$ неотрицательна на отрезке $[-2; 5]$, то функция $f(x)$ не убывает на этом отрезке и, следовательно, принимает наименьшее значение на левом конце отрезка, то есть в точке $x_0 = -2$.

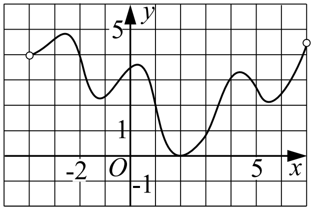


Рис. 10.

Ответ: -2.

405. Из графика видно, что на отрезке $[-6; 0]$ производная неположительна, а на отрезке $[0; 4]$ неотрицательна. Значит, единственная точка экстремума функции 0 является точкой минимума, и в ней функция принимает наименьшее значение на отрезке $[-6; 4]$.

Ответ: 0.

406. Функция $f(x)$ не убывает, если $f'(x) \geqslant 0$. Из графика производной следует, что производная $f'(x)$ неотрицательна на промежутке, следовательно, на этом промежутке функция $f(x)$ не убывает. Протяжённость этого промежутка равна 5.

Ответ: 5.

408. Точка минимума функции — это точка, в которой производная функции равна нулю и меняет знак с минуса на плюс. На заданном промежутке график производной пересекает ось Ox в двух точках, при этом точкой минимума является только точка $x = -6$.

Ответ: -6.

409. Точка максимума функции – это точка, в которой производная функции равна нулю и меняет знак с плюса на минус. График производной пересекает ось Ox в трёх точках, при этом точкой максимума является только точка $x = -3$.

Ответ: -3.

410. Точка минимума функции — это точка, в которой производная функции равна нулю и меняет знак с минуса на плюс. На заданном промежутке график производной пересекает ось Ox в двух точках, при этом точкой минимума является только точка $x = 2$.

Ответ: 2.

411. Из графика видно, что на отрезке $[-6; -3]$ производная неотрицательна, а на отрезке $[-3; 5]$ неположительна. Значит, единственная точка экстремума функции -3 является точкой максимума, и в ней функция принимает наибольшее значение на отрезке $[-6; 5]$.

Ответ: -3.

412. Из графика видно, что на всем отрезке $[1; 11]$ производная положительна, значит функция монотонно возрастает на этом отрезке и принимает наибольшее значение на правом конце этого отрезка.

Ответ: 11.

413. Функция $y = f(x)$, имеющая производную $y = f'(x)$, возрастает на некотором промежутке, если на этом промежутке $f'(x) \geqslant 0$, причем равенство $f'(x) = 0$ достигается лишь в конечном числе точек. Поэтому для решения задачи необходимо посчитать наименьшее количество промежутков, содержащих в совокупности все значения аргумента, для которых график производной лежит не ниже оси абсцисс и имеет с ней лишь конечное число общих точек. Из рисунка 11 следует, что требуемых промежутков три: $(-7; a]$, $[b; c]$, $[d; 3)$.

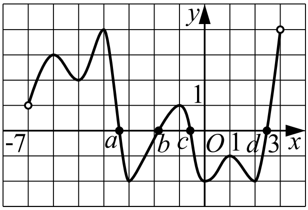


Рис. 11.

Ответ: 3.

414. Функция $y = f(x)$, имеющая производную $y = f'(x)$, убывает на некотором промежутке, если на этом промежутке $f'(x) \leqslant 0$, причем равенство $f'(x) = 0$ достигается лишь в конечном числе точек. Поэтому для решения задачи необходимо посчитать количество промежутков, содержащих в совокупности все значения аргумента, для которых график производной лежит не выше оси абсцисс и имеет с ней лишь конечное число общих точек. Из рисунка 12 следует, что требуемых промежутков два: $[a; b]$ и $[c; d]$.

Ответ: 2.

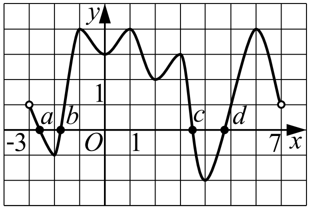


Рис. 12.

415. Функция $y = f(x)$, имеющая производную $y = f'(x)$ убывает на некотором промежутке, если на этом промежутке $f'(x) \leqslant 0$, причем равенство $f'(x) = 0$ достигается лишь в конечном числе точек. Поэтому для решения задачи необходимо посчитать количество промежутков, содержащих в совокупности все значения аргумента, для которых график производной лежит не выше оси абсцисс и имеет с ней лишь конечное число общих точек. Из рисунка 13 следует, что требуемый промежуток только один: $(-8; a]$.

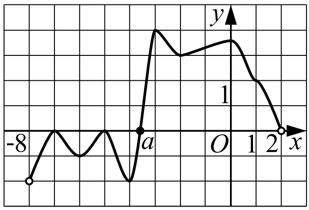


Рис. 13.

Ответ: 1.

416. Заданная функция имеет 3 стационарные точки (точки, в которых производная равна нулю). Точками максимума являются те из них, при переходе через которые производная меняет знак с + на -. Таких точек нет.

Ответ: 0.

417. Заданная функция имеет 3 стационарные точки (точки, в которых производная равна нулю). Точками минимума являются те из них, при переходе через которые производная меняет знак с - на +. Такая точка одна.

Ответ: 1.

418. Заданная функция имеет 4 стационарные точки (точки, в которых производная равна нулю). Точками экстремума являются те из них, при переходе через которые производная имеет либо максимум, либо минимум. То есть меняет знак с «$-$» на «$+$», или с «$+$» на «$-$». Таких точек три.

Ответ: 3.

419. Заданная функция имеет 4 стационарные точки (точки, в которых производная равна нулю). Точками минимума являются те из них, при переходе через которые производная меняет знак с «$-$» на «$+$». Такая точка одна.

Ответ: 1.

420. Из условия следует, что при $x \leqslant 0$ функция $f(x)$ определена формулой $f(x) = x(x+8) = x^2 + 8x$, а при $x > 0$, в силу чётности $f(x)$, $f(x) = f(-x) = -x(-x+8) =$
$= x^2 - 8x$. Уравнение $f(x) + g(x) = 18$ рассмотрим при $x \leqslant 0$ и $x > 0$.

1) При $x \leqslant 0$, $f(x)+g(x) = 2(x^2+8x) = 18$, $x^2+8x-9 = 0$, $x_1 = -9$, $x_2 = 1$ — не удовлетворяет условию $x \leqslant 0$. То есть при $x \leqslant 0$ уравнение $f(x) + g(x) = 18$ имеет один корень, $x = -9$.

2) При $x > 0$, $f(x) + g(x) = x^2 - 8x + x^2 + 8x = 18$, $x^2 = 9$, $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. $x_1 = -3$ — не удовлетворяет условию $x > 0$, то есть при $x > 0$ уравнение $f(x) + g(x) = 18$ также имеет один корень, $x = 3$.

Искомое произведение корней равно $(-9) \cdot 3 = -27$.

Ответ: -27.

421. Найдём нули функции $y = (x+1)(x-4)(x-3)(2x-1)$ на полуинтервале $[0; 4)$.
$x + 1 = 0$, $x = -1$, $-1 \notin [0; 4)$; $x - 4 = 0$, $x = 4$, $4 \notin [0; 4)$;
$x - 3 = 0$, $x = 3$, $3 \in [0; 4)$; $2x - 1 = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2} \in [0; 4)$.

Полуинтервалу [0;4) принадлежат только 2 числа. Исследуем число корней уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-6; 0]$, зная, что $T = 4$.
$x = 3$. $3 - 4 = -1$, $-1 \in [-6; 0]$; $-1 - 4 = -5$, $-5 \in [-6; 0]$;
$-5 - 4 = -9$, $-9 \notin [-6; 0]$.
$x = \dfrac{1}{2}$. $\dfrac{1}{2} - 4 = -3{,}5$, $-3{,}5 \in [-6; 0]$; $-3{,}5 - 4 = -7{,}5$, $-7{,}5 \notin [-6; 0]$.
Итак на отрезке $[-6; 0]$ уравнение $f(x) = 0$ имеет 3 корня.

Ответ: 3.

422. Так как $y = f(x)$ нечётная и x_0 — нуль функции, то $-x_0$ тоже является нулем функции. Отрицательные корни $h(x)$ $x_1 = -\dfrac{2}{3}$; $x_2 = -8$.

Следовательно, корни $y = f(x)$ $x_1 = -\dfrac{2}{3}$; $x_2 = \dfrac{2}{3}$; $x_3 = -8$; $x_4 = 8$. Так как $y = f(x)$ нечётная и всюду определена, то $f(0) = f(-0) = -f(0)$, то есть $f(0) = 0$. Таким образом, $x_5 = 0$.

Ответ: 5.

423. Т. к. функция $y = f(x)$ чётная и x_0 — корень, то $-x_0$ тоже корень. Неотрицательные корни $h(x)$: $x_1 = \frac{2}{7}$; $x_2 = \frac{28}{11}$; $x_3 = \frac{3}{10}$. Корни $y = f(x)$: $x_1 = \frac{2}{7}$; $x_2 = -\frac{2}{7}$; $x_3 = \frac{28}{11}$; $x_4 = -\frac{28}{11}$; $x_5 = \frac{3}{10}$; $x_6 = -\frac{3}{10}$.

Ответ: 6.

424. $y = g(-x) \cdot g(x)f(x) - f(x)g(x) \cdot f(-x)$; $x_0 \neq 0$.
$f(x_0) = 5$, $g(x_0) = 2$.
$f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$, так как $f(x)$ и $g(x)$ — нечётные функции;
$y = -g^2(x) \cdot f(x) + f^2(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)(f(x) - g(x)) = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$.

Ответ: 30.

425. $y = g(x)f(-x) \cdot f(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot g(-x)$, $x_0 \neq 0$, $f(x_0) = 2$, $g(x_0) = 3$,
$f(-x) = f(x)$ и $g(-x) = g(x)$ так как $f(x)$ и $g(x)$ — чётные функции.
$y = g(x) \cdot f^2(x) + f(x) \cdot g^2(x) = f(x)g(x)\big(f(x) + g(x)\big) = 6 \cdot 5 = 30$.

Ответ: 30.

426. $h(x) = x(x + 2)(3x - 4)(5x - 2)$; $h(x) = 0$,
$x(x + 2)(3x - 4)(5x - 2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = \frac{4}{3}$; $x_4 = \frac{2}{5}$. Так как $y = f(x)$ — нечётная, то $f(-x) = -f(x)$, значит, при $x \leqslant 0$ уравнение $f(x) = 0$ имеет корни 0 и -2, а на всей числовой прямой еще корень 2.

Ответ: 3.

427. Так как функция $y = f(x)$ является чётной и определена на всей числовой прямой, то для любого $x < 0$ выполняется равенство
$f(x) = f(-x) = g(-x)$, так как $-x > 0$ и так как при любом неотрицательном значении аргумента значение функции $y = f(x)$ совпадает со значением функции $y = g(x)$. Итак, для ответа на вопрос задачи необходимо решить уравнение $g(-x) = g(x)$ на множестве отрицательных чисел. Таким образом, решаем уравнение
$-x(-x - 2)(-x + 2)(-x - 4)(-x + 9) = x(x - 2)(x + 2)(x - 4)(x + 9)$,
$-x(x + 2)(x - 2)(x + 4)(x - 9) = x(x - 2)(x + 2)(x - 4)(x + 9)$,
$x(x^2 - 4)\big((x - 4)(x + 9) + (x + 4)(x - 9)\big) = 0$,
$x(x^2 - 4)(x^2 + 5x - 36 + x^2 - 5x - 36) = 0$, $2x(x - 2)(x + 2)(x - 6)(x + 6) = 0$.
Отрицательными корнями последнего уравнения являются числа -2 и -6. Их сумма равна -8.

Ответ: -8.

428. Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ — нечётные функции, то график каждой из них симметричен относительно начала координат, а значит, относительно начала координат симметрично и множество точек пересечений этих графиков. Таким образом, найдем неотрицательные корни уравнения $f(x) = x$ и отобразим их симметрично относительно начала координат, в результате получим полное множество решений уравнения $f(x) = x$. При неотрицательных значениях x уравнение $f(x) = x$ равносильно уравнению $g(x) = x \Rightarrow x(x+1)(x-2) = x$, $x(x^2 - x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Множество неотрицательных корней уравнения $g(x) = x$ — $\left\{0, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$. Тогда полное множество корней уравнения $f(x) = x$ — $\left\{-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, 0, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$. Итак, всего 3 корня.

Ответ: 3.

430. Чётная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неположительного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции
$g(x) = (x^2 + 4x + 4)(x^2 - 1)(2x + 3)(x - 2)$. Найдите промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. В ответе укажите количество промежутков, на которых $f(x) > 0$.

Решение. Найдём решение неравенства $f(x) > 0$ методом интервалов. Так как функция $f(x)$ — чётная, то ее корни и промежутки знакопостоянства симметричны относительно начала координат. Таким образом, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, x = \pm 1{,}5$, $x = \pm 2$. Решаем неравенство $g(x) > 0$ на отрицательной полуоси и симметрично отображаем найденные интервалы знакопостоянства относительно начала координат (см. рисунок 14).

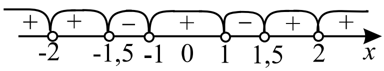


Рис. 14.

Ответ: 5.

431. Ключевая идея такая же, как и в задаче B8 варианта 51.

Найдём нули функции $y = f(x)$ при $x \leqslant -1$. Получаем, $(x^2 + 5x + 6)(x^2 - x - 12) = 0$, $x \leqslant -1 \Leftrightarrow x = -3$, $x = -2$. Следовательно, положительными нулями функции $y = f(x)$ являются $x = 2$, $x = 3$.

Учитывая, что $x = 0$ также является нулем функции получаем ответ.

Ответ: 5.

432. Согласно определению функции $g(x)$, имеем:
$g(5) = 7 + (-2)^3 \cdot f(-2) + 5 = 12 - 8f(-2)$, $g(7) = 7 + 0 \cdot f(0) + 7 = 14$,
$g(9) = 7 + 2^3 \cdot f(2) + 9 = 16 + 8f(2)$. Значит, $g(5) + g(7) + g(9) =$
$= 42 - 8f(2) + 8f(2) = 42$, так как в силу чётности функции $f(x)$: $f(-2) = f(2)$.

Ответ: 42.

433. $g(1) + g(2) = 1{,}4 + \dfrac{f(0{,}5)}{(-0{,}5)^5} + 1{,}4 + \dfrac{f(-0{,}5)}{0{,}5^5} = 2{,}8 +$

$+ \dfrac{-f(0{,}5) + f(-0{,}5)}{0{,}5^5} = 2{,}8$, так как в силу чётности функции $f(x)$:
$f(-0{,}5) = f(0{,}5)$.

Ответ: 2,8.

434. Поскольку функция $f(x)$ нечётная, то $f(-x) = -f(x)$ и $f(0) = 0$. Подсчитаем значения функции $g(x)$ в точках 0, 1, 2 и 4:
$g(0) = (-1) \cdot f(-3) - f(-1) = f(3) + f(1)$,
$g(1) = (1 - 1) \cdot f(1 - 3) - f(1 - 1) - 0{,}5 = -0{,}5$,
$g(2) = (2 - 1) \cdot f(-1) - f(1) - 0{,}5 \cdot 2 = -2 \cdot f(1) - 1$,
$g(4) = 3 \cdot f(1) - f(3) - 0{,}5 \cdot 4 = 3 \cdot f(1) - f(3) - 2$,
$g(0) - 4 \cdot g(1) + 2 \cdot g(2) + g(4) = f(3) + f(1) + 2 - 4 \cdot f(1) - 2 + 3 \cdot f(1) - f(3) -$
$- 2 = -2$.

Ответ: -2.

435. Пусть $x \geqslant 0$, тогда $g(x) = \dfrac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$, а при $x < 0$ $g(x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = 0$. В левой части уравнения $|f(x)| = 1$ стоит чётная функция, поэтому все корни этого уравнения разбиваются на пары противоположных. Нуль не является корнем. Положительные корни уравнения $|f(x)| = 1$ будут являться корнями уравнения $|g(x)| = 1$, а отрицательные — нет. Поэтому корней уравнения $|g(x)| = 1$ вдвое меньше, чем корней уравнения $|f(x)| = 1$.

Ответ: 3.

436. Пусть $x \geqslant 0$, тогда $g(x) = \dfrac{f(x) + f(x)}{2} = f(x)$, а при $x < 0$ $g(x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = 0$. В левой части уравнения $|f(x)| = 3$ стоит чётная функция, поэтому все корни этого уравнения разбиваются на пары противоположных. Нуль не является корнем. Положительные корни уравнения $|f(x)| = 3$ будут являться корнями уравнения $|g(x)| = 3$, а отрицательные — нет. Поэтому корней уравнения $|f(x)| = 3$ вдвое больше, чем корней уравнения $|g(x)| = 3$.

Ответ: 4.

438. $g(0) + g(4) = (-2f(-3) + 1{,}6) + (8 + 2f(1) + 1{,}6)$. Так как функция $f(x-1)$ чётная, то $f(x-1) = f(-x-1)$. Тогда
$g(0) + g(4) = -2f(-1-2) + 1{,}6 + 8 + 2f(-1+2) + 1{,}6 = 11{,}2$.

Ответ: 11,2.

439. $g(-3) + g(-9) = (4{,}7 + 3y(1) + 3) + (4{,}7 - 3y(-5) + 9)$. Так как функция $y(x-2)$ чётная, то $y(x-2) = y(-x-2)$. Тогда
$g(-3) + g(-9) = 4{,}7 + 3y(-2+3) + 3 + 4{,}7 - 3y(-2-3) + 9 = 21{,}4$.

Ответ: 21,4.

440. $g(-1)+g(11) = (-1 - h(-6)\cdot 6 + 3{,}8) + (11 - h(6)\cdot 6 + 3{,}8)$. Так как функция $h(x)$ нечётная, то $-h(x) = h(-x)$. Следовательно,
$g(-1) + g(11) = 17{,}6 - 6\cdot(h(6) - h(6)) = 17{,}6$.

Ответ: 17,6.

441. 1. Так как функция $y = f(x)$ — чётна, то $f(-3) = f(3)$, а так как для всякого неотрицательного значения переменной x значение функции $y = h(x)$ совпадает со значением функции $y = f(x)$, то $f(3) = h(3)$. Так как функция $y = g(x)$ — нечётна, то $g(-1) = -g(1)$, то есть $g(1) = -g(-1)$, а так как для всякого неположительного значения переменной x значение функции $y = h(x)$ совпадает со значением функции $y = g(x)$, то $g(-1) = h(-1)$. Следовательно, $f(-3) = h(3)$, а $g(1) = -h(-1)$. 2. Найдём сумму $f(-3) + g(1) = h(3) - h(-1) = 54 + 2 = 56$.

Ответ: 56.

442. *План решения.* 1. Выразим искомую сумму через значения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. 2. Вычислим полученное выражение, используя свойства чётности и нечётности функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.

1) $h(-2)+h(0)+h(2) = 2^{-2} - 2f(-2) - g(-2) + 2^0 - g(0) + 2^2 + 2f(2) - g(2) = 2\big(f(2) - f(-2)\big) - \big(g(2) + g(-2)\big) - g(0) + 5{,}25$.

2) Так как функция $y = f(x)$ — чётная, а функция $y = g(x)$ — нечётная, то $f(2) = f(-2)$, и $-g(2) = g(-2)$. Из нечётности функции $y = g(x)$ также следует, что $g(0) = -g(-0)$, $2g(0) = 0$, $g(0) = 0$. Таким образом, $h(-2) + h(0) + h(2) = 5{,}25$.

Ответ: 5,25.

443. Из условия получаем: $g(-2) + 1 = f(-2)$. Так как функция $f(x)$ чётная, то $f(-2) = f(2)$. Следовательно,
$f(2) - g(-2) + 2 = f(2) - g(-2) + 1 + 1 = f(2) - f(-2) + 1 =$

$= f(2) - f(2) + 1 = 1.$

Ответ: 1.

444. Из условия получаем: $3 \cdot g(-3) = f(-3)$. Так как функция $f(x)$ нечётная, то $f(-3) = -f(3)$. Следовательно, $\dfrac{6 \cdot g(-3)}{f(3)} + 0{,}5 = \dfrac{2 \cdot f(-3)}{f(3)} + 0{,}5 =$ $= \dfrac{-2 \cdot f(3)}{f(3)} + 0{,}5 = -1{,}5$

Ответ: $-1{,}5$.

445. $f(10) = f(10 - 5) = f(5) = f(5 - 5) = f(0) = 0$, так как $f(0)$ определено и $f(x)$ — нечётная функция, то $f(0) = 0$.

$f(-8) = f(-8 + 5) = f(-3) = f(-3 + 5) = f(2) = -4$.

$f(4) = f(4 - 5) = f(-1) = -f(1)$, так как функция нечётная. Тогда $f(4) = -f(1) = -3$. $f(10) + f(-8) + f(4) = 0 - 4 - 3 = -7$.

Ответ: -7.

446. $f(10) = f(10 - 3 \cdot 3) = f(1) = 2$; $f(17) = f(17 - 6 \cdot 3) = f(-1) =$ $= f(1) = 2$.

Ответ: 10.

447. Так как функция $y = f(x)$ периодическая, с периодом 5, то $f(-10) = f(-10 + 5 + 5) = f(0)$, а $f(8) = f(8 - 5 - 5) = f(-2)$. Из рисунка определяем, что $f(0) = 0$, $f(-1) = -2$, $f(-2) = 4$. Получаем $f(-10) - f(-1) \cdot f(8) = 0 - (-2) \cdot 4 = 8$.

Ответ: 8.

448. Так как период функции равен 5, то $f(11) = f(11 - 5 - 5) = f(1)$ и $f(-9) = f(-9 + 5 + 5) = f(1)$. По графику определяем:
$f(11) = f(-9) = f(1) = -1$, $f(0) = 2$. Подставив найденные значения в искомое выражение, получим, что $\dfrac{f(11)}{f(0)f(-9)} = \dfrac{-1}{2 \cdot (-1)} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

449. Так как период функции равен 4, то $f(-7) = f(-7 + 4 + 4) = f(1)$; $f(8) = f(8 - 4 - 4) = f(0)$ и $f(10) = f(10 - 4 - 4) = f(2)$. Из графика функции получаем, что $f(1) = 4$; $f(0) = 2$; $f(2) = -2$. Подставим найденные значения в искомое выражение:
$f(-7) + f(8) - 3f(10) = f(1) + f(0) - 3f(2) = 4 + 2 + 6 = 12$.

Ответ: 12.

450. $f(17) = f(17 - 6 - 6) = f(5) = 25 - 20 = 5$;
$f(8) = f(8 - 6) = f(2) = 4 - 8 = -4 \Rightarrow 2f(17) + 3f(8) = 10 - 12 = -2$.

Ответ: -2.

451. Так как период функции равен 5, то $f(7) = f(7 - 5) = f(2) = -2$ (из графика); $f(-10) = f(-10+5+5) = f(0) = 1$ (из графика). А выражение $2f(7) - 3f(-10) = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -7$.

Ответ: -7.

452. Так как $g(x) + 5 = f(x)$, то $g(x) = f(x) - 5$. Тогда $f(-5) + g(4) = = f(-5) + f(4) - 5 = f(1 + (-2) \cdot 3) + f(1+3) - 5 = f(1) + f(1) - 5 = -1$.

Ответ: -1.

453. $f(9) = f(-1) = 1$; $2f(3) - 5 \cdot f(9) = 9 \Rightarrow 2f(3) = 14$; $f(3) = 7$. $f(-12) = f(3) = 7$.

Ответ: 7.

454. Найдём количество точек пересечения графиков $y = f(x)$ и $y = 1$ на промежутке $[0; 2)$: $x^2 - 2 = 1$, $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3} \notin [0; 2)$. На $x \in [1; 7]$ график $y = f(x)$ пересекает $y = 1$ три раза при $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3} + 2$, $x_3 = \sqrt{3} + 4$.

Ответ: 3.

455. $x^2 + 2x = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ — не подходит, так как не входит в $(-1; 2]$. На $x \in [0; 11]$ $f(x)$ пересекает $y = 3$ четыре раза при $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 7$, $x_4 = 10$.

Ответ: 4.

456. Так как $f(x)$ – нечётна, и $f(1) = 1$, то имеем: $f(0) = 0$,
$f(-1) = -f(1) = -1$. Отсюда, из периодичности f, получаем
$f(6) = f(0) = 0$, $f(7) = f(1) = 1$, $f(8) = f(-1) = -1$. Итого
$f(6) + f(7) + f(8) = 0 + 1 - 1 = 0$.

Ответ: 0.

457. Так как $f(x)$ – нечётна, и $f(1) = 1$, то имеем: $f(0) = 0$,
$f(-1) = -f(1) = -1$. Отсюда, из периодичности f, получаем
$f(7) = f(-1) = -1$, $f(8) = f(0) = 0$, $f(9) = f(1) = 1$. Итого
$f(7) + f(8) + f(9) = -1 + 0 + 1 = 0$.

Ответ: 0.

458. $6f(7) - 5f(-2) = 6f(2 \cdot 3 + 1) - 5f(3-2) = 6f(1) - 5f(1) = f(1) = 4$.

Ответ: 4.

459. $4f(10) - 3f(-5) = 4f(3 \cdot 3 + 1) - 3f(2 \cdot 3 - 5) = 4f(1) - 3f(1) = = f(1) = 7$.

Ответ: 7.

460. Так как период функции равен 2, то $f(-3) = f(-3+2) = f(-1)$ и $f(3{,}5) = f(3{,}5-2-2) = f(-0{,}5)$. Зная, что $f(x) = x^2 + 2x$ при $x \in [-2; 0)$, имеем: $f(-3) = f(-1) = -1$; $f(3{,}5) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$. Найдём искомое значение: $-2f(-3) - 4f(3{,}5) = -2\cdot(-1) - 4\left(-\dfrac{3}{4}\right) = 5.$

Ответ: 5.

461. Так как наименьший положительный период функции $y = f(x)$ равен 5, а наименьший положительный период функции $y = \sin \pi x$ равен 2, то наименьший положительный период функции $y = f(x) + \sin \pi x$ равен $2 \cdot 5 = 10$.

Ответ: 10.

462. Пользуясь периодичностью функции $f(x)$, имеем:
$3f(-7) - f(-2)f(13) = 3f\big(3 + (-2)\cdot 5\big) - f\big(3 + (-1)\cdot 5\big)f(3 + 2\cdot 5) =$
$= 3\cdot 4 - 4\cdot 4 = -4.$

Ответ: -4.

463. Единственно возможным случаем, когда периодическая функция с периодом 2 на отрезке [0; 8] имеет ровно 5 корней x_k, $k = 1, ..., 5$, будет случай $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 8$. Откуда $x_1 + ... + x_5 = 0 + ... + 8 = 20$.

Ответ: 20.

464. Так как $T = 3$ и $f(x) = x^2 + 3x$ при $x \in [-3; 0]$, то $-2f(4) + 3f(-4) =$
$= -2f(-2+6) + 3f(-1-3) = -2f(-2) + 3f(-1) = -2(4-6) + 3(1-3) =$
$= 4 - 6 = -2.$

Ответ: -2.

465. $f(11) = f(-3) = -f(3)$; $f(3) = g(3) = 9 - 12 = -3; \Rightarrow f(11) = 3.$

Ответ: 3.

466. $f(x)$ периодична с периодом, равным 3, поэтому меньший корень будет на 6 отличаться от большего. Это возможно на $x \in [1; 7]$ только, если корнями будут $x = 1; 4; 7$. Их произведение равно 28.

Ответ: 28.

468. По графику определяем: со скоростью не менее 60 км/ч автомобиль двигался в течение четырёх часов.

Ответ: 4.

469. Наибольшая скорость велосипедиста за последние три часа движения — ордината самой высокой точки графика при $t \in [2; 5]$. По графику определяем скорость — 30 км/ч.

Ответ: 30.

470. Наименьшая цена акции за 24.04.09 — ордината самой нижней точки данного графика на его участке, соответствующей дню 24.04.09. Из рисунка видно, что искомая величина равна 186.

Ответ: 186.

471. Наибольшая цена акции за 30.03.09 — ордината самой высокой точки данного графика на его участке, соответствующей дню 30.03.09. Из рисунка видно, что искомая величина равна 2100.

Ответ: 2100.

472. Наименьшая стоимость евро 6 марта — ордината самой нижней точки графика на его участке, соответствующем дню 6 марта. По графику определяем цену — 45,5 руб.

Ответ: 45,5.

473. Наибольшая стоимость евро 8 марта — ордината высшей точки участка графика, соответствующего дню 8 марта. По графику определяем цену 44,75 руб.

Ответ: 44,75.

474. Из графика видно, что максимальная скорость велосипедиста за вторую половину пути равна 12 км/час.

Ответ: 12.

475. Из графика видно, что уровень воды достиг 13 метров на 13-й день. Таким образом, из 20 дней $\frac{20-13}{20} \cdot 100\% = 35\%$ времени поля были затоплены.

Ответ: 35.

476. По оси ординат одно деление соответствует 25 см, по оси абсцисс два деления — одному месяцу. Необходимо определить количество делений по оси абсцисс, при которых ординаты точек графика больше $250 + 25 = 275$ см.

Таких делений 8, что соответствует четырём месяцам.

Ответ: 4.

477. По графику определяем: масса продукции составила 500 кг.

Ответ: 500.

478. По графику определяем: 16 июня температура воды в море была 20° в 12 часов.

Ответ: 12.

479. Нарушению правил соответствуют те точки графика, ординаты которых больше 50. По графику видно, что всего 7 часов автомобилист нарушал правила: с 3,5 до 7 и с 9,5 до 13.

Ответ: 7.

480. Температура воздуха в инкубаторе удовлетворяла требованиям в такие моменты времени t, для которых ордината точки графика с абсциссой t принадлежит промежутку $[37; 39]$. По графику видно, что это условие выполняется при $t \in [0; 6] \cup [7{,}5; 8{,}5] \cup [10; 12]$, то есть температура удовлетворяла требованиям 9 часов.

Ответ: 9.

481. По графику определяем: наименьшее число кабанов летом — 80 особей.

Ответ: 80.

482. По графику определяем: наименьший уровень воды в реке в апреле — 8 метров.

Ответ: 8.

483. Дням, в которые осадки не выпадали, соответствуют части графика, параллельные горизонтальной оси координат. По графику определяем, что температура не изменялась со 2-го по 6-й дни и с 12-го по 26-й дни, то есть всего 18 дней.

Ответ: 18.

484. Температура воздуха отрицательна в момент времени t, если точка графика данной функции с абсциссой t расположена ниже оси абсцисс. По графику видно, что температура была отрицательной с 1 до 8 часов и с 22 до 24, то есть 9 часов в сутки.

Ответ: 9.

485. Прибыль от продажи одной унции должна составлять не менее $\frac{35\,000}{100} = 350$ (долларов), следовательно, нужно было ждать, пока стоимость унции составит $300 + 350 = 650$ (долларов). Это случилось в 2007 году, значит, ждать нужно было $2007 - 2000 = 7$ (лет).

Ответ: 7.

486. $y' = \left(\dfrac{(11x+2)^2}{e^x}\right)' = \dfrac{\big((11x+2)^2\big)' \cdot e^x - (e^x)' \cdot (11x+2)^2}{(e^x)^2} =$

$= \dfrac{2 \cdot 11(11x+2) \cdot e^x - e^x(11x+2)^2}{e^{2x}} = \dfrac{(11x+2)(22-11x-2)}{e^x} =$

$= \dfrac{(11x+2)(20-11x)}{e^x}$; $y'(0) = \dfrac{2 \cdot 20}{e^0} = 40.$

Ответ: 40.

487. $y' = \left(\dfrac{(2x+3)^3}{e^x}\right)' = \dfrac{\big((2x+3)^3\big)' \cdot e^x - (e^x)' \cdot (2x+3)^3}{(e^x)^2} =$

$= \dfrac{3 \cdot 2(2x+3)^2 \cdot e^x - e^x(2x+3)^3}{e^{2x}} = \dfrac{(2x+3)^2\big(6-(2x+3)\big)}{e^x} =$

$= \dfrac{(2x+3)^2(3-2x)}{e^x}$; $y'(0) = \dfrac{3^2 \cdot 3}{e^0} = 27.$

Ответ: 27.

488. $\left(\ln x - 3x^2 + 5x + 2\right)' = \dfrac{1}{x} - 6x + 5$. При $x = 5$ производная принимает значение $\dfrac{1}{5} - 6 \cdot 5 + 5 = -24,8$.

Ответ: $-24,8$.

489. $f(x) = 3\operatorname{ctg}^2 x;\ x_0 = \dfrac{\pi}{6}$. $f'(x) = 3 \cdot 2\operatorname{ctg} x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\dfrac{6\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$;

$$y = -\frac{6\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x};\ y' = -6 \cdot \frac{\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) \cdot \sin^2 x - \operatorname{ctg} x \cdot 2\sin x \cos x}{\sin^4 x} =$$

$$= \frac{6}{\sin^4 x}(1 + \operatorname{ctg} x \cdot \sin 2x);\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{6}{\sin^4 \dfrac{\pi}{6}} \cdot \left(1 + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 6 \cdot 16 \cdot \left(1 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6 \cdot 16 \cdot 2{,}5 = 240;\ k = 240.$$

Ответ: 240.

490. $\operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$. Задача сводится к нахождению количества корней уравнения $f'(x) = -\sqrt{3}$. Графически определяем, что это уравнение имеет 3 корня.

Ответ: 3.

491. Задача сводится к нахождению количества корней уравнения $f'(x) = \operatorname{tg} 150°$, то есть $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Проведя мысленно на рисунке прямую $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, видим, что корней 2.

Ответ: 2.

492. Искомые касательные проводятся в точках $x = x_0$, в которых $f'(x_0) = k$, где k — угловой коэффициент. По условию $x_0 \in N$, и $f'(x_0) < 0$. Из рисунка видно, что таких точек две $x_0 = 3$ и $x_0 = 4$.

Ответ: 2.

493. Искомые касательные проводятся в точках $x = x_0$, в которых $f'(x_0) = k$, где k — угловой коэффициент. По условию $x_0 \in N$ и $f'(x_0) > 0$. Из рисунка видно, что таких точек четыре: $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 = 3$, $x_0 = 4$.

Ответ: 4.

494. Касательная к графику функции $y = f(x)$ будет иметь наименьший угловой коэффициент в той точке, в которой производная принимает наименьшее значение. По графику производной определяем, что такой точкой будет точка с абсциссой $x = -1$.

Ответ: -1.

495. Число касательных будет равно числу точек пересечения $f(x)$ и $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ (так как $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$). Таких точек 3.

Ответ: 3.

496. Искомые касательные проводятся в точках $x = x_0$, в которых $y'(x_0) = \operatorname{tg} 50^\circ$. Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастающая, то $\operatorname{tg} 45^\circ < \operatorname{tg} 50^\circ < \operatorname{tg} 60^\circ$ или $1 < \operatorname{tg} 50^\circ < \sqrt{3}$. Из рисунка видно, что прямая, проходящая между прямыми $y = 1$ и $y = \sqrt{3}$ имеет с линией $y = f'(x)$ на заданном промежутке семь общих точек.

Ответ: 7.

497. По графику найдем значение производной функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$, которое будет тангенсом искомого угла наклона касательной: $f'(3) = 1 = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Ответ: 45.

498. По геометрическому смыслу производной $k_{\text{кас.}} = f'(x_0) = f'(-3)$. По графику определяем $f'(-3) = 1$.

Ответ: 1.

499. По геометрическому смыслу производной $k_{\text{кас.}} = f'(x_0) = f'(4)$. Определяем по графику $f'(4) = 3$.

Ответ: 3.

500. Используя геометрический смысл производной, находим $f'(x) = 10x - 7$, $f'(x) = 13$.

Ответ: 13.

501. Используя геометрический смысл производной, находим $f'(x) = 4x + 3$, $f'(3) = 15$.

Ответ: 15.

503. Задача сводится к нахождению числа точек x_0, в которых $f'(x_0) = 2{,}5$. Из рисунка видно, что таких точек 3.

Ответ: 3.

504. Искомые касательные проводятся в тех точках, в которых $f'(x) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Из рисунка видно, что такая точка одна: $x = 2$.

Ответ: 1.

505. $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, $x_0 = 1$, $f'(x_0) = -1$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = 135°$.

Ответ: 135.

506. Используя геометрический смысл производной, находим точку, ордината которой равна $\operatorname{tg} 45° = 1$. Её абсцисса равна -1.

Ответ: -1.

507. Используя геометрический смысл производной, находим по графику значение $f'(x)$ в точке $x = 2$. $f'(2) = 3$.

Ответ: 3.

508. Используя геометрический смысл производной нужно найти, сколько общих точек имеют $y = f'(x)$ и $y = \operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Такая точка одна.

Ответ: 1.

512. По условию касательная, проведённая к графику функции $y = x^3 + 4x + 1$, параллельна прямой $y = 4x + 3$, значит $y'(x_0) = 4$, где x_0 — абсцисса точки касания.

$y'(x) = 3x^2 + 4,\ y'(x_0) = 3x_0^2 + 4,\ 3x_0^2 + 4 = 4,\ x_0 = 0,$

тогда $y_0 = 1$, следовательно, точка A имеет координаты $(0; 1)$.

Их сумма равна 1.

Ответ: 1.

513. По условию касательная, проведённая к графику функции $y = -x^2 + 4x + 11$ в точке A, параллельна прямой $y = 1 - 2x$, значит $y'(x_0) = -2$, где x_0 — абсцисса точки A.

$y'(x) = -2x + 4$, $y'(x_0) = -2x_0 + 4$, $-2x_0 + 4 = -2$, $x_0 = 3$, тогда $y_0 = -3^2 + 4 \cdot 3 + 11 = 14$, следовательно точка A имеет координаты $(3; 14)$, их сумма равна 17.

Ответ: 17.

514. $f'(x_0) = k$, где k — угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. По графику определяем: касательная проходит через точки с координатами $(2; -1)$ и $(0; 3)$.

$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $k = \dfrac{3 + 1}{0 - 2} = -2$.

Ответ: -2.

515. $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, где α — угол наклона касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$, к положительному направлению оси Ox в точке с абсциссой $x_0 = 2$. По графику определяем $f'(2) = 1$, отсюда $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = 45°$.

Ответ: 45.

516. $f'(x) = 2e^{2x+1} - 12x^3$. Следовательно, угловой коэффициент касательной к графику заданной функции в точке с абсциссой $x_0 = -0{,}5$ равен $f'(-0{,}5) = 2e^{2(-0{,}5)+1} - 12(-0{,}5)^3 = 2e^0 + 1{,}5 = 3{,}5$.

Ответ: 3,5.

517. $f'(x) = 2e^{5x-2} \cdot 5 + 15x^2$. Следовательно, угловой коэффициент касательной к графику заданной функции в точке с абсциссой $x_0 = \dfrac{2}{5}$ равен

$$f'\left(\frac{2}{5}\right) = 10e^{5\cdot\frac{2}{5}-2} + 15\left(\frac{2}{5}\right)^2 = 10e^0 + \frac{60}{25} = 12{,}4.$$

Ответ: 12,4.

518. Значение производной функции в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0.

Найдём угловой коэффициент к прямой $y = kx + b$, изображённой на рисунке. Точки с координатами $(-1; 4)$ и $(1; 3)$ принадлежат данной прямой.

Решим систему уравнений:
$\begin{cases} 4 = -k + b, \\ 3 = k + b; \end{cases}$ $\begin{cases} b = 3{,}5, \\ k = -0{,}5. \end{cases}$

Итак, $f'(x_0) = k = -0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

519. Значение производной функции в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0.

Найдём угловой коэффициент к прямой $y = kx + b$, изображённой на рисунке. Точки с координатами $(-3; -1)$ и $(-1; 2)$ принадлежат данной прямой. Решим систему уравнений:
$\begin{cases} -1 = -3k + b, \\ 2 = -k + b; \end{cases}$ $\begin{cases} 2k = 3, \\ b = k + 2; \end{cases}$ $\begin{cases} k = 1{,}5, \\ b = 3{,}5. \end{cases}$
Итак, $f'(-3) = k = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

520. Так как прямая $y = 38x - 28$ параллельна касательной, то угловой коэффициент касательной равен 38. Следовательно, производная функции $3x^2 + 8x - 2$ в искомой точке x_0 равна 38.
$(3x^2 + 8x - 2)' = 6x + 8$; $6x_0 + 8 = 38$; $x_0 = 5$.

Ответ: 5.

521. $x(t) = 1{,}5t^2 - 3t + 7$; $v(t) = x'(t)$; $v(t) = 3t - 3$, по условию $v(t) = 12$;

$3t - 3 = 12$, $3t = 15$, $t = 5$.

Ответ: 5.

522. $x(t) = 0,75t^2 + t - 7$. $v(t) = x'(t)$, $v(t) = 1{,}5t + 1$, $1{,}5t + 1 = 19$, $1{,}5t = 18$, $t = 12$.

Ответ: 12.

523. $x(t) = -2t^2 + 20t - 7$; $v(t) = x'(t) = -4t + 20$. Мгновенная остановка произойдет при $v(t) = 0$; $-4t + 20 = 0$; $t = 5$; $x(5) = -2 \cdot 25 + 20 \cdot 5 - 7 = 50 + 100 - 7 = 43$.

Ответ: 43.

524. Скорость движения тела в момент времени t_0 определяется как значение производной функции, выражающей закон движения этого тела, при $t = t_0$. С геометрической точки зрения значение этой производной равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой t_0. По графику находим: $S'(5) = \frac{50}{2} = 25$.

Ответ: 25.

525. Скорость движения тела в момент времени t_0 определяется как значение производной функции, выражающей закон движения этого тела, при $t = t_0$. С геометрической точки зрения значение этой производной равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой t_0. По графику находим $S'(8) = -\frac{30}{2} = -15$. Отрицательное значение скорости говорит об изменении направления движения тела. Таким образом, скорость в момент времени $t = 8$ равна 15.

Ответ: 15.

526. Скорость материальной точки — производная функции перемещения. Таким образом, необходимо найти абсциссу точки графика, изображённого на рисунке, у которой ордината равна 2. По графику находим точку с координатами $(4{,}5; 2)$, её абсцисса равна 4,5.

Ответ: 4,5.

527. Скорость материальной точки — производная функции перемещения. Таким образом, необходимо найти абсциссу точки графика, изображённого на рисунке, у которой ордината равна 3. По графику находим точку с координатами $(5; 3)$, её абсцисса равна 5.

Ответ: 5.

528. Согласно физическому смыслу производной, ускорение есть вторая производная от перемещения.

$S''(t) = 6t,\ S''(1) = 6\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}.$

Ответ: 6.

529. Известно, что $S(t) = \int v(t)dt$, отсюда расстояние, пройденное болидом за первые 6 секунд, равно

$\int\limits_0^6 (36t - 3t^2)dt = (18t^2 - t^3)\Big|_0^6 = 648 - 216 = 432.$

Ответ: 432.

530. Согласно физическому смыслу производной, ускорение есть вторая производная от перемещения.

$s''(t) = 3t, s''(3) = 9\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Ответ: 9.

531. Известно, что $S(t) = \int v(t)dt$, отсюда расстояние, которое преодолел бумеранг за 9 секунд, равно $\int\limits_0^9 (9t - t^2)dt = \left(9 \cdot \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{3}\right)\Big|_0^9 =$
$= 364{,}5 - 243 = 121{,}5.$

Ответ: 121,5.

532. Найдём экстремумы функции $y = \dfrac{6 - 3x^2}{\sqrt{4x+5}}$ на промежутке $(-1{,}25; 1]$. $y'(x) = \dfrac{-6x\sqrt{4x+5} - (6 - 3x^2)\dfrac{4}{2\sqrt{4x+5}}}{4x+5},$

$y'(x) = \dfrac{-6x(4x+5) - 2(6-3x^2)}{(4x+5)\sqrt{4x+5}}$, $y'(x) = \dfrac{-6(3x^2+5x+2)}{(4x+5)\sqrt{4x+5}}$. Решим уравнение $y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \dfrac{-5 \pm 1}{6}$

$\Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -\dfrac{2}{3}$. Запишем производную функции $y(x)$ в виде

$y'(x) = \dfrac{-6(x+1)(3x+2)}{(4x+5)\sqrt{4x+5}}$. Тогда $y'(x) < 0$ при $x \in (-1{,}25; -1) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; 1\right]$ и $y'(x) > 0$ при $x \in \left(-1; -\dfrac{2}{3}\right)$. Тогда так как функция $y(x)$ непрерывна на $(-1{,}25; 1]$, то $x = -1$ — точка минимума функции $y(x)$, а $x = -\dfrac{2}{3}$ — её точка максимума. Поэтому минимум функции $y(x)$ на промежутке

$(-1{,}25; 1]$ достигается либо в точке минимума $x = -1$, либо в конце промежутка $x = 1$. Сравним $y(-1) = 3$ и $y(1) = 1$. Так как $1 < 3$, то минимальное значение функции $y(x)$ на промежутке $(-1{,}25; 1]$ равно 1.

Ответ: 1.

534. Поскольку $f(x) > 0$, а функция $y = \sqrt{x}$ монотонна, то достаточно найти точку на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, в которой достигается наибольшее значение функции $f^2(x) = \sqrt{5}\cos^4 x \sin x$. Сделав замену переменной $\sin x = t$, $\cos^2 x = 1 - t^2$, исследуем на максимум функцию $g(t) = (1 - t^2)^2 \cdot t =$ $= t - 2t^3 + t^5$ при $t \in [0; 1]$. $g'(t) = 5t^4 - 6t^2 + 1$, по методу интервалов, $g'(t) > 0$ при $t^2 < \frac{1}{5}$ и $g'(t) < 0$ при $\frac{1}{5} < t^2 < 1$. Значит, наибольшее значение функции $g(t)$ на отрезке $[0; 1]$ достигается при $t = \frac{1}{\sqrt{5}}$, и, соответственно, наибольшее значение $f(x)$ равно $\sqrt{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}8$.

Ответ: 0,8.

535. Пусть $\sqrt{4x - 1} = t,\ t \geqslant 0$. Тогда $4x - 1 = t^2$, $x = \frac{t^2 + 1}{4}$.

$$y = t - \frac{t^2 + 1}{4} = \frac{1}{4}\left(4t - t^2 - 1\right) = -\frac{1}{4}\left((t - 2)^2 - 3\right) = -\frac{1}{4}(t - 2)^2 + \frac{3}{4}.$$

$y = -\frac{1}{4}(t - 2)^2 + \frac{3}{4}$, наибольшее значение функции равно 0,75(легко проверить, что оно достигается при $t = 2$, то есть при $x = 1{,}25$, $x = 1{,}25$ удовлетворяет ОДЗ).

Ответ: 0,75.

536.Функция $y = \log_3 t$ возрастает на области определения, так как основание $3 > 1$. Следовательно, функции
$f(x) = \log_3(3^{x+3} - 27^x + 27)$ и $g(x) = 3^{x+3} - 27^x + 27$ принимают на отрезке $[-1; 1{,}5]$ наибольшее значение в одни и тех же точках. Найдём наибольшее значение функции $g(x)$ на отрезке $[-1; 1{,}5]$. Известно, что дифференцируемая на $(a; b)$ и непрерывная на $[a; b]$ функция достигает своего наибольшего(наименьшего) значения на границе отрезка $[a; b]$ или в одной из точек экстремума на интервале $(a; b)$.

Имеем, $g'(x) = \ln 3 \cdot 3^{x+3} - \ln 27 \cdot 27^x$,

$$\begin{cases} \ln 3 \cdot 3 \cdot 3^{x+2} - \ln 3^3 \cdot 27^x = 0, \\ x \in (-1; 1{,}5). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\ln 3 \cdot 3^{x+2} - 3\ln 3 \cdot 3^{3x} = 0, \\ x \in (-1; 1{,}5). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} 3^{x+2} = 3^{3x}, \\ x \in (-1; 1{,}5). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \in (-1; 1{,}5). \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Получаем, $g(-1) = 35\dfrac{26}{27}$; $g(1{,}5) = 27$; $g(1) = 81$.

Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-1; 1{,}5]$ достигается в точке $x = 1$ и равно $f(1) = \log_3 81 = 4$.

В ходе решения мы показали что наименьшее значение функции $g(x)$ на отрезке $[-1; 1{,}5]$ положительно. Следовательно, функция $f(x)$ существует при любом $x \in [-1; 1{,}5]$.

Ответ: 4.

537. Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[a; b]$, если на этом промежутке $f'(x) \geqslant 0$, причем $f'(x) = 0$ лишь в конечном числе точек из этого промежутка.

Из графика производной $y = f'(x)$ видим, что на промежутках $(a; 0]$ и $[3; 5]$ $f'(x) \geqslant 0$, и $f'(x) = 0$ лишь в конечном числе точек из этих промежутков. То есть на этих промежутках функция $y = f(x)$ возрастает. А значит она возрастает и на всех подинтервалах указанных промежутков. Однако минимальное количество промежутков возрастания указанной функции, содержащих в совокупности все значения аргумента, при которых функция не убывает равно двум.

Ответ: 2.

538. Из графика $y = f'(x)$ видим, что промежутками, на которых $f'(x) \leqslant 0$, причём $f'(x) = 0$ лишь в конечном числе точек из этих промежутков, являются $(-a; -4]$, $[-2; 4]$, $[6; b)$. То есть на этих промежутках функция $y = f(x)$ убывает. А значит она убывает и на всех подинтервалах указанных промежутков. Однако минимальное количество промежутков убывания указанной функции, содержащих в совокупности все значения аргумента, при которых функция не возрастает, равно трём.

Ответ: 3.

539. Максимум функции $y = f(x)$ в данном случае будет в точках, в которых:

1) производная равна нулю;

2) “при переходе” через эту точку, производная меняет знак “+” на знак “−”.

Видим, что таких точек будет две: $x_0 = 0$ и $x_1 = 5$. Количество точек максимума равно 2.

Ответ: 2.

540. Из графика функции $y = f'(x)$ видим, что на промежутках

$[-4{,}5; -3]$, $[-2; -0{,}5]$, $[1, 3)$ $f'(x) \geqslant 0$, причём, $f'(x) = 0$ лишь в конечном числе точек из этих промежутков. То есть на этих промежутках функция $y = f(x)$ возрастает. А значит, она возрастает и на всех подинтервалах указанных промежутков. Однако, минимальное количество промежутков возрастания указанной функции, содержащих в совокупности все значения аргумента, при которых функция не убывает, равно трём.

Ответ: 3.

541. На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$. Обозначим
$g(x) = f(x) - 3x$, $g'(x) = f'(x) - 3$. Получим график функции
$g'(x) = f'(x) - 3$ сдвигом графика функции $y = f'(x)$ на три единицы вниз вдоль оси ординат. Для этого проведем прямую $y = 3$ и воспользуемся алгоритмом:
1) $f'(x) - 3 = 0$;
2) «при переходе» через эту точку производная меняет знак с «$-$» на «$+$».
Число точек минимума функции $y = f(x) - 3x$ равно 3.

Ответ: 3.

542. Функция имеет минимум в точке x_0, если в этой точке производная меняет знак $-$ на $+$. Следовательно, это точки $(-0{,}75)$; $2{,}25$.

Ответ: 2.

543. Стационарная точка x_0 — точка минимума, если при переходе через неё производная меняет знак с «$-$» на «$+$». Таких точек 4.

Ответ: 4.

544. Стационарная точка x_0 точка минимума, если при переходе через нее производная меняет знак с «$-$» на «$+$». Таких точек 5.

Ответ: 5.

545. Так как при $x \in (-5; 5)$ $f'(x) \leqslant 0$, то $f(x)$ убывает на своей области определения. Следовательно, при $x = 5$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

Ответ: 5.

546. $x = -1$ — точка максимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «-», а на промежутке $(-3; 4)$ $x = -1$ — единственная критическая точка — точка максимума, значит, $x = -1$ — абсцисса точки, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение.

Ответ: -1.

547. $x = 2$ — точка минимума, так как производная меняет знак при переходе через неё с «$-$» на «$+$», и эта точка единственная точка экстремума на $(-4; 4)$, значит, функция в этой точке принимает наименьшее значение.

Ответ: 2.

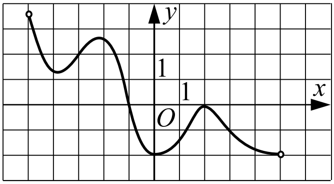


Рис. 15.

549. Из графика производной (см. рис. 15) видим, что на промежутке $[-1;5)$ производная $f'(x)$ неположительна и имеет конечное число стационарных точек, то есть на этих промежутках функция $y=f(x)$ убывает. Очевидно, что эта функция убывает и на любом подинтервале промежутка $[-1;5)$. Однако, минимальное количество промежутков убывания функции $y=f(x)$, содержащих в совокупности все значения аргумента, при которых функция не возрастает (то есть, на которых $f'(x)\leqslant 0$), равно одному.

Ответ: 1.

550. Так как $f''(x)=\big(f'(x)\big)'$, то $y=f''(x)$ положительна на тех промежутках, на которых функция $y=f'(x)$ возрастает. По графику видно, что на промежутках $(-6;-4)$, $(-3;-2)$, $(1;3)$. Функция $y=f'(x)$ — возрастает. Понятно, что эта функция возрастает на любом подинтервале каждого из указанных промежутков. Однако минимальное количество искомых промежутков, содержащих в совокупности все значения x, для которых условие $f''(x)>0$ равно трем.

Ответ: 3.

551. Наименьшее значение функции на отрезке может достигаться либо в точке минимума, либо на одном из концов рассматриваемого отрезка. Из рисунка следует, что $f'(x)>0$ при $x\in(-5;-3)\cup(3;5)$, $f'(x)<0$ при $x\in(-3;3)$ и $f'(x)=0$ при $x=-3$ и при $x=3$. Следовательно, $x=-3$ — точка максимума, $x=3$ — точка минимума, и функция $f(x)$ на отрезке $[-5;-3]$ возрастает, на отрезке [-3;3] убывает, а на отрезке $[3;5]$ опять возрастает. Исходя из данного исследования на возрастание и убывание функции, справедливы соотношения: $f(-5)<f(-3)$ и $f(3)<f(5)$. Но, по условию $f(-5)\geqslant f(5)$, значит, верна «цепочка» неравенств: $f(3)<f(5)\leqslant f(-5)<f(-3)$, из которой следует, что среди значений функции $f(x)$ на концах отрезка $[-5;5]$ и в точке минимума $x=3$, наименьшим является значение в точке минимума $x=3$.

Ответ: 3.

553. 1. Преобразуем функцию $g(x) = \log_4 \dfrac{3}{x^2+4x+12} = \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{x^2+4x+12}{3}$.

Так как основание $\dfrac{1}{4}$ меньше 1, то наименьшее значение функции $g(x)$ на отрезке $[-6;0]$ достигается в тех же точках, что и наибольшее значение функции $f(x) = \dfrac{x^2+4x+12}{3}$.

2. Для нахождения наибольшего значения функции $f(x)$ найдем точки экстремума. Имеем, $f'(x) = \dfrac{2x+4}{3}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x \in (-6;0). \end{cases} \Leftrightarrow$ $x = -2$. Далее, находим значения функции в точке экстремума и на концах отрезка. Получаем, $f(-6) = 8$, $f(-2) = \dfrac{8}{3}$, $f(0) = 4$. Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-6;0]$ равно 8.

3. Таким образом, наименьшее значение функции $g(x)$ на отрезке $[-6;0]$ равно $\log_{\frac{1}{4}} 8 = -1{,}5$.

Ответ: $-1{,}5$.

554. 1. Областью определения функции $y = \sqrt{121 - x^2}$ являются все значения аргумента x, удовлетворяющие неравенству $121 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 121 \geqslant x^2 \Leftrightarrow |x| \leqslant 11 \Leftrightarrow -11 \leqslant x \leqslant 11$. Итак, функция $y = \sqrt{121 - x^2}$ определена на отрезке $[-11;11]$ и, тем более, на отрезке $[-6\sqrt{2}; 4\sqrt{6}]$.
2. На промежутке $[-11;0)$ функция $y = 121 - x^2$ строго возрастает, а на промежутке $(0;11]$ — строго убывает. Заданная функция $y = \sqrt{121 - x^2}$ так же возрастает на $[-11;0)$ и убывает на $(0;11]$, поэтому наибольшего своего значения на области определения, а, значит, и на отрезке $[-6\sqrt{2}; 4\sqrt{6}]$, она достигает в точке $x = 0$. Поскольку функция y чётная, то $y(-6\sqrt{2}) = y(6\sqrt{2})$, и так как $6\sqrt{2} < 4\sqrt{6}$, то $y(6\sqrt{2}) > y(4\sqrt{6})$. Теперь на отрезке $[-6\sqrt{2}; 4\sqrt{6}]$ находим, что $y_{\text{наим}} = y(4\sqrt{6}) = \sqrt{121 - 96} = 5$, а $y_{\text{наиб}} = y(0) = \sqrt{121} = 11$. Таким образом, $y_{\text{наиб}} - y_{\text{наим}} = 11 - 5 = 6$.

Ответ: 6.

555. Область определения $y(x)$: отрезок $[-3;7]$.

Производная $y'(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{21+4x-x^2}}$ определена на $[-1;6]$, и $y'(2) = 0$.

Так как $y'(x) > 0$ при $x \in [-1;2)$, и $y'(x) < 0$ при $x \in (2;6]$, то $x = 2$ — точка максимума $y(x)$ на $[-1;6]$, поэтому $y_{\text{наиб}} = y(2) = 5$. А так как $y(-1) = 4$, а $y(6) = 3$, то $y_{\text{наим}} = y(6) = 3$, и $y_{\text{наиб}} - y_{\text{наим}} = 5 - 3 = 2$.

Ответ: 2.

556. Наибольшее и наименьшее значения на отрезке функция может принимать только на концах отрезка или в точках экстремума, то есть в точках, где ее производная равна нулю либо не существует. Производная $y'(x) = 6\dfrac{x\ln 2}{2^{x^2-2}}$ существует во всех точках отрезка $\left[-2; \sqrt{3}\right]$ и обращается в нуль в единственной точке этого отрезка: $x = 0$. Следовательно, это точка экстремума. Так как $y'(x) < 0$ при $x \in [-2; 0)$, и $y'(x) > 0$ при $x \in \left(0; \sqrt{3}\right]$, то $x = 0$ — точка минимума функции $y(x)$ на отрезке $\left[-2; \sqrt{3}\right]$, и $y_{\text{наим}} = y(0) = -12$. Наибольшее значение $y(x)$ принимает в одном из концов отрезка. Так как $y(-2) = -\dfrac{3}{4}$, а $y\left(\sqrt{3}\right) = -\dfrac{3}{2}$, то $y_{\text{наиб}} = y(-2) = -\dfrac{3}{4}$, и $y_{\text{наиб}} - y_{\text{наим}} = -\dfrac{3}{4} - (-12) = 11{,}25$.

Ответ: 11,25.

557. Производная $y'(x) = 10\dfrac{x\ln 4}{4^{x^2-1}}$ определена на $\left[-\sqrt{2}; 1\right]$, и $y'(0) = 0$. Так как $y'(x) < 0$ при $x \in \left[-\sqrt{2}; 0\right)$, и $y'(x) > 0$ при $x \in (0; 1]$, то $x = 0$ — точка минимума $y(x)$ на $\left[-\sqrt{2}; 1\right]$, поэтому $y_{\text{наим}} = y(0) = -20$. А так как $y(-\sqrt{2}) = -\dfrac{5}{4}$, а $y(1) = -5$, то $y_{\text{наиб}} = y(-\sqrt{2}) = -\dfrac{5}{4}$, и $y_{\text{наиб}} - y_{\text{наим}} = -\dfrac{5}{4} - (-20) = 18{,}75$.

Ответ: 18,75.

558. $y = \log_2 x + \log_2(4 - x) = \log_2(x(4 - x))$. Логарифмическая функция при $a > 1$ монотонно возрастает, поэтому наибольшее значение функции достигается там, где достигается наибольшее значение выражения под знаком логарифма: $x(4 - x)$. График $y = x(4 - x)$ является параболой, ветви которой направлены вниз. Поэтому наибольшее значение выражения $x(4 - x)$ достигается в вершине этой параболы $x = 2$ и равно $y(2) = 4$. А наибольшее значение функции $y = \log_2 x + \log_2(4 - x)$ равно $\log_2 4 = 2$.

Ответ: 2.

559. $y = \dfrac{1}{64} \cdot 8^{2+x^2+\frac{x^3}{3}} - 1 = 8^{x^2+\frac{x^3}{3}} - 1$. Известно, что дифференцируемая на $(a; b)$ и непрерывная на $[a; b]$ функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка $[a; b]$ или в одной из точек экстремума на интервале $(a; b)$.

Имеем, $y' = 8^{x^2+\frac{x^3}{3}} \cdot \ln 8 \cdot (2x + x^2)$. Найдём точки экстремума:

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$. Точка $x_1 = -2$ не принадлежит промежутку $[-1; 1]$. Вычислим значения функции в точке экстремума x_2 и на концах промежутка: $y(-1) = 8^{1-\frac{1}{3}} - 1 = 3; y(0) = 8^0 - 1 = 0;$ $y(1) = 8^{1+\frac{1}{3}} - 1 = 15$. Значит, сумма наибольшего и наименьшего значений данной функции y равна 15.

Ответ: 15.

560. Известно, что дифференцируемая на $(a; b)$ и непрерывная на $[a; b]$ функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на границе отрезка $[a; b]$ или в одной из точек экстремума на интервале $(a; b)$.

Имеем, $y' = 2 \cdot 4^{3x^2-2x^3} \cdot \ln 4 \cdot (6x - 6x^2)$. Найдём точки экстремума: $y' = 0 \Leftrightarrow 6x - 6x^2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Точка $x_1 = 0$ не принадлежит промежутку $[0{,}5; 1{,}5]$. Вычислим значения функции в точке экстремума x_2 и на концах промежутка: $y(0{,}5) = 2 \cdot 4^{0{,}75-0{,}25} - 3 = 1; y(1) = 2 \cdot 4^1 - 3 = 5;$ $y(1{,}5) = 2 \cdot 4^{1{,}5^2 \cdot (3-2 \cdot 1{,}5)} - 3 = 2 \cdot 4^0 - 3 = -1$. Значит, сумма наибольшего и наименьшего значений данной функции y равна 4.

Ответ: 4.

561. Пусть y_{min} — наименьшее, а y_{max} — наибольшее значения функции $y = 2^x + 0{,}5^x$ на отрезке $[-1; 2]$. Заметим, что $0{,}5^x = \dfrac{1}{2^x}$ и сделаем замену $2^x = t$. При $-1 \leqslant x \leqslant 2$ имеем: $0{,}5 \leqslant 2^x \leqslant 4$ (так как функция 2^x монотонна). Пусть f_{min}, f_{max} — наименьшее и наибольшее значения функции $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$ на отрезке $[0{,}5; 4]$, тогда ясно, что $y_{min} = f_{min}$, $y_{max} = f_{max}$. Найдём f_{min} и f_{max}: $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$, $t = 1$ — единственная экстремальная точка на отрезке $[1; 4]$, являющаяся точкой минимума. Следовательно, наименьшее значение функции $f(t)$ есть $f(1) = 2$, а наибольшее значение принимается на одном из концов отрезка: $f(0{,}5) = 2{,}5$, $f(4) = 4{,}25$. Итак, $y_{min} + y_{max} = f_{min} + f_{max} = 6{,}25$.

Ответ: 6,25.

562. Пусть y_{min} — наименьшее, а y_{max} — наибольшее значения функции $y = 4^x + 0{,}25^{x-1}$ на отрезке $[0; 1]$. Заметим, что $0{,}25^{x-1} = \dfrac{4}{4^x}$ и сделаем замену $4^x = t$. При $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем: $1 \leqslant 4^x \leqslant 4$ (так как функция 4^x монотонна). Пусть f_{min}, f_{max} — наименьшее и наибольшее значения функции $f(t) = t + \dfrac{4}{t}$ на отрезке $[1; 4]$, тогда ясно, что $y_{min} = f_{min}$, $y_{max} = f_{max}$.

Найдём f_{min} и f_{max}: $f'(t) = 1 - \frac{4}{t^2}$, $t = 2$ — единственная экстремальная точка на отрезке $[1; 4]$, являющаяся точкой минимума. Следовательно, наименьшее значение функции $f(t)$ есть $f(2) = 4$, а наибольшее значение принимается на одном из концов отрезка: $f(1) = 5$, $f(4) = 5$, $f_{max} = 5$. Итак, $y_{min} + y_{max} = f_{min} + f_{max} = 9$.

Ответ: 9.

563. Так как основание данного логарифма больше числа 1, то чем больше значение функции $g(x) = \frac{1}{x^3 - 12x^2 + 45x - 1}$, тем больше значение функции $f(x)$. Будем рассматривать только те значения x, при которых $f(x)$ определена, то есть $g(x) > 0$. При этом, чем больше значение функции $g(x) = \frac{1}{x^3 - 12x^2 + 45x - 1}$, тем меньше значение функции $h(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 1$. Поэтому сначала найдем наименьшее значение функции $h(x)$ на отрезке $[3; 6]$. $h'(x) = 3x^2 - 24x + 45$, $h'(x) = 0$, $x^2 - 8x + 15 = 0$, $(x - 3)(x - 5) = 0$. $h'(x) < 0$ при $x \in [3; 5]$, то есть $h(x)$ убывает на отрезке $[3; 5]$. Поэтому на отрезке $[3; 6]$ $h(x)$ принимает наименьшее значение при $x = 5$. $g(5) = \frac{1}{49}$, $f(5) = -2$. Тогда на отрезке $[3; 6]$ $f_{max} = -2$.

Ответ: -2.

564. Так как основание данного логарифма больше числа 1, то чем больше значение функции $h(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 6$, тем больше значение функции $f(x)$. Поэтому сначала найдем наибольшее и наименьшее значения функции $h(x)$ на отрезке $[0; 3]$. $h'(x) = 3x^2 + 6x - 9$, $h'(x) = 0$, $x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x - 1)(x + 3) = 0$. $h'(x) < 0$ при $x \in [-3; 1]$, то есть $h(x)$ убывает на отрезке $[-3; 1]$. Поэтому на отрезке $[0; 3]$ $h(x)$ принимает наименьшее значение при $x = 1$, а наибольшее — при $x = 0$ или при $x = 3$. $h(1) = 1$, $h(0) = 6$, $h(3) = 33$. Тогда на отрезке $[0; 3]$ $f_{max} = 1$, $f_{min} = 0$, $f_{max} - f_{min} = 1 - 0 = 1$.

Ответ: 1.

565. Функция $\left(\frac{\pi}{4} - x^2\right)$ является чётной на всей числовой прямой, поэтому множество ее значений на отрезке $\left[-\frac{\sqrt{\pi}}{3}; 0\right]$ совпадает с множеством ее значений на $\left[0; \frac{\sqrt{\pi}}{3}\right]$. На этом множестве она принимает значения $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$. Тангенс в первой четверти монотонно возрастает, поэтому максимальное и минимальное значения он принимает на концах отрезка $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$. $\operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{tg}^2 0 = 1$.

Ответ: 1.

566. На указанном отрезке $\left(\dfrac{\pi}{2} - x^2\right)$ принимает значения на $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}\right]$, где косинус монотонно убывает. Поэтому минимальное и максимальное значения косинус принимает на концах отрезка $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}\right]$.

$\cos^2 \dfrac{\pi}{4} + \cos^2 \dfrac{\pi}{3} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

567. Аргумент тангенса $\dfrac{\pi}{4} \sin x$ принимает значения из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$. Тангенс на этом отрезке монотонно возрастает, поэтому максимальное и минимальное значение принимает на его концах. $\operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{tg}^2\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$.

Ответ: 2.

568. Так как выражение $g(x) = \dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\pi x^2}{6}$ является квадратным трёхчленом с отрицательным старшим коэффициентом и нулевым вторым коэффициентом, то его наибольшее значение на всей числовой оси достигается при $x = 0$ и равно $\dfrac{3\pi}{2}$. Так как $0 \in [-\sqrt{3}; 2]$, то $\dfrac{3\pi}{2}$ — наибольшее значение выражения $g(x)$ и на отрезке $[-\sqrt{3}; 2]$. Наименьшее значение выражения $g(x)$ на отрезке $[-\sqrt{3}; 2]$ будет достигаться в одном из концов этого отрезка. Так как $g(-\sqrt{3}) = \pi$, а $g(2) = \dfrac{5\pi}{6}$, то $\left[\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ — множество значений выражения $\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\pi x^2}{6}$ при $x \in [-\sqrt{3}; 2]$. 2. В силу того, что функция $y = \sin x$ монотонно убывает на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, она убывает и на отрезке $\left[\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{3\pi}{2}\right] \subset \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$. Следовательно, $\sin \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ и $\sin \dfrac{3\pi}{2} = -1$ — соответственно наибольшее и наименьшее значение функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$. 3. Таким образом, искомая разность равна $3{,}2 \cdot \frac{1}{2} - 3{,}2 \cdot (-1) = 4{,}8$.

Ответ: 4,8.

569. Так как при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ строго возрастает на всей числовой оси, то функция $f(x) = 1{,}25 \log_2(7x^2 - 7x + 2)$ достигает своего наименьшего значения, когда наименьшего значения достигает функция $g(x) = 7x^2 - 7x + 2$. И наоборот, заданная функция достигает своего наибольшего значения, когда функция $g(x)$ достигает своего наибольшего значения. Таким образом, найдём сначала наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$ на отрезке $[-1; 1]$. Для этого найдем производную $g'(x) = 14x - 7$. Приравняв ее к нулю, получим $14x - 7 = 0$, $x = 0{,}5$; $g(0{,}5) = 0{,}25$. Теперь найдем значения функции $g(x)$ на концах заданного отрезка. $g(-1) = 16$; $g(1) = 2$. Следовательно, функция $g(x)$ имеет наибольшее значение в точке $x = -1$ и наименьшее в точке $x = 0{,}5$. Получаем, что функция $f(x)$ принимает наименьшее значение в точке $x = 0{,}5$; $f(0{,}5) = 1{,}25 \log_2 0{,}25 = 1{,}25 \cdot (-2) = -2{,}5$ и наибольшее значение в точке $x = -1$, $f(-1) = 1{,}25 \log_2 16 = 1{,}25 \cdot 4 = 5$. Сумма наибольшего и наименьшего значений: $5 + (-2{,}5) = 2{,}5$.

Ответ: 2,5.

570. Так как при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ строго возрастает на всей числовой оси, то функция $f(x) = 12 \log_3(2x^2 + 1) - 4$ достигает своего наименьшего значения, когда наименьшего значения достигает функция $g(x) = 2x^2 + 1$. И наоборот, заданная функция достигает своего наибольшего значения, когда функция $g(x)$ достигает своего наибольшего значения. Таким образом, отыщем сначала наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$ на отрезке $[-1; 2]$. Для этого, найдем производную $g'(x) = 4x$. Приравняв ее к нулю, получим $x = 0$; $g(0) = 1$. Теперь найдем значения функции $g(x)$ на концах заданного отрезка. $g(-1) = 3$; $g(2) = 9$. Следовательно, функция $g(x)$ имеет наибольшее значение в точке $x = 2$ и наименьшее в точке $x = 0$. Получаем, что функция $f(x)$ принимает наименьшее значение в точке $x = 0$; $f(0) = 12 \log_3 1 - 4 = 12 \cdot 0 - 4 = -4$ и наибольшее значение в точке $x = 2$, $f(2) = 12 \log_3 9 = 12 \cdot 2 - 4 = 20$. Сумма наибольшего и наименьшего значений: $20 + (-4) = 16$.

Ответ: 16.

571. Функция $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 1$ на отрезке $[-5; 5]$ определена и дифференцируема на интервале $(-5; 5)$. Найдём стационарные точки.

$y'(x) = 3x^2-12x-15$, $y'(x) = 0$, $3x^2-12x-15 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. $-1 \in (-5;5)$, $5 \notin (-5;5)$.

Найдём значения функции на концах отрезка и в стационарной точке.

$y(-5) = -199$; $y(5) = -99$; $y(-1) = 9$.

Из чисел -199, -99, 9 наибольшее число 9, наименьшее число -199.

$9-(-199) = 208$.

Ответ: 208.

572. Найдём стационарные точки: $y'(x) = 12-6x-6x^2$; $12-6x-6x^2 = 0$; $x^2+x-2 = 0$; $x_1 = -2, x_2 = 1$.

Найдём значения функции на концах отрезка и в стационарной точке $x = -2$. $y(-4) = 37, y(-2) = -15, y(1) = 12$.

Из чисел 37; -15; 12 наибольшим является 37, наименьшим — -15.

$37-(-15) = 37+15 = 52$.

Ответ: 52.

573. Пусть точка с координатами $(x;y)$ принадлежит графику функции $y = x^2+\frac{1}{2}$, тогда квадрат расстояния от неё до точки A равен $(x+2)^2 + (y-1)^2$. Необходимо найти наименьшее значение выражения.

$(x+2)^2+(y-1)^2 = (x+2)^2+(x^2+\frac{1}{2}-1)^2 = x^2+4x+4+x^4-x^2+\frac{1}{4} = x^4+4x+4\frac{1}{4}$.

Обозначим $f(x) = x^4+4x+4\frac{1}{4}$, тогда $f'(x) = 4x^3+4 = 4(x^3+1) = 4(x+1)(x^2-x+1)$, $f'(x) = 0$, $x = -1$.

Функция $f(x)$ имеет единственную точку минимума $x = -1$, значит при

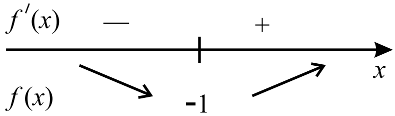


Рис. 16.

$x = -1$ достигается наименьшее значение функции $f(x)$ (см. рис. 16).

$f(-1) = 1-4+4\frac{1}{4} = 1{,}25$.

Ответ: 1,25.

574. Пусть точка с координатами $(x;y)$ принадлежит графику функции $y=\sqrt{2x-8}$, тогда квадрат расстояния от неё до точки B равен $(x-7)^2+y^2$.

Необходимо найти наименьшее значение данного выражения.
$(x-7)^2+y^2=x^2-14x+49+2x-8=x^2-12x+41=(x-6)^2+5$.
Таким образом, наименьшее значение выражения $(x-7)^2+y^2$ равно 5 ($x=6$ принадлежит области определения функции $y=\sqrt{2x-8}$).

Ответ: 5.

575. Найдём множество значений данной функции на отрезке $[0;\pi]$.

$0\leqslant x\leqslant\pi$; $0\leqslant\dfrac{x}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{4}$; $0\leqslant\sin\dfrac{x}{4}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $0\leqslant\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{4}\leqslant 1$;

$0\leqslant\sqrt{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{4}}\leqslant 1$; $0\leqslant 2\sqrt{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{4}}\leqslant 2$. Итак, $E(y)=[0;2]$, наибольшее значение равно 2.

Ответ: 2.

576. $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^3}=-\log_3 x^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{3}{2}\log_3 x$.

Найдём множество значений данной функции на отрезке $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$.

$\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 3$; $-1\leqslant\log_3 x\leqslant 1$; $-\dfrac{3}{2}\leqslant\dfrac{3}{2}\log_3 x\leqslant\dfrac{3}{2}$; $-\dfrac{3}{2}\leqslant-\dfrac{3}{2}\log_3 x\leqslant\dfrac{3}{2}$.

Итак, $E(y)=\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$, наибольшее значение равно $\dfrac{3}{2}$.

Ответ: 1,5.

577. Так как $f'(x)=(50x^3-225x^2-756x+931)'=150x^2-450x-756=$ $=6(5x+6)(5x-21)$, то из рисунка 17 видно, что длина наибольшего отрезка монотонности функции $f(x)$, содержащего точку $x=0$, равна $\dfrac{21}{5}-\left(-\dfrac{6}{5}\right)=5,4$.

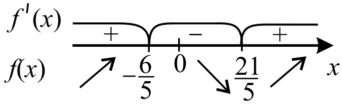


Рис. 17.

Ответ: 5,4.

578. $f'(x)=1-\dfrac{1}{x\ln 2}$; $1-\dfrac{1}{x\ln 2}=0$; $x=\dfrac{1}{\ln 2}$. Так как $2<e\Leftrightarrow\ln 2<1$ $\Leftrightarrow\dfrac{1}{\ln 2}>1$ и $e<4\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}}<2\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<\ln 2\Leftrightarrow\dfrac{1}{\ln 2}<2$, то $x=\dfrac{1}{\ln 2}$ —

стационарная точка, принадлежащая отрезку $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Из чисел $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, $f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{2} + \log_2(\ln 2)$ и $f(2) = -\frac{1}{2}$ наибольшим является число $\frac{3}{2}$, так как $2 < e \Leftrightarrow \ln 2 < 1 \Leftrightarrow \log_2(\ln 2) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \log_2(\ln 2) < \frac{1}{2}$.

Ответ: $1,5$.

579. $y' = 2(x-4)(x-1) + (x-4)^2 = (x-4)(3x-6)$.

1) Найдём точки экстремума функции.

$y'(x) = 0$ при $x_1 = 4$, $x_2 = 2$.

2) Найдём значение функции в точках экстремума и на концах отрезка.

$y(4) = 0$; $y(2) = 4$; $y(1,5) = 3,125$; $y(4,5) = 0,875$.

Следовательно, наибольшее значение функции $y = (x-4)^2(x-1)$ на отрезке $[1,5; 4,5]$ равно 4.

Ответ: 4.

580. $y' = \frac{5x^4}{15} - 3x^2 = \frac{x^4}{3} - 3x^2 = x^2\left(\frac{x^2}{3} - 3\right)$.

1) Найдём точки экстремума функции.

$y'(x) = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3 \notin [0; 4]$.

2) Найдём значение функции в точках экстремума, принадлежащих отрезку $[0; 4]$, и на его концах.

$y(0) = 0$; $y(3) = -10,8$; $y(4) = 4\frac{4}{15}$.

Следовательно, наименьшее значение функции $y = \frac{x^5}{15} - x^3$ на отрезке $[0; 4]$ равно $-10,8$.

Ответ: $-10,8$.

581. 1. $y' = 6x^2 + 4x - 10$.

2. $y' = 0, x = 1, x = -\frac{5}{3}, 1 \in [-1; 2], -\frac{5}{3} \notin [-1; 2]$.

3. $y(-1) = -2 + 2 + 10 + 1 = 11$,
$y(1) = 2 + 2 - 10 + 1 = -5$,
$y(2) = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 10 \cdot 2 + 1 = 5$.

Из чисел 11, 5, -5 наименьшее число -5.

Ответ: -5.

582. $y' = \frac{4x-4}{(2x^2-4x+3)\ln 0,5}$,
$y' = 0, x = 1, 1 \in [0; 2]$,

$y(0) = \log_{\frac{1}{2}} 3$, $y(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$, $y(2) = \log_{\frac{1}{2}}(2 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 3) = \log_{\frac{1}{2}} 3$.

Из чисел $\log_{\frac{1}{2}} 3$ и 0 наибольшее число 0.

Ответ: 0.

583. $V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3}h \cdot S_{\text{осн.}} = \dfrac{1}{3}h \cdot a^2$.

Выразим $h = 3 - a$ и рассмотрим функцию $v(a) = \dfrac{1}{3}(3 - a) \cdot a^2$, $a > 0$.

$v'(a) = (a^2 - \dfrac{1}{3}a^3)' = 2a - a^2 = a(2 - a)$.

Итак, функция $v(a)$ имеет единственную точку максимума (см. рис. 18). Пирамида имеет наибольший объём при $a = 2$.

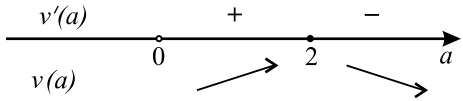


Рис. 18.

Ответ: 2.

584. $V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3}h \cdot S_{\text{осн.}} = \dfrac{1}{3}h \cdot \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}ha^2$.

Выразим $h = 5 - 2a$ и рассмотрим функцию $v(a) = (5 - 2a) \cdot a^2$, $a > 0$.
$v'(a) = (5a^2 - 2a^3)' = 10a - 6a^2 = 2a(5 - 3a)$.
Итак, функция $v(a)$ имеет единственную точку максимума (см. рис. 19).
Пирамида имеет наибольший объём при $a = \dfrac{5}{3}$, $3 \cdot \dfrac{5}{3} = 5$.

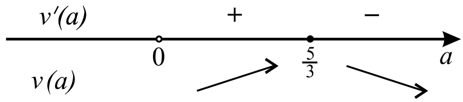


Рис. 19.

Ответ: 5.

585. $f(x) = 3(5x - 4)^2 - (5x - 4)^3$.

1) Найдём точки экстремума функции.
$f'(x) = 6(5x - 4) - 3(5x - 4)^2 = 3(5x - 4)(2 - 5x + 4) = 3(5x - 4)(6 - 5x)$.
$f'(x) = 0$; $3(5x - 4)(6 - 5x) = 0$; $x_1 = \dfrac{4}{5}$; $x_2 = \dfrac{6}{5}$.

2) $|2x-3| \leqslant 1$; $-1 \leqslant 2x-3 \leqslant 1$; $2 \leqslant 2x \leqslant 4$; $1 \leqslant x \leqslant 2$. $x = \dfrac{4}{5}$ не принадлежит данному промежутку.

3) Найдём значение функции $f(x)$ в точке $x = \dfrac{6}{5}$ и на концах отрезка $[1; 2]$.

$f(1) = 2$; $f\left(\dfrac{6}{5}\right) = 4$; $f(2) = -108$. Следовательно, наибольшее значение заданной функции при x, удовлетворяющих условию $|2x-3| \leqslant 1$, равно 4.

Ответ: 4.

586. $f(x) = 4(2x-3)^3 + (2x-3)^4$.

1) Найдём точки экстремума функции.

$f'(x) = 12(2x-3)^2 \cdot 2 + 4(2x-3)^3 \cdot 2 = (2x-3)^2(24+16x-24) =$
$= (2x-3)^2 \cdot 16x$. $f'(x) = 0$ при $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 0$.

2) $|2x+1| \leqslant 1$; $-1 \leqslant 2x+1 \leqslant 1$; $-2 \leqslant 2x \leqslant 0$; $-1 \leqslant x \leqslant 0$. $x = 1{,}5$ не принадлежит данному промежутку.

3) Найдём значение функции $f(x)$ на концах отрезка $[-1; 0]$.

$f(-1) = 4(-5)^3 + (-5)^4 = -5^3(-1) = 5^3 = 125$.

$f(0) = 4 \cdot (-3)^3 + (-3)^4 = -3^3 = -27$. Следовательно, наименьшее значение заданной функции при x, удовлетворяющих условию $|2x+1| \leqslant 1$, равно -27.

Ответ: -27.

587. Найдём стационарные точки функции $y = -x^3 + 3x + 5$. $y'(x) =$
$= -3x^2 + 3$; $y'(x) = 0$; $-3x^2 + 3 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = -1$.

Найдём значения функции на концах отрезка $[-1; 2]$ и в стационарных точках, ему принадлежащих: $y(-1) = 3$, $y(1) = 7$, $y(2) = 3$.

Из чисел 3, 7 наибольшим является число 7.

Ответ: 7.

588. Найдём стационарные точки функции $y = x^3 - 3x + 8$.

$y'(x) = 3x^2 - 3$; $y'(x) = 0$; $3x^2 - 3 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x_1 = -1, x_2 = 1$.

Найдём значения функции на концах отрезка $[-3; 2]$ и в стационарных точках, ему принадлежащих.

$y(-3) = -10$, $f(-1) = 10$, $f(1) = 6$, $f(2) = 10$.

Из чисел -10, 10, 6 наименьшее число -10.

Ответ: -10.

589. Найдём производную данной функции: $y' = e^{(x+2)} + (x+3)e^{x+2} =$
$= (x+4)e^{x+2}$. $y' = 0$ при $x = -4$. Таким образом, нужно выбрать наибольшее из значений $y(-3)$, $y(-4)$ и $y(-5)$. $y(-3) = 0$; $y(-4) =$

$= -e^{-2} < 0$; $y(-5) = -2e^{-3} < 0$. Наибольшее из этих значений равно 0.

Ответ: 0.

590. Графиком функции $y = \dfrac{1}{x} - 1$ является гипербола, смещенная на

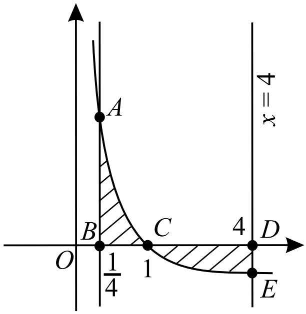


Рис. 20.

единицу вниз по оси ординат относительно гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$. При этом этот график пересекает ось абсцисс в единственной точке при $x = 1$, что можно определить, решив уравнение $\dfrac{1}{x} - 1 = 0$. Таким образом, фигура, ограниченная указанными в задаче линиями, будет иметь вид заштрихованной части плоскости на рисунке 20. Тогда площадь этой фигуры равна $S = S_{ABC} + S_{CDE}$ (см. рис. 20). Поскольку функция $y = \dfrac{1}{x} - 1$ на интервале $(1; 4]$ принимает отрицательные значения, то площадь части CDE фигуры будет вычислена по формуле

$S_{CDE} = -\int\limits_1^4 y(x)\,dx$,в то время как площадь части ABC определяется равенством $S_{ABC} = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} y(x)\,dx$.

Итак,

$$S = \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx - \int\limits_1^4 \left(\frac{1}{x} - 1\right) = (\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1} - (\ln x - x)\Big|_1^4 =$$

$= \ln 1 - 1 - \ln\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - \ln 4 + 4 + \ln 1 - 1 = 2{,}25.$

Ответ: 2,25.

591. На отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ $\sin x \geqslant 0$, на отрезке $\left[\pi; \dfrac{4\pi}{3}\right]$ $\sin x \leqslant 0$.

$$S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx - \int\limits_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} =$$

$$-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2} + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\pi = 1 + 0 - \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

592. Найдём абсциссы точек пересечения данных линий $x^2 = x + 2$, $x^2 - x - 2 = 0$: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ — искомые абсциссы.

$$S = \int\limits_{-1}^{2} (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

593. Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий $x^3 - x = 8x$, $x(x-3)(x+3) = 0$: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$. Функции $y = x^3$ и $y = 8x$ нечётные, фигура, ограниченная их графиками, симметрична относительно начала координат. $S = 2\int\limits_{0}^{3} (8x - x^3 + x) dx =$

$$2\int\limits_{0}^{3} (9x - x^3) dx = 2\left(\frac{9x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{3} = 2 \cdot \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = 2 \cdot \frac{81}{4} = 40{,}5.$$

Ответ: 40,5.

594. Найдём абсциссы точек пересечения заданных линий: $3x^3 - 9x^2 + 9x = 3x^2$, $3x^3 - 12x^2 + 9x = 0$, $3x(x^2 - 4x + 3) = 0$, $3x(x-1)(x-3) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

На отрезке $[0; 1]$ график функции $y = 3x(x^2 - 3x + 3)$ лежит выше графика функции $y = 3x^2$, а на отрезке $[1; 3]$ график функции $y = 3x^2$ лежит выше графика функции $y = 3x(x^2 - 3x + 3)$.

$$S = \int\limits_{0}^{1} (3x^3 - 9x^2 + 9x - 3x^2) dx + \int\limits_{1}^{3} (3x^2 - 3x^3 + 9x^2 - 9x) dx =$$

$$\int_0^1 (3x^3 - 12x^2 + 9x)dx + \int_1^3 (12x^2 - 3x^3 - 9x)dx =$$
$$= \left(\frac{3x^4}{4} - 4x^3 + \frac{9x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(4x^3 - \frac{3x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 =$$
$$= \frac{3}{4} - 4 + \frac{9}{2} + 108 - \frac{243}{4} - \frac{81}{2} - 4 + \frac{3}{4} + \frac{9}{2} = 9{,}25.$$

Ответ: 9,25.

595. По определению первообразной, $F'(x) = f(x)$. Угловой коэффициент касательной к графику $y = F(x)$ в точке $x_0 = \pi$ равен
$$F'(\pi) = f(\pi) = \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 = 0{,}75 + 1 = 1{,}75.$$

Ответ: 1,75.

596. Так как $f(x) = F'(x)$ и из графика видно, что $F(x)$ — возрастающая функция на отрезке $[-3; 2]$, то $f(x) > 0$ на этом отрезке. Следовательно, искомая площадь равна:
$$S = \int_{-3}^{2} f(x)\,dx = F(2) - F(-3) = 2 - (-2) = 4.$$

Ответ: 4.

598. Найдём производную $y' = 3x^2 + 2ax + 3$. Функция не имеет экстремумов в двух случаях:
1) Нет критических точек, то есть уравнение $y' = 0$ не имеет корней. Уравнение $3x^2 + 2ax + 3 = 0$ не имеет корней, если $D < 0$, $D = 4a^2 - 36$; $4(a-3)(a+3) < 0$, $-3 < a < 3$.
2) Критические точки есть, но «при переходе» через них производная не меняет знака. $3x^2 + 2ax + 3$ — полный квадрат; $3x^2 + 2ax + 3 = 0$, $D = 0$. $4(a-3)(a+3) \leqslant 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = -3$.

Объединяя оба случая, получаем $-3 \leqslant a \leqslant 3$. Наибольшее целое $a = 3$.

Ответ: 3.

599. Найдём производную данной функции: $y' = 6x^2 - 2bx - b$. Функция не имеет экстремумов в двух случаях:
1) Нет критических точек, если уравнение $y' = 0$ не имеет корней. Уравнение $6x^2 - 2bx - b = 0$ не имеет корней, если $D < 0$, $D = 4b^2 + 24b$; $4b(b+6) < 0$, $-6 < b < 0$.
2) Критические точки есть, но «при переходе» через них производная не меняет знака. $6x^2 - 2bx - b$ — полный квадрат;$6x^2 - 2bx - b = 0$, $D = 0$.

$4b(b+6)=0$, $b_1=0$, $b_2=-6$.
Объединяя оба случая, имеем $-6 \leqslant b \leqslant 0$. Наименьшее целое $b=-6$.

Ответ: -6.

600. Функция $y=-\sqrt{t}$ является убывающей и принимает наибольшее значение при $t=3+6a^3x+4x^2$ наименьшем, причём $t \geqslant 0$. $t=4x^2+6a^3x+3$ принимает наименьшее значение при $x=-\dfrac{6a^3}{8}=-\dfrac{3a^3}{4}$; по условию $x=\dfrac{3}{4}$; $-\dfrac{3a^3}{4}=\dfrac{3}{4}$; $a^3=-1$; $a=-1$. Проверим, принимает ли подкоренное выражение при $a=-1$, $x=\dfrac{3}{4}$ неотрицательное значение: $4\cdot\dfrac{9}{4}+6\cdot(-1)\cdot\dfrac{3}{4}+3=9-\dfrac{9}{2}+3=7{,}5>0$.

Ответ: -1.

601. Запишем функцию в виде $y=\dfrac{-1}{\sqrt{mx-18x^2+11}}$. Функция представляет собой дробь с постоянным отрицательным числителем и неотрицательным знаменателем. Следовательно, эта дробь принимает наибольшее значение при наибольшем знаменателе. $y=\sqrt{t}$ — функция возрастающая и принимает наибольшее значение при $t=mx-18x^2+11$ наибольшем, причём t должно быть неотрицательным, $mx-18x^2+11$ — максимальное при $x=\dfrac{m}{36}$; по условию $x=\dfrac{1}{12}$; $\dfrac{m}{36}=\dfrac{1}{12}$; $m=3$. Проверим, будет ли подкоренное выражение положительным при $m=3$, $x=\dfrac{1}{12}$: $3\cdot\dfrac{1}{12}-18\cdot\dfrac{1}{144}+11=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+11>0$.

Ответ: 3.

602. $y=-\sqrt[4]{4+36x^2-3ax}$ Функция $y=-\sqrt[4]{t}$ убывающая и непрерывная, следовательно,наибольшему значению функции соответствует наименьшее значение $t=4+36x^2-3ax$. $t=36x^2-3ax+4$ принимает наименьшее значение при $x=\dfrac{3a}{72}=\dfrac{a}{24}$; по условию $x=\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{a}{24}=\dfrac{1}{4}$; $a=6$. Проверим, принимает ли подкоренное выражение неотрицательное значение при $a=6$, $x=\dfrac{1}{4}$; $4+36\cdot\dfrac{1}{16}-3\cdot6\cdot\dfrac{1}{4}=4+\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{2}=4-\dfrac{9}{4}>0$.

Ответ: 6.

603. Функция $y = \operatorname{arcctg} t$ убывающая и непрерывная, следовательно, наибольшему значению функции соответствует наименьшее значение аргумента. $8x^2 + 5m^2x - \ln m$ $(m > 0)$ имеет наименьшее значение при $x = -\dfrac{5m^2}{16}$; по условию $x = -5$; $-\dfrac{5m^2}{16} = -5$; $m^2 = 16$; $m = 4$, так как $m > 0$.

Ответ: $m = 4$.

604. Функция $y = \operatorname{arctg} t$ возрастающая, имеет наименьшее значение при $t = 9x^2 + 6a^3x + a$ наименьшем, $9x^2 + 6a^3x + a$ принимает наименьшее значение при $x = -\dfrac{6a^3}{18} = -\dfrac{a^3}{3}$; по условию $x = 9$; $-\dfrac{a^3}{3} = 9$; $a^3 = -27$; $a = -3$.

Ответ: -3.

605. Запишем функцию в виде $y = \ln\Big((x+5)(a-2x)\Big)$;
$y = \ln(-2x^2 - (10-a)x + 5a)$. Функция $y = \ln t$ возрастает и непрерывна, имеет наибольшее значение при $t = -2x^2 - (10-a)x + 5a$ принимает наибольшее значение, $-2x^2 - (10-a)x + 5a$ принимает наибольшее значение при $x = \dfrac{10-a}{-4}$; по условию $x = -3$; $\dfrac{10-a}{4} = 3$; $a = -2$. Проверим, будут ли подкоренные выражения под знаком логарифма положительны при $a = -2$, $x = -3$: 1) $x + 5 = -3 + 5 > 0$ 2) $a - 2x = -2 + 6 > 0$.

Ответ: $a = -2$.

606. Функция $y = \operatorname{arcctg} t$ монотонно убывающая. y минимально в точке, в которой t принимает максимальное значение. $t = 13 + 10ax - 2x^2$ имеет максимум в точке $x = \dfrac{-\,10a}{-\,2\cdot 2}$. По условию $x = 15$. Найдём a, решив уравнение $\dfrac{10a}{4} = 15$; $a = 6$.

Ответ: 6.

607. Преобразуем функцию к виду:
$y = 16^{5x^2-1}\cdot 8^{ax-2} = \left(2^4\right)^{5x^2-1}\cdot\left(2^3\right)^{ax-2} = 2^{20x^2+3ax-10}$. Функция $y = 2^t$ — возрастающая и непрерывная. Следовательно, чем меньше значение показателя t, тем меньше значение функции. Поэтому функция $y = 2^{20x^2+3ax-10}$ имеет минимум в той точке, в которой принимает минимальное значение показатель $t = 20x^2 + 3ax - 10$ — квадратный трёхчлен с положительным старшим коэффициентом. Указанный квадратный трёх-

член достигает минимума в точке $x = -\dfrac{B}{2A}$, соответствующей абсциссе вершины параболы, где A — первый коэффициент трёхчлена, а B — второй. Таким образом, $x = -\dfrac{3a}{40}$. Итак, данная функция имеет минимум при $x = -\dfrac{3a}{40}$. Но из условия следует, что минимум должен достигаться при $x = 0{,}15$. Тогда из равенства $-\dfrac{3a}{40} = 0{,}15$ находим, что $a = -2$.

Ответ: -2.

608. $y = 9^{x-x^2} \cdot 3^{x^2-5ax+3} = 3^{2x-2x^2+x^2-5ax+3} = 3^{2x-x^2-5ax+3} =$
$= 3^{-x^2-(5a-2)x+3}$.
Функция $y = 3^t$, $3 > 1$ монотонно возрастающая. y максимально в точке, в которой t достигает максимум. $t = -x^2-(5a-2)x+3$ достигает максимум в точке $x = \dfrac{5a-2}{-2}$. По условию $x = 3$. Найдём a из уравнения $\dfrac{5a-2}{-2} = 3$.
$5a = -4$, $a = -0{,}8$.

Ответ: $-0{,}8$.

609. 1) Пусть 10%-ного раствора взяли x г, тогда собственно соляной кислоты в нем: $\dfrac{x}{10}$ г.

2) В 600 г 15%-ного раствора концентрированной соляной кислоты содержится: $600 \cdot \dfrac{15}{100} = 90$ г кислоты.

3) 30%-ного раствора концентрированной соляной кислоты взяли: $\left(90 - \dfrac{x}{10}\right) \cdot \dfrac{100}{30} = \left(300 - \dfrac{x}{3}\right)$ г.

4) Тогда 10%-ого раствора было:

$$600 - \left(300 - \frac{x}{3}\right) = \left(300 + \frac{x}{3}\right) \text{ г.}$$

Составим уравнение и решим его.

$$x = 300 + \frac{x}{3}, \quad \frac{2}{3}x = 300, \quad x = 450 \text{ г.}$$

Ответ: 450.

610. Если в сплав массой 24 кг добавить x кг олова, то масса нового сплава окажется равной $(24+x)$ кг с 40%-ным содержанием меди, то есть меди в новом сплаве $0{,}4(24+x)$ кг. В 45%-ном сплаве массой 24 кг меди содержится $24 \cdot 0{,}45 = 10{,}8$ кг; эта же количество меди содержится в новом сплаве.

Составим и решим уравнение: $0{,}4(24+x)=10{,}8;\ 24+x=27,\ x=3.$

Значит, 3 кг чистого олова надо добавить в сплав.

Ответ: 3.

611. Пусть 1-ый сосуд содержит $x\%$ щелочи, тогда 2-ой — $(x-40)\%$.

Если 4 л составляют $x\%$ раствора, то всего раствора в 1-ом сосуде $4:\dfrac{x}{100}=\dfrac{400}{x}$ (л); во 2-ом сосуде 6 л щелочи, что составляет $(x-40)\%$ всего объема раствора, значит, весь объем раствора:

$6:\dfrac{x-40}{100}=\dfrac{600}{x-40}$ (л). В двух сосудах $\left(\dfrac{400}{x}+\dfrac{600}{x-40}\right)$ л, а по условию задачи в них 20 л. Составим и решим уравнение: $\dfrac{400}{x}+\dfrac{600}{x-40}=20;$

$x(x-40)\neq 0;\ \dfrac{20}{x}+\dfrac{30}{x-40}=1;\ 20(x-40)+30x=x(x-40);$
$20x-800+30x=x^2-40x;\ x^2-90x+800=0;\ x_{1,2}=45\pm\sqrt{2025-800};$
$x_{1,2}=45\pm\sqrt{1225};\ x_1=45-35;\ x_2=45+35;\ x_1=10;\ x_2=80.$
Оба числа — корни составленного уравнения. По смыслу задачи $x>40$, значит, $x=80$. 80% щелочи содержал 1-ый сосуд.

Ответ: 80.

612. Пусть x — первоначальная масса сплава. Тогда
$x-5$ — количество меди в сплаве;
$\dfrac{x-5}{x}\cdot 100$ — содержание меди в «старом» сплаве в процентах,
$\dfrac{x-5}{x+15}\cdot 100$ — содержание меди в «новом» сплаве в процентах.
Составим и решим уравнение:
$\dfrac{(x-5)\cdot 100}{x}-\dfrac{(x-5)\cdot 100}{x+15}=30,\ 10(x-5)(x+15-x)=3x(x+15),$

$50(x-5)=x(x+15),\ x^2-35x+250=0,\ x_{1,2}=\dfrac{35\pm\sqrt{35^2-250\cdot 4}}{2},$

$x_{1,2}=\dfrac{35\pm 5\sqrt{49-40}}{2}=\dfrac{35\pm 15}{2},\ x_1=25,\ x_2=10.$ Но так как в условии сказано, что $x<20$, то $x=10$ кг.

Ответ: 10.

613. Пусть x г — первоначальная масса сплава. Тогда $(x-80)$ г — масса серебра в сплаве, $\dfrac{80}{x}\cdot 100\%$ содержание в нем золота. После добавления 100 г чистого золота $(x+100)$ г — масса «нового» сплава; $\dfrac{80+100}{x+100}\cdot 100\%$ — содержание золота в «новом» сплаве, и это на 20% выше первоначального.

Составим и решим уравнение: $\dfrac{180}{x+100}\cdot 100-\dfrac{80}{x}\cdot 100=20;$

$\dfrac{180\cdot 5}{x+100}-\dfrac{80\cdot 5}{x}=1;\ x(x+100)\neq 0;\ 180\cdot 5x-80\cdot 5\cdot (x+100)=x(x+100);$
$x^2+100x=900x-400x-40000;\ x^2-400x+40000=0;\ (x-200)^2=0;$
$x=200$ (при $x(x+100)\neq 0$).

200 г — первоначальная масса сплава, серебра в нем $200-80=120$ (г).

Ответ: 120.

614. Пусть x элементов продукции было выпущено в 1-ый месяц, выпуск падал на 40%, значит, во 2-ой месяц выпущено 60% от x, то есть $0{,}6x$ элементов; в 3-ий месяц — 60% от $0{,}6x$, то есть $0{,}36x$ элементов и т. д. Итак, числа выпускаемых ежемесячных элементов составляют геометрическую прогрессию: 1-ый член $b_1=x$, $q=0{,}6$, $n=5$, $b_5=x\cdot q^4$, $b_5=324$, поэтому $x\cdot 0{,}6^4=324$, $x=\dfrac{324}{0{,}6^4}$; $x=2500$, $b_1=2500$.

$\dfrac{b_1(1-q^5)}{1-q}$ — сумма пяти первых членов — число элементов, выпущенных за пять месяцев. $\dfrac{2500\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^5\right)}{1-0{,}6}=6250\cdot\left(1-\dfrac{243}{3125}\right)=$

$=\dfrac{6250\cdot 2882}{3125}=5764.$

Ответ: 5764.

615. Пусть x л содержится уксуса в 6%-ном растворе, тогда
$x=\dfrac{2\cdot 6}{100}=0{,}12$ л.

Пусть y л уксуса содержится в 1%-ном растворе, тогда
$y=\dfrac{3\cdot 1}{100}=0{,}03$ л.

$(x+y)$ л — содержится уксуса в окончательном растворе, что составляет $\dfrac{x+y}{2+3} \cdot 100\% = \dfrac{0{,}12+0{,}03}{5} \cdot 100\% = 3\%$.

Ответ: 3.

616. Обозначим через x — стоимость летней коллекции одежды в рублях, через y — первоначальную прибыль магазина в рублях.

Тогда $(x+y)$ — первоначальная цена коллекции, а $0{,}6(x+y)$ — цена коллекции после снижения. С другой стороны, эту же цену можно определить по формуле $x+0{,}2y$. Имеем уравнение: $0{,}6(x+y) = x+0{,}2y$; $0{,}4y = 0{,}4x$; $\dfrac{y}{x} \cdot 100\% = 100\%$.

Ответ: 100.

617. Пусть x — размер первоначального тарифа в рублях. Тогда $1{,}3x$ — размер тарифа после запланированного увеличения, а $0{,}9 \cdot 1{,}3x$ — размер окончательно утвержденного тарифа. Следовательно, услуги фирмы подорожали на $\dfrac{(0{,}9x \cdot 1{,}3x - x)}{x} \cdot 100\% = 17\%$.

Ответ: 17.

618. Пусть v — количество продукции молокозавода, c_1, c_2 — себестоимость продукции и её отпускная цена до повышения цен, а $\widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_2$ — те же величины после повышения. Тогда планируемый выпуск продукции — $1{,}1v$, прибыль завода до повышения цен — $s = v \cdot (c_2 - c_1)$ у.е., а прибыль завода после увеличения выпуска продукции и повышения цен — $\widetilde{s} = 1{,}1v \cdot (\widetilde{c}_2 - \widetilde{c}_1)$ у.е. По условию, $\widetilde{c}_2 = 1{,}15c_2$, $c_1 = 0{,}75c_2$, $\widetilde{c}_1 = 1{,}2c_1 \Rightarrow$
$s = v \cdot (c_2 - 0{,}75c_2) = 0{,}25v \cdot c_2$, $\widetilde{c}_2 - \widetilde{c}_1 = 1{,}15c_2 - 1{,}2c_1 =$
$= 1{,}15c_2 - 1{,}2 \cdot 0{,}75c_2 = 1{,}15c_2 - 0{,}9c_2 = 0{,}25c_2$, $\widetilde{s} = 1{,}1v \cdot (\widetilde{c}_2 - \widetilde{c}_1) =$
$= 1{,}1v \cdot 0{,}25c_2 \Rightarrow \dfrac{\widetilde{s}}{s} = 1{,}1$, то есть прибыль завода увеличится на 10%.

Ответ: 10.

619. Пусть v — ежемесячный объём продаж услуг до расширения, c — тарифы компании до преобразований, тогда vc — ежемесячная прибыль компании до преобразований. После преобразований ежемесячный объём продаж услуг равен $3v$, тарифы — $0{,}5c$, ежемесячная прибыль — $3v \cdot 0{,}5c = 1{,}5vc$. Значит дополнительная ежемесячная прибыль компании равна
$1{,}5vc - vc = 0{,}5vc$. Затраты на расширение, равные $6vc$, будут компенсированы дополнительной прибылью через $(6vc) : (0{,}5vc) = 12$ месяцев.

Ответ: 12.

620. Пусть в конце года a рублей стоимость золота в изделии, а b рублей стоимость серебра, тогда в начале года $1{,}2a$ рублей стоимость золота, и

$1{,}05b$ рублей стоимость серебра. Зная, что стоимость изделия увеличивается на 15%, составим уравнение:
$1{,}2a + 1,05b = 1{,}15(a+b)$, $1{,}2a - 1{,}15a = 1{,}15b - 1{,}05b$, $0{,}05a = 0{,}1b$, $b = 0{,}5a$.

Примем за x г массу золота в изделии, а за y г массу серебра, тогда $\dfrac{a}{x}$ рублей — цена 1 г золота в начале года, а $\dfrac{b}{y}$ рублей — цена 1 г серебра в начале года. По условию 1 г золота был в 18 раз дороже 1 г серебра, составим уравнение: $\dfrac{a}{x} = \dfrac{18b}{y}$, $\dfrac{a}{x} = \dfrac{18 \cdot 0{,}5a}{y}$, $y = 9x$. Узнаем, какую часть ювелирного изделия составляет золото: $\dfrac{x}{x+9x} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1.

622. Пусть первоначально раствор объёмом 100 л, содержит x л цемента, тогда после того как вылили $\dfrac{2}{5}$ раствора, то цемента осталось $\dfrac{3}{5}x$ л. Бетономешалка после перемешиваний заполнена на $\dfrac{7}{9}$, значит объём полученного раствора $\dfrac{700}{9}$ л. Он содержит 27% цемента. Составим пропорцию:

$$\frac{\dfrac{3}{5}x}{\dfrac{700}{9}} = \frac{27}{100},\ x = 35.$$

Ответ: 35.

623. Пусть $a_1 = 100$ единиц составляет ВВП в первый год, $x\%$ — рост ВВП за год, через год ВВП составляет a_2 единиц, через 2 года $a_3 = 200$.
$a_2 = 100 + \dfrac{100 \cdot x}{100} = 100 + x$; $a_3 = a_2 + a_2 \cdot \dfrac{x}{100} = 100 + x + \dfrac{100+x}{100} \cdot x$;
$a_3 = \dfrac{10000 + x^2 + 200x}{100}$; $a_3 = 200$; $10000 + x^2 + 200x = 20000$;
$x^2 + 200x - 10000 = 0$; $x_{1,2} = -100 \pm \sqrt{10000 + 10000}$. По условию $x > 0$: $x = -100 + \sqrt{20000}$; $x \simeq -100 + 141{,}42 \approx 41\%$.

Ответ: 41%.

624. Пусть a_i — количество самолётов, взлетающих в сутки с i-го по интенсивности аэропорта, тогда $a_1 = 42$, $a_2 = 38$, a_n — арифметическая прогрессия, где $n = 10$, $a_1 = 42$, $d = -4$, $S_{10} = \dfrac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 =$ $= \dfrac{2 \cdot 42 - 36}{2} \cdot 10 = 24 \cdot 10 = 240$. 240 самолётов взлетает в сутки во всех направлениях.

Ответ: 240.

625. Ясно, что максимальную сумму, которую Василий Петрович может взять у банка, нужно вычислять в предположении, что в конце каждого года он будет выплачивать именно по 90 тыс. руб., а не меньше. Пусть s — величина этой суммы. В рачётах за единицу измерения примем 1000 руб. Тогда в конце года, долг Василия Петровича банку, после погашения им 90 тыс. руб. долга, составит $1{,}2 \cdot s - 90$.Ещё через год он должен выплатить банку $1{,}2 \cdot (1{,}2 \cdot s - 90)$, что, согласно нашему предположению, составляет 90 тыс. руб. Решим полученное уравнение: $1{,}2 \cdot (1{,}2 \cdot s - 90) = 90$, $1,44 \cdot s - 108 = 90$, $s = \dfrac{19800}{144} = \dfrac{2200}{16} = \dfrac{275}{2} = 137{,}5$. Таким образом, максимальная сумма, которую Василий Петрович может взять у банка, равна 137500 руб.

Ответ: 137500.

626. Пусть банк выплачивает $p \cdot 100\%$ годовых. Тогда через год, после пополнения Марией Павловной своего счёта на 30 тыс. руб., сумма на её счёте будет составлять $(1 + p) \cdot 20 + 30$ тыс. руб. Еще через год, после начисления банком процентов, эта сумма возрастёт до $(1+p)\cdot((1+p)\cdot 20+30)$ тыс. руб., что, по условию, составляет 60,95 тыс. руб. Решим полученное уравнение: $(1 + p)^2 \cdot 20 + (1 + p) \cdot 30 = 60{,}95$, $20p^2 + 70p - 10{,}95 = 0$, $D = 70^2 + 4 \cdot 20 \cdot 10{,}95 = 5776 = 76^2$, так как по смыслу задачи $p > 0$, то $p = \dfrac{-70 + 76}{40} = 0{,}15$. Таким образом, по виду вклада, открытого Марией Павловной, банк выплачивает 15% годовых.

Ответ: 15.

627. Пусть p — количество примесей в руде до её обогащения. Тогда после первого этапа, количество примесей составит $(1-0{,}2)p = 0{,}8p$. После второго этапа эта величина уменьшится до $0{,}85 \cdot 0{,}8p = 0{,}68p$, а после третьего, количество примесей будет составлять $0{,}9 \cdot 0{,}68p = 0{,}612p$. Таким образом, количество примесей уменьшится на $0{,}388p$, что составляет $\dfrac{0{,}388p}{p} \cdot 100\% = 38,8\%$ от величины p.

Ответ: 38, 8.

628. Пусть S — стоимость перевозки единицы груза до увеличения расценок, а v — объём почты, перевозимой фирмой в это же время. Тогда прежние затраты фирмы на перевозку равны $S \cdot v$. После двух подорожаний, на 20% в первый раз и на 10% во второй, стоимость перевозки единицы груза будет составлять $1{,}1 \cdot 1{,}2S = 1{,}32S$. А объём перевозимой фирмой почты, увеличившийся на 30%, будет равен $1,3v$. Следовательно, увеличившиеся расходы фирмы равны $1{,}32S \cdot 1,3v = 1{,}716S \cdot v$. Таким образом, расходы фирмы возрастут на $0{,}716S \cdot v$, что составляет $\dfrac{0{,}716S \cdot v}{S \cdot v} \cdot 100\% = 71{,}6\%$ от их прежней величины.

Ответ: 71,6.

629. Пусть банок с вишнёвым компотом — x штук, тогда с абрикосовым — $1{,}1x$. Пусть с абрикосовым компотом закупорено y трёхлитровых банок и $(1{,}1x - y)$ — литровых, тогда с вишнёвым компотом — $1{,}25y$ трёхлитровых и $0{,}85(1{,}1x - y)$ литровых. Всего с вишнёвым компотом $\big(1{,}25y + 0{,}85(1{,}1x - y)\big)$ банок. Получаем уравнение:
$1{,}25y + 0{,}85(1{,}1x - y) = x$; $1{,}25y + 0{,}935x - 0{,}85y = x$; $0{,}4y = 0{,}065x$; $y = 0{,}1625x$; $y = (0{,}1625 : 1{,}1) \cdot (1{,}1x)$.
$y \approx 0{,}15 \cdot (1{,}1x)$, то есть трёхлитровые банки составляют 15% от всех закупоренных банок с абрикосовым компотом.

Ответ: 15.

630. Пусть книг по физике выпущено x штук, тогда по математике — $1{,}2x$. Пусть по математике выпущено y книг для девятого класса и $(1{,}2x - y)$ — для одиннадцатого, тогда по физике — $1{,}1y$ книг для девятого класса и $0{,}75(1{,}2x - y)$ для одиннадцатого. Всего по физике $\big(1{,}1y + 0{,}75(1{,}2x - y)\big)$ книг.
Получаем уравнение: $1{,}1y + 0{,}75(1{,}2x - y) = x$; $1{,}1y + 0{,}9x - 0{,}75y = x$; $0{,}35y = 0{,}1x$; $x = 3{,}5y$.
$\dfrac{1{,}1y}{x} \cdot 100\% \approx 31\%$, то есть книги для девятого класса составляют 31% от всех выпущенных по физике.

Ответ: 31.

631. Пусть к 20 кг первого сплава добавили y кг второго сплава. Тогда в получившемся сплаве содержится $0{,}4 \cdot 20 + 0{,}2 \cdot y$ кг серебра. Если серебро составляет 30% от общей массы в $20 + y$ кг получившегося сплава, то справедливо соотношение $0{,}4 \cdot 20 + 0{,}2 \cdot y = 0{,}3(20 + y)$, $8 + 0{,}2y = 6 + 0{,}3y$, $0{,}1y = 2 \Rightarrow y = 20$.

Ответ: 20.

632. Пусть x — количество процентов цинка в первом и втором сплавах. Тогда после того как сплавили 150 кг первого сплава и 150 кг второго сплава, в получившемся сплаве содержится $\frac{x}{100}\cdot 150+\frac{x}{100}\cdot 250$ кг цинка, что составляет 30% от общей массы (400 кг) получившегося сплава. Значит, $\frac{x}{100}\cdot 150+\frac{x}{100}\cdot 250=0{,}3\cdot 400$, $4x=120 \Rightarrow x=30$. Поэтому во втором сплаве содержалось $100-26-30=44\%$ олова. Таким образом, 150 кг первого сплава содержали $0{,}4\cdot 150=60$ кг олова, а 250 кг второго сплава содержали $0{,}44\cdot 250=110$ кг олова. Значит, получившийся сплав содержит $60+110=170$ кг олова.

Ответ: 170.

633. Пусть x — количество процентов песка во втором растворе, тогда $2x$ — количество процентов песка в первом растворе. После того как смешали 300 кг первого раствора и 400 кг второго раствора, получили раствор, в котором содержится $\frac{2x}{100}\cdot 300+\frac{x}{100}\cdot 400$ кг песка, что составляет 30% от общей массы 700 кг получившегося раствора. Значит, $\frac{2x}{100}\cdot 300+\frac{x}{100}\cdot 400=0{,}3\cdot 700$, $10x=210 \Rightarrow x=21$. Поэтому в первом растворе содержалось $100-10-42=48\%$ цемента. Таким образом, 300 кг первого раствора содержали $0{,}48\cdot 300=144$ кг цемента, а 400 кг второго раствора содержали $0{,}4\cdot 400=160$ кг цемента. Значит, получившийся раствор содержит $144+160=304$ кг цемента.

Ответ: 304.

634. Пусть в первой канистре x кг раствора, а во второй y кг. Тогда $\frac{0{,}5(0{,}05x+0{,}1y)}{0{,}5(x+y)}=0{,}07$; $0{,}05x+0{,}1y=0{,}07(x+y)$; $0{,}02x=0{,}03y$; $x:y=3:2$.

Ответ: 1,5.

635. Пусть в первой колбе x кг раствора, а во второй — y кг. Тогда $0{,}01x$ кг уксуса в первой колбе, а 0,05 кг — во второй. После переливания в третьей колбе окажется $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ кг раствора, из которых $\frac{0{,}01x+0{,}05y}{2}$ кг соли. Значит, процентное содержание соли в третьей колбе: $\frac{0{,}01x+0{,}05y}{x+y}\cdot 100\%$, что по условию равно 2%.

$0{,}01 + 0{,}05y = 0{,}02(x + y);\ 0{,}01x = 0{,}03y;\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{1}.$

Следовательно, масса раствора в первой в 3 раза больше, чем во второй.

Ответ: 3.

636. Пусть стоимость старой упаковки равна x, а стоимость сока — y, тогда стоимость пакета сока в этом году — $(x+y)$. По условию стоимость новой упаковки — $1{,}15x$, а стоимость пакета сока в следующем году — $1{,}05(x + y)$. Решим уравнение: $1{,}15x + y = 1{,}05(x + y)$, $0{,}1x = 0{,}05y$, $y = 2x$, $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{x}{x+2x} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{3} \cdot 100\% = 33{,}(3)\%$. Округляя до целого числа, получаем, что в этом году стоимость упаковки составляла 33% от стоимости пакета сока.

Ответ: 33.

637. Пусть стоимость струн из нейлона равна x, а стоимость гитары без струн — y, тогда стоимость всей гитары — $(x + y)$. По условию стоимость металлических струн — $1{,}5x$, а стоимость всей гитары после замены струн — $1{,}01(x + y)$. Решим уравнение: $1{,}5x + y = 1{,}01(x + y)$, $0{,}49x = 0{,}01y$, $y = 49x$, $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{x}{x+49x} = 0{,}02$. Получаем, что стоимость струн из нейлона составляла 2% от стоимости всей гитары.

Ответ: 2.

638. Так как металл содержит 4% примесей, то «чистой руды» в нем содержится 96%. Поэтому в 15 тонн металла содержится $15 \cdot 0{,}96 = 14{,}4$ тонн «чистой руды». Так как в руде содержится 40% примесей, то «чистой руды» в ней содержится 60%. Таким образом, для того чтобы выплавить из руды 15 тонн металла, в руде должно содержаться 14,4 тонн «чистой руды», что составляет 60%. Следовательно, 100% будет составлять $14{,}4 \cdot \dfrac{100}{60} = 24$ тонны руды.

Ответ: 24.

639. Обозначим через x и y процентное содержание хрома соответственно в первом и втором куске чугуна, через P вес каждого из кусков чугуна. Тогда в первом куске чугуна содержалось $P \cdot \dfrac{x}{100}$ кг хрома, а во втором — $P \cdot \dfrac{y}{100}$ кг хрома. Так как в полученном сплаве оказалось 12 кг хрома, то

выполняется равенство $P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 12$. Если бы первый кусок чугуна весил $2P$ кг, то в сплаве содержалось бы $2P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100}$ кг хрома, что, по условию, равняется 16 кг. Учитывая также, что содержание хрома в первом куске чугуна было на 5% меньше чем во втором, получаем систему уравнений $\begin{cases} P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 12, \\ 2P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 16, \\ y - x = 5. \end{cases}$
Разделим первое уравнение системы на второе и, воспользовавшись третьим уравнением, подставим в полученное равенство $y = x + 5$. В результате таких действий получим: $\frac{x + (x+5)}{2x + (x+5)} = \frac{12}{16}$, $\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{3}{4}$, $4(2x+5) = 3(3x+5)$, $x = 5$. Значит, $y = 10$. Значение P найдем из первого уравнения системы: $P \cdot \frac{5}{100} + P \cdot \frac{10}{100} = 12 \Rightarrow P = \frac{12 \cdot 100}{15} = 80$. Итак, полученный из двух одинаковых по весу кусков чугуна сплав весит 160 кг и содержит 12 кг хрома. Следовательно, процентное содержание хрома в таком сплаве равно $\frac{12}{160} \cdot 100 = 7{,}5\%$.

Ответ: 7,5.

640. Пусть сплавили два слитка по P кг, в первом из которых содержится $x\%$ золота, а во втором — $y\%$ золота. Тогда в первом слитке содержалось $P \cdot \frac{x}{100}$ кг золота, а во втором — $P \cdot \frac{y}{100}$ кг золота. Так как в полученном сплаве оказалось 3 кг золота, то выполняется равенство $P \cdot \frac{x}{100} + P \cdot \frac{y}{100} = 3$. Если бы второй слиток весил $2P$ кг, то в сплаве содержалось бы $P \cdot \frac{100 - x}{100} + 2P \cdot \frac{100 - y}{100}$ кг серебра, что по условию равняется 11 кг. Таким образом, учитывая также, что содержание золота в первом слитке было на 20% больше чем во втором, получаем систему уравнений $\begin{cases} P\cdot\dfrac{x}{100}+P\cdot\dfrac{y}{100}=3,\\ P\cdot\dfrac{100-x}{100}+2P\cdot\dfrac{100-y}{100}=11,\\ x-y=20.\end{cases}$ Выразим из последнего уравнения системы x через y: $x=y+20$, подставим его в первые два уравнения и разделим первое уравнение системы на второе. В результате таких действий получим равенство $\dfrac{\dfrac{P}{100}\cdot(y+20+y)}{\dfrac{P}{100}\cdot(100-y-20+2(100-y))}=\dfrac{3}{11}$,

$\dfrac{2y+20}{280-3y}=\dfrac{3}{11}\Rightarrow 11(2y+20)=3(280-3y)\Rightarrow y=20$. Значит, $x=40$.

Значение P найдем из первого уравнения системы $P\cdot\dfrac{40}{100}+P\cdot\dfrac{20}{100}=3\Rightarrow$

$P=\dfrac{3\cdot 100}{60}=5$. Итак, полученный из двух одинаковых по весу, равному 5 кг, слитков сплав весит 10 кг и содержит 3 кг золота. Остальную часть сплава составляет серебро, которого в сплаве содержится $10-3=7$ кг.

Ответ: 7.

641. Концентрация 1-го раствора:

$$\frac{1056}{1056+44}\cdot 100\%=\frac{1056}{1100}\cdot 100\%=\frac{1056}{11}\%=96\%.$$

Концентрация 2-го раствора:

$$\frac{756}{756+1344}\cdot 100\%=\frac{756}{2100}\cdot 100\%=\frac{756}{21}\%=36\%.$$

Пусть нужно взять x г первого раствора и $(1500-x)$ г второго раствора.

Тогда содержание кислоты:

в первом растворе — $\dfrac{96\cdot x}{100}$ г;

во втором растворе — $\dfrac{36(1500-x)}{100}$ г;

в третьем растворе — $\dfrac{40\cdot 1500}{100}$ г.

Составим и решим уравнение:

$\dfrac{96x}{100} + \dfrac{36(1500-x)}{100} = \dfrac{40 \cdot 1500}{100}$, $96x + 36(1500 - x) = 40 \cdot 1500$, $8x + 3(1500 - x) = 5000$, $5x = 500$, $x = 100$.

Ответ: 100.

642. Содержание золота в третьем сплаве $600 \cdot \dfrac{85}{100}$ г.

	1 слиток	2 слиток
масса используемого куска	x г	$(600 - x)$ г
масса золота виспользуемом куске	$x \cdot \dfrac{92}{100}$ г	$(600 - x) \cdot \dfrac{80}{100}$ г

Тогда масса золота в полученном слитке: $\dfrac{x \cdot 92}{100} + (60 - x)\dfrac{80}{100}$ г.

$x \cdot \dfrac{92}{100} + (600 - x) \cdot \dfrac{80}{100} = 600 \cdot \dfrac{85}{100}$; $x = 250$.

Ответ: 250.

643. Пусть x рублей — закупочная цена коллекции, тогда $0{,}8 \cdot x \cdot 0{,}75 = 0{,}6x$ рублей — прибыль после продажи этой части составит 0,75 всей коллекции. Осталось продать 0,25 всей коллекции по цене $1{,}8x \cdot 0{,}4$, тогда прибыль от продажи этой части составляет $0{,}25x \cdot (0{,}72 - 1) = -0{,}07x$ (фактически убыток). Общая прибыль: $0{,}6x - 0{,}07x = 0{,}53x$, что составляет 53% от закупочной цены.

Ответ: 53.

644. Пусть x — закупочная цена коллекции, тогда $2{,}4x$ — цена, по которой салон выставил коллекцию на продажу. Примем все элементы коллекции за единицу. После продажи 0,85 всей коллекции выручка салона составила $2{,}4x \cdot 0{,}85 = 2{,}04x$, а прибыль $2{,}04x - 0{,}85x = 1{,}19x$. Осталось продать $1 - 0{,}85 = 0{,}15$ коллекции. Пусть $k\%$ составила скидка, тогда $2{,}4x \cdot (1 - 0{,}01k) \cdot 0{,}15$ — выручка салона от продажи 0,15 всей коллекции, а прибыль
$2{,}4x \cdot (1 - 0{,}01k) \cdot 0{,}15 - 0{,}15x = 0{,}21x - 0{,}0036xk$. По условию задачи прибыль от продажи всей коллекции составила $1{,}13x$. Составим уравнение $1{,}19x + 0{,}21x - 0{,}0036xk = 1{,}13x$; $k = 75$.

Ответ: 75.

645. Пусть x — закупочная цена портсигара, а y — статуэтки, тогда $1{,}4(x+y)$ — общая выручка магазина от двух предметов. Причём $1{,}35x$ — выручка магазина, за портсигар, а $1{,}6y$ — выручка, полученная за статуэтку. Составим уравнение: $1{,}35 + 1{,}6y = 1{,}4(x + y)$, $\dfrac{x}{y} = 4$.

Следовательно, портсигар обошелся магазину в 4 раза дороже статуэтки.

Ответ: 4.

646. Пусть x — количество шоколада, выпущенного в прошлом году, тогда в новом году шоколада будет $0{,}25x\cdot 1{,}1+0{,}4x+0{,}35x\cdot 1{,}2 = 1{,}095x$, значит выпуск шоколада увеличился на $\dfrac{1{,}095x - x}{x}\cdot 100\% = 9{,}5\%$.

Ответ: 9,5.

647. Пусть x — первоначальное число безработных. Тогда к концу второго года их количество снизилось на $0{,}6x$. Обозначим через $y\%$ снижение безработицы за первый год, тогда $(x - 0{,}01xy)$ — осталось безработных к концу первого года. К концу второго года их число снизилось на $(x-0{,}01xy)\cdot\dfrac{2{,}5y}{100}$ человек. Таким образом, $\dfrac{xy}{100}+\dfrac{xy}{40}\cdot\left(1-\dfrac{y}{100}\right)$ снижение безработицы за два года, что по условию задачи составляет $0{,}6x$. $\dfrac{y}{100}+\dfrac{y}{40}-\dfrac{y^2}{4000}=0{,}6$, $y^2-140y+2400=0$, $y_1=120$, $y_2=20$. Условию задачи удовлетворяет только $y=20$.

Ответ: 20.

648. Пусть 1 — первоначальный размер пенсии, $x\%$ — первое повышение, $1{,}5x\%$ — второе повышение. Из условия следует:
$1+0{,}01x+(1+0{,}01x)\cdot 0{,}015x = 1{,}56$; $3x^2+500x-11200=0$; $x_1=20$, $x_2<0$ — не удовлетворяет условию.

Ответ: 20.

649. Пусть p — производительность до модернизации, тогда t — продолжительность одного квартала, тогда pt — выпущенная продукция за I квартал, а $2pt$ за I и II квартал вместе, за III и IV квартал выпущено $3pt$ (на 50% больше). Всего за год выпущено $5pt$ продукции. Предприятие выпустило продукции больше на $0{,}5pt$, если бы работали по новому со второго квартала, что составляет

$\dfrac{0{,}5pt}{5pt}=\dfrac{1}{10}=10\%$.

Ответ: 10.

650. Пусть p — производительность до модернизации, t — продолжительность одного квартала, тогда pt — выпущенная продукция за 1 квартал, а $2pt$ за I и II квартал вместе. После введения новой технологии производительность составила $1{,}5p$. За III и IV квартал, тогда, выпущено $3pt$ продукции. Всего $5pt$ продукции. Предприятие выпустило бы продукции больше на pt, если бы применяло технологию с I квартала, что составляет $\frac{pt}{5pt} = \frac{1}{5} = 20\%$.

Ответ: 20.

651. Пусть x л— искомое количество воды, тогда $(20-x)$ л кислоты осталось после первого переливания. Её концентрация в растворе была равна $\frac{20-x}{20}$. После второго переливания в сосуде оказалось

$\left(20 - x - \frac{x(20-x)}{20}\right)$ л кислоты, и её концентрация стала равной:

$\dfrac{20 - x - \dfrac{x(20-x)}{20}}{20} = \dfrac{(20-x)^2}{400}$, что по условию равно 0,36.

Составим и решим уравнение:

$\frac{(20-x)^2}{400} = 0{,}36 \Rightarrow x_1 = 8, x_2 = 32$, но $x < 20 \Rightarrow x = 8$.

Ответ: 8.

652. Пусть x — искомое количество воды, тогда $(10-x)$ л масла осталось после первого переливания. Его концентрация была $\frac{10-x}{10}$. После второго переливания в сосуде оказалось $\left(10 - x - \frac{x(10-x)}{10}\right) = \frac{(10-x^2)}{100}$, что по условию равно 0,81.

Составим и решим уравнение:

$\frac{(10-x)^2}{100} = 0{,}81 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 19$, по $x < 10 \Rightarrow x = 1$.

Ответ: 1.

653. $\frac{12}{100} \cdot 45 = 5{,}4$ г. — меди в 12 кг сплава.

$\frac{5{,}4}{40} \cdot 100 = 13{,}5$ (г) — вес нового сплава.

$13{,}5 - 12 = 1{,}5$ г. — олова надо добавить.

Ответ: 1,5.

654. Пусть x — стоимость пакета акций первого июля, а y — 30 сентября, тогда $\frac{x+y}{2} = 1{,}25x$; $y = 1{,}5x$; $\frac{1{,}5x - 1{,}25x}{1{,}25x} = 0{,}2 \cdot 100\% = 20\%$.

Ответ: 20.

655. Пусть x — цена товара без наценки, тогда выручка магазина: $0{,}6 \cdot 1{,}45x + 0{,}4 \cdot 1{,}45x \cdot 0{,}6 = 1{,}218x$. Значит, прибыль магазина $1{,}218x - x = 0{,}218x$.

Ответ: 21,8.

658. $12{,}5 \cdot 0{,}4 = 5$ (кг) — масса меди в сплаве.

$12{,}5 - 5 = 7{,}5$ (кг) — масса цинка в сплаве.

$7{,}5 - 5 = 2{,}5$ (кг) — надо добавить меди, чтобы меди и цинка в сплаве было поровну.

Ответ: 2,5.

659. В полученном растворе $600 \cdot 0{,}18 = 108$ (г) соляной кислоты, значит изначально в растворе было $108 - 100 = 8$ (г) кислоты.

Ответ: 8.

660. За 2 минуты, то есть за 120 секунд, скачается 0,25 Мб/с $\cdot$ 120 с = = 30 Мб. Число 30 составляет $\frac{30}{75} \cdot 100\% = 40\%$ от числа 75.

Ответ: 40.

661. Скорость скачивания равна $\frac{1{,}5}{27}$ Мб/с $= \frac{1}{18}$ Мб/с. После увеличения на 20% скорость станет равна $\frac{1}{18} \cdot 1{,}2$ Мб/с $= \frac{1}{15}$ Мб/с.

Файл величиной 80 Мб скачается за $80 : \frac{1}{15} = 1200$ с, то есть за 20 минут.

Ответ: 20.

662. В первый раз тётя Маша купила черешню по цене $\frac{90}{0{,}9} = 100$ рублей за килограмм, то есть потратила всего $100 + 30 = 190$ рублей.

Ответ: 190.

663. Пусть объём первого раствора равен x л, тогда второго — $(19 - x)$ л. Процентное содержание щёлочи в первом растворе равно $\frac{5}{x} \cdot 100\%$, а во втором — $\frac{2}{19 - x} \cdot 100\%$.

Из условия следует, что $\frac{5}{x} \cdot 100\% \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{19 - x} \cdot 100\%$, $\frac{15}{x} = \frac{4}{19 - x}$, $15(19 - x) = 4x$, $15 \cdot 19 = 19x$, $x = 15$.

Ответ: 15.

664. Флэш карта объёмом 32 Гб стоила $1200 \cdot 1{,}6 = 1920$ рублей, тогда всего Эльдар потратил $1200 + 1920 = 3120$ рублей.

Ответ: 3120.

665. Пусть масса второго сплава равна x кг, тогда масса первого — $(44-x)$ кг. Процентное содержание олова во втором сплаве равно $\dfrac{7}{x} \cdot 100\%$, а в первом — $\dfrac{5}{44-x} \cdot 100\%$. Из условия следует, что

$\dfrac{7}{x} \cdot 100\% = 3 \cdot \dfrac{5}{44-x} \cdot 100\%$, $\dfrac{7}{x} = \dfrac{15}{44-x}$, $7(44-x) = 15x$, $7 \cdot 44 = 22x$, $x = 14$.

Ответ: 14.

666. Расфасовано в пакеты $30 - 0,4 \cdot 30 = 18$(ц) $= 1800$ (кг). Для этого понадобится $1800 : 2 = 900$ (пакетов), то есть $900 : 40 = 22,5$ (ящика). Таким образом, чтобы расфасовать муку, потребуется 23 яшика.

Ответ: 23.

667. После подорожания на 15% комплект учебников будет стоить $420 \cdot 1,15 = 483$ (руб.). Выясним, какое максимальное число комплектов можно купить на 5000 рублей после подорожания: $5000 : 483 \approx 10,35$. Значит, на 5000 рублей можно купить не более 10 комплектов учебников.

Ответ: 10.

668. До уценки один мяч стоил $900 : 20 = 45$ (руб.). После уценки один мяч стал стоить $45 \cdot 0,9 = 40,5$ (руб.).

Выясним, какое максимальное количество мячей можно приобрести на 900 рублей после уценки. $900 : 40,5 \approx 22,2$. Значит, на 900 рублей можно купить не более 22-х мячей.

Ответ: 22.

669. $87 : (20 \cdot 0{,}9) = 4{,}8$. Для перевозки школьников потребуется 5 такси.

Ответ: 5.

670. За 2 часа операционист обслужит $\dfrac{2 \cdot 60}{10} = 12$ клиентов, что составляет $\dfrac{12}{30} \cdot 100\% = 40\%$ от общего числа клиентов.

Ответ: 40.

671. Так как шоколадки и с орехами, и с изюмом учитываются при подсчёте шоколадок каждого из двух указанных видов, то в сумме $\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{6}$ они учитываются дважды. То есть всего $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)-1=\frac{1}{2}$ шоколадок содержат и орехи, и изюм. $\frac{1}{2}\cdot 100\% = 50\%$.

Ответ: 50.

672. Так как студенты, владеющие обоими языками, учитываются при подсчёте студентов, владеющих каждым из языков, то в сумме $\frac{3}{5}+\frac{7}{10}$ они учитываются дважды. То есть всего $\left(\frac{3}{5}+\frac{7}{10}\right)-1=0{,}3$ студентов владеют обоими языками.

$0{,}3\cdot 100\% = 30\%$.

Ответ: 30.

673. $20\cdot 1{,}25=25$ (руб.) — новая цена открытки. $200:25=8$, значит, можно будет купить 8 открыток.

Ответ: 8.

674. $10\cdot 0{,}9=9$ (руб.) — новая цена метра сетевого кабеля. $300:9=33\frac{1}{3}$, значит, можно будет купить 33 м.

Ответ: 33.

675. После увеличения производительности тракторист будет вспахивать $8\cdot 1{,}25=10$ га пашни за день, тогда, чтобы вспахать поле площадью 120 га ему понадобится $\frac{120}{10}=12$ дней.

Ответ: 12.

676. После снижения цены пирожок будет стоить $12\cdot 0{,}75=9$ рублей. $50:9=5\frac{5}{9}$, значит, максимум можно будет купить 5 пирожков.

Ответ: 5.

677. Введём в рассмотрение арифметическую прогрессию, 1-ый член которой $a_1=720$, $d=-40$, n — число дней путешествия, а i — число километров, пройденного в i-й день. Длина пройденного пути — $S_n=5040$ км. Сумма n первых членов введенной прогрессии: $\frac{2\cdot 720-40(n-1)}{2}\cdot n=5040$.

Решение уравнения:
$(720-20(n-1))\cdot n=5040$;
$720n-20n^2+20n-5040=0$; $n^2-37n+252=0$;

$D = 37^2 - 4 \cdot 252 = 361$; $n_{1,2} = \dfrac{37 \pm \sqrt{361}}{2}$; $n_{1,2} = \dfrac{37 \pm 19}{2}$; $n_1 = 9$; $n_2 = 28$ (противоречит смыслу задачи).

9 дней путешествовал автотурист.

Ответ: 9.

678. Рассмотрим движение мотоциклиста на участке от шлагбаума до места назначения: длина его $90 - 54 = 36$ (км); если плановая скорость x км/ч, то время движения $\dfrac{36}{x}$ ч. Из-за остановки в течение

5 мин. $= \dfrac{1}{12}$ ч, мотоциклист поехал со скоростью $(x+6)$ км/ч и 36 км проехал за $\dfrac{36}{x+6}$ ч. По условию задачи он прибыл в намеченное время, значит: $\dfrac{36}{x+6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{36}{x}$. Решение уравнения: $36 \cdot 12x + x(x+6) = 36 \cdot 12(x+6)$; $x^2 + 6x = 36 \cdot 12 \cdot 6$; $x^2 + 6x - 2592 = 0$; $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 2592}$; $x_1 = -54$; $x_2 = 48$.

Оба числа входят удовлетворяют условию $x(x+6) \neq 0$, но $x = -54$ не удовлетворяет смыслу задачи.

48 км/ч — первоначальная скорость мотоцикла.

Ответ: 48.

679. Пусть t — искомое время до момента встречи, C — точка встречи автомобилей, а v_1, v_2 — скорость 1-ого и 2-ого автомобилей соответственно. Тогда 1-ый автомобиль преодолел расстояние от A до C (обозначим его AC) за t часов, а расстояние от C до B (обозначим его BC) за $15 - t$ часов, то есть $v_1 \cdot t = AC$, $v_1 \cdot (15 - t) = BC$. Аналогично для 2-ого автомобиля имеем: $v_2 \cdot t = BC$, $v_2 \cdot 4 = AC$. Следовательно, v_1, v_2, t удовлетворяют системе: $\begin{cases} v_1 \cdot t = v_2 \cdot 4, \\ v_2 \cdot t = v_1 \cdot (15 - t). \end{cases}$

Перемножая левые и правые части этих уравнений и сокращая на $v_1 \cdot v_2$, получаем, $t^2 = (15-t) \cdot 4$, $t^2 + 4t - 60 = 0$, $t_1 = -10$, $t_2 = 6$. Отрицательное значение t противоречит смыслу задачи, поэтому $t = 6$ часов.

Ответ: 6.

680. Пусть t — искомое время, прошедшее от начала движения до момента встречи пешехода и велосипедиста, измеряемое в часах, C — точка их встречи, v_1 — скорость велосипедиста, v_2 — скорость пешехода. По условию, велосипедист прибыл в пункт B через 45 минут, что составляет

$\frac{3}{4}$ часа, следовательно, на дорогу от C до B он затратил $\frac{3}{4} - t$ часа. Имеем: $AC = v_1 \cdot t$, $BC = v_1 \cdot \left(\frac{3}{4} - t\right)$. С другой стороны, записав условие задачи для пешехода, получим: $BC = v_2 \cdot t$, $AC = v_2 \cdot 1$. Значит, v_1, v_2, t удовлетворяют системе: $\begin{cases} v_1 \cdot \left(\frac{3}{4} - t\right) = v_2 \cdot t, \\ v_2 = v_1 \cdot t. \end{cases}$

Перемножая левые и правые части этих уравнений и сокращая на $v_1 \cdot v_2$, получим: $\frac{3}{4} - t = t^2$, $4t^2 + 4t - 3 = 0$, $t_1 = -\frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Отрицательное значение t не удовлетворяет смыслу задачи, поэтому $t = \frac{1}{2}$ часа, что составляет 30 минут.

Ответ: 30.

681. Пусть t — время (в сек), прошедшее от момента поворота 1-ого спортсмена до момента встречи со 2-ым спортсменом. Тогда $2(t + 25)$ сек — искомое время, затраченное 1-ым спортсменом. Обозначим через v_1, v_2 скорости 1-ого и 2-ого спортсменов, через A точку старта спортсменов, а через B и C — второй конец бассейна и точку их встречи соотвественно. Тогда из условий задачи имеем: $v_1 \cdot t = BC$, $v_1 \cdot 25 = AC$; $v_2 \cdot t = AC$, $v_2 \cdot (36 - t) = BC$. Следовательно, v_1, v_2, t удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} v_1 \cdot t = v_2 \cdot (36 - t), \\ v_2 \cdot t = v_1 \cdot 25. \end{cases}$$

Перемножив эти уравнения и сократив на $v_1 \cdot v_2$, получим: $t^2 = (36 - t) \cdot 25$, $t^2 + 25t - 900 = 0$, $t_1 = -45$, $t_2 = 20$. Отрицательное значение t не удовлетворяет смыслу задачи. Поэтому $t = 20$, а общее время, затраченное 1-ым спортсменом составляет $2 \cdot (25 + 20) = 90$ сек, в минутах — 1,5 минуты.

Ответ: 1,5.

682. Пусть v км/ч – собственная скорость катера. Тогда против течения он плыл со скоростью $(v - 5)$ км/ч, а по течению – со скоростью $(v + 5)$ км/ч. На путь против течения катер затратил $\frac{10}{v - 5}$ ч, а на путь по течению – $\frac{45}{v + 5}$ ч. Составим уравнение: $\frac{10}{v - 5} + \frac{45}{v + 5} = 2$. Решим его: $\frac{10}{v - 5} + \frac{45}{v + 5} = 2 \Leftrightarrow$

$10(v+5)+45(v-5) = 2(v^2-25) \Leftrightarrow 2v^2-55v+125 = 0,\ v_1 = \dfrac{5}{2},\ v_2 = 25.$
v_1 не удовлетворяет условию задачи, так как с такой скоростью катер не может двигаться против течения реки. Значит, $v = 25$ км/ч.

Ответ: 25.

683. Ученик бежал $20 \cdot \dfrac{2}{60} = \dfrac{2}{3}$ км. Пусть x — расстояние, которое он должен был пробежать со скоростью 20 км/ч, а не пройти, чтобы успеть. Так как проходя это расстояние со скоростью 5 км/ч, он опоздал на минуту, то $\dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{20} = \dfrac{1}{60}$, откуда $x = \dfrac{1}{9}$. Все расстояние, которое ему следовало пробежать, составляет $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{7}{9}$ км/ч. Разделив $\dfrac{7}{9}$ км/ч на скорость 20 км/ч, получим $\dfrac{7}{180}$ часа или 140 секунд.

Ответ: 140.

684. Чтобы прийти на 5 минут раньше, студенту нужно компенсировать это время, значит он должен пройти со скоростью 6 км/ч расстояние, которое он прошел бы со скоростью 2 км/ч за 5 минут без потери времени. Так как $\dfrac{6\text{ км/ч}}{2\text{ км/ч}} = 3$, то 5 минут — это $\dfrac{2}{3}$ времени, затраченного на компенсацию, следовательно полное время компенсации равно 7,5 минут. $7{,}5 + 5 = 12{,}5$.

Ответ: 12,5.

686. 40 мин $= \dfrac{40}{60}$ ч $= \dfrac{2}{3}$ ч.

Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, $x > 2$.

	v (км/ч)	t (ч)	s (км)
по течению	$x+2$	$\dfrac{16}{x+2}$	16
против течения	$x-2$	$\dfrac{16}{x-2}$	16

По условию лодка затратила на обратный путь на $\dfrac{2}{3}$ часа больше. Составим и решим уравнение:

$\dfrac{16}{x-2} - \dfrac{16}{x+2} = \dfrac{2}{3}$; $24(x+2) - 24(x-2) = x^2 - 4$; $x^2 - 4 = 96$, $x^2 = 100$; $x_1 = 10$, $x_2 = -10$ — не удовлетворяет условию $x > 2$.

$v_с = 10$ км/ч — скорость лодки в стоячей воде, $v_р = 2$ км/ч — скорость течения реки.

$\dfrac{v_с}{v_р} = \dfrac{10 \text{ км/ч}}{2 \text{ км/ч}} = 5$

В 5 раз скорость лодки в стоячей воде больше скорости течения реки.

Ответ: 5.

687. Пусть x км/ч — собственная скорость теплохода, тогда его скорость по течению равна $(x+4)$ км/ч, а против течения — $(x-4)$ км/ч. К моменту встречи теплохода с плотом плот прошёл 30 км за $\dfrac{30}{4} = 7{,}5$ часов. Время, которое до этого момента находился в пути теплоход, описывается формулой $\dfrac{42}{x+4} + 1 + \dfrac{12}{x-4}$. Получаем уравнение: $\dfrac{42}{x+4} + 1 + \dfrac{12}{x-4} = 7{,}5$; $42(x-4) + 12(x+4) = 6{,}5(x^2 - 16)$; $13x^2 - 108x + 32 = 0$; $x_1 = \dfrac{4}{13}$, $x_2 = 8$.

По смыслу задачи скорость теплохода больше скорости течения, тогда скорость теплохода равна 8, то есть в 2 раза больше скорости течения.

Ответ: 2.

688. Пусть x км/ч — собственная скорость теплохода, y км/ч — скорость течения реки, S км — расстояние от пристани A до пристани B.

По условию $S = 3(x+y)$, $S = 4(x-y)$, требуется найти $\dfrac{S}{y}$.

$3(x+y) = 4(x-y)$, $x = 7y$, $S = 3(x+y) = 24y$, тогда $\dfrac{S}{y} = 24$.

Ответ: 24.

690. Пусть x км/ч — первоначальная скорость автобуса, y км/ч — скорость маршрутного такси. Тогда автобус 180 км прошёл за $\dfrac{180}{x}$ ч, а такси — за $\dfrac{180}{y}$ ч. Из условия следует, что автобус был в пути на 27 мин дольше. Значит, $\dfrac{180}{x} - \dfrac{180}{y} = \dfrac{27}{60} = \dfrac{9}{20}$.

После изменения скорости автобус прошёл 180 км — за $\dfrac{180}{x+10}$ ч, а маршрутное такси — за $\dfrac{180}{y-10}$ ч. Из условия следует $\dfrac{180}{x+10} = \dfrac{180}{y-10}$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{180}{x} - \dfrac{180}{y} = \dfrac{9}{20}, \\ \dfrac{1}{x+10} = \dfrac{1}{y-10}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x+20, \\ \dfrac{20}{x} - \dfrac{20}{x+20} = \dfrac{1}{20}. \end{cases}$$

Отсюда: $x + 20 - x = \dfrac{x^2+20x}{400}$; $x^2 + 20x - 8000 = 0$; $x_1 = -100$; $x_2 = 80$.

По смыслу задачи $x > 0$, значит искомое значение скорости автобуса равно 80 км/ч.

Ответ: 80.

691. Пусть V_1 км/ч — скорость первого велосипедиста, V_2 км/ч — скорость второго велосипедиста, S км — протяжённость дистанции (см. рис. 21). Очевидно, что длина дистанции для обоих велосипедистов одинакова. Тогда первый велосипедист прошёл всю дистанцию за время $\dfrac{S}{V_1}$ ч, а второй за $\dfrac{S}{V_2}$ ч.

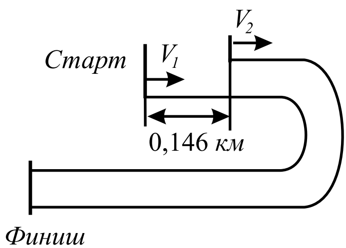


Рис. 21.

По условию первый велосипедист финишировал на 30 минут раньше, значит $\dfrac{S}{V_2} - \dfrac{S}{V_1} = \dfrac{30}{60}$. Кроме того, первый велосипедист расстояние, равное $\dfrac{S}{120}$ км, прошёл за 1 минуту. Значит, $V_1\dfrac{1}{60} = \dfrac{S}{120}$; $S = 2V_1$. Второй велосипедист за 1 минуту, согласно условию, прошёл расстояние

$\left(\dfrac{S}{120}-0{,}146\right)$ км. Значит, $\dfrac{\dfrac{S}{120}-0{,}146}{V_2}=\dfrac{\dfrac{S}{120}}{V_1}$;

$\dfrac{S-120\cdot 0{,}146}{V_2}=\dfrac{S}{V_1}$. Учитывая, что $S=2V_1$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{2V_1}{V_2}-\dfrac{2V_1}{V_1}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{2V_1-120\cdot 0{,}146}{V_2}=\dfrac{2V_1}{V_1};\end{cases}\qquad \begin{cases}V_2=\dfrac{2V_1}{2{,}5},\\ V_2=\dfrac{2V_1-120\cdot 0{,}146}{2};\end{cases}$$

$\dfrac{2V_1}{2{,}5}=V_1-8{,}76.$

$0{,}5V_1=21{,}9$; $V_1=43{,}8$ км/ч.

Ответ: 43,8.

692. Пусть s км — расстояние между пунктами A и B, v км/ч — искомая скорость. Тогда на весь путь первый автомобиль затратил $\dfrac{s}{v}$ часов, а второй — $\left(\dfrac{0{,}5s}{30}+\dfrac{0{,}5s}{v+20}\right)$ часов. Так как в пункт B автомобили прибыли одновременно, то условию задачи соответствует уравнение $\dfrac{s}{v}=\dfrac{0{,}5s}{30}+\dfrac{0{,}5s}{v+20}$, где $v>0$. $\dfrac{2}{v}=\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{v+20}$; $60(v+20)=$ $=v(v+20)+30v$; $v^2-10v-1200=0$; $v_{1,2}=5\pm 35$. Так как $v>0$, то $v=5+35=40$ км/ч.

Ответ: 40.

693. Обозначим всю работу за 1. Для выполнения всей работы: 1-му крану требуется x часов; 2-му крану — $4x$ часов; а 3-му крану — $(x-9)$ часов.

Тогда производительность: 1-го крана — $\dfrac{1}{x}$ всей работы в час; 2-го крана — $\dfrac{1}{4x}$ всей работы в час; 3-го крана — $\dfrac{1}{x-9}$ всей работы в час.

Производительность трёх кранов вместе (при их совместной работе):

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{x-9}\right)\text{ всей работы в час.}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{x-9}=\frac{4(x-9)+(x-9)+4x}{4x(x-9)}=\frac{9x-45}{4x(x-9)}.$$

Всю работу три крана выполнили бы (при совместной работе) за

$\left(1 : \dfrac{9x-45}{4x(x-9)} = \dfrac{4x(x-9)}{9(x-5)}\right)$ часов, что по условию равно 18 часов.

$$\frac{4x(x-9)}{9(x-5)} = 18,\ 4x(x-9) = 9\cdot 18\cdot (x-5),$$
$$2x(x-9) = 81(x-5),$$
$$2x^2 - 18x - 81x + 81\cdot 5 = 0,\ 2x^2 - 99x + 81\cdot 5 = 0.$$
$$x_{1,2} = \frac{99 \pm \sqrt{99^2 - 4\cdot 2\cdot 81\cdot 5}}{4} = \frac{99 \pm \sqrt{9^2(11^2 - 4\cdot 2\cdot 5)}}{4} =$$
$$= \frac{99 \pm 9\sqrt{121-40}}{4} = \frac{99 \pm 9\cdot 9}{4}.\ \ x_1 = \frac{180}{4} = 45,\ x_2 = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$

$x_2 = \dfrac{9}{2}$ не удовлетворяет условию задачи, так как один кран не может выполнить всю работу быстрее, чем три крана вместе. Значит, $x = 45$ часов. Понятно, что 1-й и 3-й краны работают быстрее, чем любой из них вместе 2-м . Следовательно, время их совместная разгрузки и будет наименьшим.

Для выполнения всей работы требуется: 1-му крану — 45 часов, 3-му крану — 36 часов. Производительность: 1-го крана — $\dfrac{1}{45}$, 3-го крана — $\dfrac{1}{36}$. Совместная производительность 1-го и 3-го крана: $\dfrac{1}{45} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{4+5}{180} = \dfrac{9}{180} = \dfrac{1}{20}$. Всю работу 1-й и 3-й краны при совместной работе выполняют за $1 : \dfrac{1}{20} = 20$ часов.

Ответ: 20.

694. Примем объем всей работы за 1. При совместном действии задание выполняется за 30 ч, значит, за 1 ч — $\dfrac{1}{30}$ часть всей работы, за 6 ч — $\dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5}$ ее. После 6 ч совместной работы осталось выполнить $1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$ задания, что выполнил 2-ой механизм за 40 ч. Отсюда его производительность $\dfrac{4}{5} : 40 = \dfrac{1}{50}$ всей работы в час, а 1-го механизма — $\dfrac{1}{30} - \dfrac{1}{50} = \dfrac{1}{75}$ всей работы. На выполнение всего задания 1-му потребовалось бы $1 : \dfrac{1}{75} = 75$ часов.

Ответ: 75.

695. Примем длину тоннеля за 1. Если 1-ый «крот» прорыл бы весь тоннель самостоятельно за x дней, то его производительность $\dfrac{1}{x}$ длины в день, а производительность двух «кротов» при совместной работе — $\dfrac{1}{27}$ длины тоннеля в день, тогда 2-го «крота» — $\left(\dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{x}\right)$ длины в день. Вместе два «крота» рыли $\dfrac{1}{3} : \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{3}$ дней. За эти дни 1-ый «крот» вырыл $\dfrac{1}{3}$ длины, 2-ой — $\left(\dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x}{3}$ длины, а вместе они вырыли $\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{81}$ длины тоннеля. Оставшуюся часть длины тоннеля $\left(1 - \dfrac{x}{81}\right)$ 1-ый «крот» вырыл за 8 дней при производительности $\dfrac{1}{x}$ длины в день, то есть, он вырыл $\dfrac{8}{x}$ длины тоннеля. Уравнение: $1 - \dfrac{x}{81} = \dfrac{8}{x}$, $x > 0$; $81x - x^2 = 8 \cdot 81$; $x^2 - 81x + 648 = 0$; $D = 81^2 - 4 \cdot 648 = 6561 - 2592 = 3969$; $x_{1,2} = \dfrac{81 \pm 63}{2}$; $x_1 = 9$; $x_2 = 72$. Оба числа удовлетворяют условию $x > 0$. Смыслу задачи соотвествует $x = 72$.

За 72 дня 1-ый «крот» прорыл бы весь тоннель.

Ответ: 72.

696. Выполнение работы в процентах от всей порученной составляет арифметическую прогрессию: $a_1 = 18$, $d = 1$, $S_n = 100$, n — число дней выполнения всей работы. $\dfrac{2 \cdot 18 + (n-1)}{2} \cdot n = 100$; $n^2 + 35n - 200 = 0$. По теореме, обратной теореме Виета, $n_1 = -40$ (что не удовлетворяет условию задачи: $n \in N$.), $n_2 = 5$.

За 5 дней рабочий выполнит всю работу.

Ответ: 5.

697. Промежутки времени, необходимые на решение каждой задачи, составляет арифметическую прогрессию: $a_1 = 1{,}8$, $d = -0{,}2$, $S_{n-1} = 7{,}8$, n — число предложенных задач.

$S_{n-1} = \dfrac{2a_1 + d(n-2)}{2} \cdot (n-1)$; $\dfrac{2 \cdot 1{,}8 - 0{,}2(n-2)}{2} \cdot (n-1) = 7{,}8$;
$(1{,}8 - 0{,}1(n-2))(n-1) = 7{,}8$; $(2 - 0{,}1n)(n-1) = 7{,}8$;
$2n - 2 - 0{,}1n^2 + 0{,}1n = 7{,}8$; $0{,}1n^2 - 2{,}1n + 9{,}8 = 0$; $n^2 - 21n + 98 = 0$;
$D = 441 - 392 = 49$; $n_{1,2} = \dfrac{21 \pm 7}{2}$; $n_1 = 7$, $n_2 = 14$. Время решения задачи — число положительное, то есть $a_n > 0$. Определим число положительных членов прогрессии: $a_1 + d(n-1) > 0$, $1{,}8 - 0{,}2(n-1) > 0$, $-0{,}2(n-1) > -1{,}8$, $n - 1 < 9$, $n < 10$. $7 < 10$, значит, 7-ой член прогрессии положительный; $14 > 10$, то есть 14-ый член — отрицательный. 7 — число предложенных задач.

Ответ: 7.

698. Введём в рассмотрение арифметическую прогрессию, каждый член a_n которой означает число задач, решенных школьником в n-ый день. Из условия следует, что разность d этой прогрессии — натуральное число. Общее количество рассмотренных им задач за первые 20 дней — сумма первых 20 членов введенной прогрессии $\dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20$, после упрощения $(a_1 + a_{20}) \cdot 10$. (1)

Число задач, решенных за последние 10 дней, можно определить как сумму первых 10 членов арифметической прогрессии (b_n) :
$b_1 = a_{21}$, $b_{10} = a_{30}$: $b_1 + b_{10} \cdot 5$ (2) По условию суммы (1) и (2) равны: $(a_1 + a_{20}) \cdot 10 = (a_{21} + a_{30}) \cdot 5$. Зная, что $a_n = a_1 + d(n-1)$, получим $(2a_1 + 19d) \cdot 2 = 2a_1 + 49d$; $4a_1 + 38d = 2a_1 + 49d$; $2a_1 = 11d$; $a_1 = \dfrac{11}{2}d$. Найдём число задач, решенных за первые и за последние 15 дней: $\dfrac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7d) \cdot 15$; $\dfrac{a_{16} + a_{30}}{2} \cdot 15 = (a_1 + 22d) \cdot 15$. Определим, во сколько раз больше школьник рассмотрел задач за последние 15 дней по сравнению с первыми 15-ю днями: $\dfrac{(a_1 + 22d) \cdot 15}{(a_1 + 7d) \cdot 15} = \dfrac{a_1 + 22d}{a_1 + 7d}$.

Так как $a_1 = \dfrac{11}{2}d$, получим $\dfrac{\frac{11}{2}d + 22d}{\frac{11}{2}d + 7d} = \dfrac{11d + 44d}{11d + 14d} = \dfrac{55d}{25d} = 2{,}2$.

Ответ: 2,2.

699. Увеличение числа на 200% означает прибавление к данному числу числа, вдвое бóльшего. Если в 1-ый день вырубили x сосен, то во 2-ой

день: $x+2x = 3x$, это по условию 12, отсюда $x = 4$; в 3-ий — $3x+6x = 9x$; в 4-ый — $9x + 18x = 27x, \dots$
Числа сосен, вырубаемых ежедневно, в течение n дней, составляют геометрическую прогрессию: $b_1 = 4$, $q = 3$, $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, что по условию задачи равно 2916. Уравнение: $4 \cdot 3^{n-1} = 2916$, $4 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^6$, $3^{n-1} = 3^6$, $n - 1 = 6$, $n = 7$.

7 дней продолжалась вырубка сосен.

Ответ: 7.

700. Если x деталей в час — производительность опытного рабочего, то молодого — $(x - 5)$. 40 деталей опытный рабочий изготавливает за $\dfrac{40}{x}$ ч, а молодой — 30 деталей за $\dfrac{30}{x-5}$ ч, что по условию задачи на 2 ч дольше. Уравнение: $\dfrac{30}{x-5} - \dfrac{40}{x} = 2$, $x(x - 5) \neq 0$ $\dfrac{15}{x-5} - \dfrac{20}{x} = 1$; $15x - 20(x-5) = x(x-5)$; $x^2 - 5x = 15x - 20x + 100$; $x^2 = 100$; $x_1 = -10$, $x_2 = 10$. Оба числа удовлетворяют условию $x(x - 5) \neq 0$, а значит, они корни уравнения (1). Смыслу задачи $x > 5$ соответствует $x = 10$. 10 штук в час изготавливает опытный рабочий, молодой: $10 - 5 = 5$ (штук в час), вместе за час: $10 + 5 = 15$ штук, значит, 120 деталей изготовят за $120 : 15 = 8$ часов.

Ответ: 8.

701. Пусть x автомобилей за 1 час обслуживает ручная мойка, тогда автоматизированная — $(x + 7)$. 45 автомобилей ручная мойка обслуживает за $\dfrac{45}{x}$ ч, 20 автомобилей автоматизированная мойка — за $\dfrac{20}{x+7}$ ч, что по условию задачи на 5 ч меньше, чем $\dfrac{45}{x}$ ч.

Уравнение: $\dfrac{20}{x+7} + 5 = \dfrac{45}{x}$, $x(x - 7) \neq 0$. (1)

$\dfrac{4}{x+7} + 1 = \dfrac{9}{x}$; $4x + x(x + 7) = 9(x + 7)$; $4x + x^2 + 7x = 9x + 63$; $x^2 + 2x - 63 = 0$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 63}$; $x_{1,2} = -1 \pm 8$; $x_1 = -9$, $x_2 = 7$.

Числа -9 и 7 удовлетворяют условию $x(x + 7) \neq 0$, значит, они корни уравнения (1), но $x = -9$ не соответствует смыслу задачи, поэтому $x = 7$.

Ручная мойка 105 машин обслужит за $\dfrac{105}{7} = 15$ (часов).

Ответ: 15.

702. Если на выполнение задания бригада рабочих затратила x дней, то она изготовливала $\dfrac{360}{x}$ деталей в день. Предполагалось изготовить по плану 360 деталей за $(x+1)$ дней, то есть по $\dfrac{360}{x+1}$ деталей в день, и это на 4 меньше, чем $\dfrac{360}{x}$. Уравнение: $\dfrac{360}{x+1} + 4 = \dfrac{360}{x}$, $x(x+1) \neq 0$; $\dfrac{90}{x+1} + 1 = \dfrac{90}{x}$; $90x + x^2 + x = 90x + 90$; $x^2 + x - 90 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+360}}{2}$; $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 19}{2}$; $x_1 = -10$, $x_2 = 9$. При $x_1 = -10$, $x_2 = 9$, $x(x+1) \neq 0$. $x = 9$ соответствует смыслу задачи.

9 дней затратила бригада на выполнение задания.

Ответ: 9.

703. Введём в рассмотрение арифметическую прогрессию, каждый член a_n которой означает промежуток времени решения n-ой задачи; Разность этой прогрессии равна 6 мин. Если n — число заданных задач, а S_n — сумма первых n членов введенной прогрессии, то математическая запись условия задачи принимает вид уравнения:

$\dfrac{2 \cdot 60 - 6(n-1)}{2} \cdot n = 324$, так как $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$;

$(60 - 3(n-1))n = 324$; $60n - 3n^2 + 3n = 324$; $-3n^2 + 63n - 324 = 0$; $n^2 - 21n + 108 = 0$.

По теореме, обратной теореме Виета, $n_1 = 12$, $n_2 = 9$. Определим, какое значение n удовлетворяет условию задачи. По смыслу $a_n > 0$, то есть $a_1 + d(n-1) > 0 -1) > 0$; $(a_n = a_1 + d(n-1))$ $60 - 6n + 6 > 0$; $-6n > -66$; $n < 11$. Значит, $n = 9$.

Было задано 9 задач.

Ответ: 9.

704. Пусть x, y и z — производительности первого, второго и третьего насоса соответственно. По условию задачи $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{5}$, $x + y = 4z$ и $6(x+y+z) = V$, где V — объем бассейна. Отсюда получаем: $x = \dfrac{3y}{5}$,

$z = \dfrac{x+y}{4}$, а $x+y+z = \dfrac{5}{4}(x+y) = \dfrac{5}{4}\left(\dfrac{3}{5}+1\right)y = 2y$. Значит, $V = 6(x+y+z) = 12y \Rightarrow y = \dfrac{V}{12}$. Тогда $x = \dfrac{3y}{5} = \dfrac{V}{20}$, а $z = \dfrac{1}{4}(x+y) = $ $= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{V}{20}+\dfrac{V}{12}\right) = \dfrac{V}{30}$. Так как 3 часа 36 минут — это 3,6 часа, то за это время первый и третий насосы заполнят $3{,}6(x+z)$ часть объема бассейна. $3{,}6(x+z) = 3{,}6\left(\dfrac{V}{20}+\dfrac{V}{30}\right) = 0{,}36\cdot\dfrac{5V}{6} = 0{,}3V$. То есть первый и третий насосы за 3 часа 36 минут заполнят 30% объема бассейна.

Ответ: 30.

705. Пусть x, y и z — производительности первого, второго и третьего насоса соответственно. По условию задачи $\dfrac{y}{z} = \dfrac{2}{3}$, $3x = y+z$ и $5(x+y+z) = V$, где V — объем бассейна. Откуда, $y = \dfrac{2z}{3}$, $x = \dfrac{y+z}{3}$, а $x+y+z = \dfrac{4}{3}(y+z) = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2}{3}+1\right)z = \dfrac{20z}{9}$. Значит, $V = 5(x+y+z) = $ $= \dfrac{100z}{9} \Rightarrow z = 0{,}09V$. Тогда $y = \dfrac{2z}{3} = 0{,}06V$, а $x = \dfrac{1}{3}(y+z) = $ $= \dfrac{1}{3}(0{,}06V + 0{,}09V) = 0{,}05V$.

Так как 6 часов работал первый насос, а потом 5 часов второй, то объем бензина, который они закачали, равен: $6x+5y = 6\cdot 0{,}05V + 5\cdot 0{,}06V = 0{,}6V$. То есть они заполнили 60% объема цистерны.

Ответ: 60.

706. Общий план решения такой же, как в задаче B9 варианта 3.

Если x и y — производительности старого и нового станков соответственно, V — общий объем заказа, а t — время, за которое с помощью пяти старых и двух новых станков можно этот заказ выполнить, то $(5x+2y)t = V$.

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow x = \dfrac{2y}{9}$ и $V = \left(5\cdot\dfrac{2}{9}+2\right)yt = \dfrac{28}{9}yt \Rightarrow yt = \dfrac{9V}{28}$.

$(6x+y)t = \left(6\cdot\dfrac{2}{9}+1\right)yt = \dfrac{21}{9}yt = \dfrac{21}{9}\cdot\dfrac{9V}{28} = 0{,}75V$.

Т. е. с помощью шести старых станков и одного нового за время t можно выполнить 75% заказа.

Ответ: 75.

707. Пусть первый насос работает с производительностью $3x$ литров в час, тогда второй — $4x$, а третий — $5x$ литров в час. Значит, всего в бассейне $(3x + 4x + 5x) \cdot 5 = 60x$ литров. За первый час налилось $3x$ литров, в следующий час $12x$ литров. Осталось $45x$ литров, а все последующее время скорость заполнения была $9x$ литров в час. Итак, после поломки потребовалось еще 5 часов. А всего бассейн заполнялся 7 часов.

Ответ: 7.

708. Примем всю работу за единицу. Пусть x — производительность первого каменщика, а y — второго, тогда $(x + y)$ — производительность при совместной работе. Составим систему уравнений: $\begin{cases} 6(x + y) = 1, \\ 3(x + y) + 4x = 1; \end{cases}$ $x = \dfrac{1}{8}$, $y = \dfrac{1}{24}$. Следовательно, второй каменщик мог бы выполнить всю работу за 24 часа.

Ответ: 24.

709. Примем работу по погрузке вагона за единицу. Тогда пусть производительность первого автопогрузчика за час равна $2x$, а второго — x. Тогда согласно условию $10(2x + x) = 1$, откуда находим $x = \dfrac{1}{30}$. Пусть теперь y часов первый работал в одиночку. Составляем уравнение: $y\dfrac{2}{30} + (11 - y)\dfrac{3}{30} = 1$, или $2y + 33 - 3y = 30$, откуда находим $y = 3$.

Ответ: 3.

710. Обозначим количество товара, находящегося на складе через 1. Пусть a — объем продаж за 4 дня первого менеджера, b — объем продаж за 4 дня второго менеджера. Так как, по условию, оба менеджера реализовали $\dfrac{3}{5}$ всего товара, и известно соотношение их объемов продаж за 4 дня, то получаем систему

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{4b}{5} + b = \dfrac{3}{5}, \\ a = \dfrac{4b}{5}. \end{cases}$$

Отсюда, $b = \dfrac{1}{3}$, $a = \dfrac{4}{15}$. Пусть V_1 — скорость продаж первого менеджера, V_n — скорость продаж нового работника. Тогда

$V_1 = \dfrac{a}{4} = \dfrac{1}{15}$, $V_n = \dfrac{V_1}{2} = \dfrac{1}{30}$. Определим какой объем продаж выполнил новый работник. Так как всего объем продаж равен 1, а на складе осталось 20% от всего товара, то всего было продано 80%, что соответствует $\dfrac{4}{5}$. Следовательно, новый работник продал $\dfrac{4}{5} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5}$ товара. Найдём Время t, которое он затратил: $t = \dfrac{0{,}2}{V_n} = \dfrac{1 \cdot 30}{5} = 6$ дней.

Ответ: 6.

711. Пусть x — скорость основного двигателя, y — скорость дополнительного двигателя. Путь от земли до станции обозначим через S, путь пройденный на основном и дополнительном двигателях вместе — через S_1, путь пройденный в этом рейсе на основном двигателе — через S_2. Тогда $S = 10x$, $S_1 = 2(x + y)$, $S_2 = 6x$. Так как $S = S_1 + S_2$, то $S = 2(x + y) + 6x$. Получаем систему уравнений $\begin{cases} S = 10x, \\ S = 2(x+y) + 6x. \end{cases}$
Отсюда, $10x = 2(x + y) + 6x$, $10x - 2x - 6x = 2y$, $x : y = 1$.

Ответ: 1.

689. Из условия задачи следует, что Маша собирает малину со скоростью $\dfrac{1}{3}$ ведра в час, а Саша — $\dfrac{1}{5}$ ведра в час. Вместе за час они собирают

$\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{8}{15}$ ведра, значит, два ведра они соберут за

$2 : \dfrac{8}{15} = \dfrac{15}{4} = 3{,}75$ часа.

Ответ: 3,75.

712. Пусть p_i — производительность i-го насоса ($i \in \{1, 2\}$), то есть та воды часть бассейна, которую он откачает за одну минуту; t_i — время в минутах, за которое i-ый насос откачает половину воды бассейна. Тогда из условия получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} t_1 p_1 = \dfrac{1}{2}, \\ t_2 p_2 = \dfrac{1}{2}, \\ t_1 + t_2 = 8 \cdot 60, \\ (p_1 + p_2)(3 \cdot 60 + 45) = 1. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения.

Одно из них: $p_1 = \dfrac{1}{360}$, $t_1 = 180$, $p_2 = \dfrac{1}{600}$, $t_2 = 300$; другое решение — симметрическое. Оно получается из первого заменой индексов 1 на 2 и наоборот.

Таким образом, более мощный насос откачает всю воду из бассейна за 360 минут.

Ответ: 360.

713. Пусть x м^3 воды за час перекачивает первый насос, тогда $(x-5)$ м^3 воды за час перекачивает второй насос. На перекачку 45 м^3 первому насосу понадобиться $\dfrac{45}{x}$ минут, а второму на перекачку 50 м^3 — $\left(\dfrac{50}{x-5}\right)$ минут. По условию: $\dfrac{50}{x-5} - \dfrac{45}{x} = \dfrac{1}{2}$, $x > 5$.

$x^2 - 15x - 450 = 0$, $x_1 = 30$, $x_2 = -15$, x_2 — не удовлетворяет условию $x > 5$.

30 м^3 воды ежечасно перекачивает первый насос.

Ответ: 30.

714. Примем всю работу по вспахиванию поля за единицу. Пусть за x часов может вспахать поле первая бригада, работая самостоятельно $(x > 0)$, тогда за $(x+6)$ часов — вторая бригада. Производительности первой и второй бригад $\dfrac{1}{x}$ и $\dfrac{1}{x+6}$ соответственно.

По условию $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+6} = \dfrac{1}{4}$, $x > 0$,
$4x + 24 + 4x = x^2 + 6x$; $x^2 - 2x - 24 = 0$,
$x_1 = 6$, $x_2 = -4$.
x_2 — не удовлетворяет условию $x > 0$.

За 6 часов может вспахать поле первая бригада, работая самостоятельно.

Ответ: 6.

715. Составим систему уравнений, соответствующую условию задачи:
$$\begin{cases} 5x + 5y = 1, \\ 3x + 7{,}5y = 1; \end{cases}$$
где x — производительность труда первого садовника, а y — второго садовника.

Решив систему, получим: $x = \dfrac{5}{45}$, $y = \dfrac{4}{45}$, значит второй садовник подстрижёт кусты за $\dfrac{45}{4}$ часов.

Ответ: 11,25.

716. Составим систему уравнений, соответствующую условию задачи:
$\begin{cases} 15x_1 + 15x_2 = 1, \\ 7x_1 + 21x_2 = 1, \end{cases}$
где x_1 — производительность первого комбайна, а x_2 — второго комбайна. Решив систему, получим: $x_1 = \dfrac{1}{35}$, $x_2 = \dfrac{4}{105}$, значит первый комбайн вспашет всё поле за 35 часов.

Ответ: 35.

717. Пусть x, y, z — производительности первого, второго и третьего тракторов соответственно. Если три трактора вспахивают поле за 4 часа, то за 1 час они вспахивают $\dfrac{1}{4}$ поля, то есть $x+y+z = \dfrac{1}{4}$. Из второго условия получаем: $x + y = \dfrac{1}{6}$. Выразив из первого уравнения $z = \dfrac{1}{4} - (x + y)$ и подставив $x + y = \dfrac{1}{6}$, получим: $z = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12}$. Итак, третий трактор может вспахать поле за 12 часов.

Ответ: 12.

718. Пусть x, y, z — производительность первого, второго и третьего комбайнов соответственно. Из условия следует, что $\dfrac{1}{x+y} = 4$, $\dfrac{1}{y+z} = 6$, $\dfrac{1}{x+z} = 12$. Необходимо найти $\dfrac{1}{x+y+z}$. Получаем систему уравнений:
$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{4}, \\ y + z = \dfrac{1}{6}, \\ x + z = \dfrac{1}{12}. \end{cases}$ Сложив все уравнения системы, получим:
$2(x + y + z) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12}$; $x + y + z = \dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{x + y + z} = 4$.

Три комбайна уберут поле за 4 часа.

Ответ: 4.

722. Определим наибольший планируемый заработок фермера на продаже черешни и вишни. Для чего сравним предполагаемые заработки с каждого сада.

Сад «Дружба»: $5 \cdot (500 \cdot 3 + 350 \cdot 2) = 11000$ (р.);

Сад «Мечта»: $5 \cdot (500 \cdot 2 + 350 \cdot 4) = 12000$ (р.);

Сад «Труд»: $5 \cdot (500 \cdot 4 + 350 \cdot 1) = 11750$ (р.).

$11000 < 11750 < 12000$.

Фермер планирует заработать 12 тыс. рублей.

Ответ: 12.

723. Задача сводится к решению уравнения $y(t) = x(t)$, то есть
$2 + 11t - 5t^2 = 2t$, где $t > 0$, $5t^2 - 9t - 2 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = -0{,}2$. t_2 — не удовлетворяет условию $t > 0$.

Ответ: 2.

724. Найдём, сколько деталей за ночь может изготовить каждая бригада.
1-я бригада: $10 \cdot 20 + 5 \cdot 7 = 235$ деталей;
2-я бригада: $7 \cdot 20 + 13 \cdot 7 = 231$ деталь;
3-я бригада: $11 \cdot 20 + 2 \cdot 7 = 234$ детали.
Из условия следует, что вышла работать 1-я бригада, то есть заказчик заплатит $235 \cdot 500 = 117500$ (руб.) $= 117{,}5$ тыс. руб.

Ответ: 117,5.

725. Задача сводится к решению уравнения $y(t) = 2x(t)$, то есть
$8 + 24t - 5t^2 = 6t$, где $t > 0$.
$5t^2 - 18t - 8 = 0$; $t_1 = -0{,}4$, $t_2 = 4$. $t_1 = -0{,}4$ не удовлетворяет условию $t > 0$, значит фиксация снаряда произойдёт при $t = 4$ на высоте $y(4) = 8 + 24 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 24$.

Ответ: 24.

726. По таблице среди мониторов с длиной диагонали 23,6 дюйма выбираем монитор с наименьшей оптовой ценой, то есть с ценой 201 у.е. $2050 : 201 = 10\frac{40}{201}$, значит на 2050 у.е. максимально можно купить 10 требуемых мониторов по оптовой цене.

Ответ: 10.

727. Пусть a м — длина стороны одного участка, b м — другого, тогда по условию $4a + 4b = 52$ и $a^2 + b^2 = 89$. Найдём a и b.

$\begin{cases} 4(a+b) = 52, \\ a^2 + b^2 = 89; \end{cases}$ $\begin{cases} a+b = 13, \\ a^2 + b^2 = 89; \end{cases}$ $\begin{cases} b = 13 - a, \\ a^2 + (13-a)^2 = 89; \end{cases}$

$\begin{cases} b = 13 - a, \\ a^2 - 13a + 40 = 0. \end{cases}$

Получаем два решения: $a = 5$, $b = 8$ и $a = 8$, $b = 5$.

Длина стороны большего участка равна 8 м.

Ответ: 8.

728. По таблице среди мониторов с длиной диагонали 24 дюйма выбираем монитор с наименьшей розничной ценой, то есть с ценой 266 у.е, $1500 : 266 = 5\dfrac{85}{133}$, значит на 1500 у.е. максимально можно купить 5 требуемых мониторов по розничной цене.

Ответ: 5.

729. Пусть a м — длина одной стороны участка, b м — другой, тогда по условию $ab = 24$, $2a + 2b = 22$. Найдём a и b.
$\begin{cases} 2(a+b) = 22, \\ ab = 24; \end{cases}$ $\begin{cases} a+b = 11, \\ ab = 24; \end{cases}$ $\begin{cases} b = 11 - a, \\ a(11-a) = 24; \end{cases}$
$\begin{cases} b = 11 - a, \\ a^2 - 11a + 24 = 0. \end{cases}$
Получаем два решения: $a = 3$, $b = 8$ и $a = 8$, $b = 3$.
Длина наименьшей стороны равна 3.

Ответ: 3.

730. Выясним, сколько часов займёт каждый путь.

Напрямую: $t = \dfrac{80}{80} = 1$ ч;

через пункт C: $t = \dfrac{AC}{60} + \dfrac{BC}{100} = \dfrac{60}{60} + \dfrac{50}{100} = 1{,}5$ ч.

Итак, наиболее быстрый путь займёт 1 час.

Ответ: 1.

731. Задача сводится к решению неравенства $-2t^2 + 8 \geqslant 6$ при $t \geqslant 0$. $-2t^2 + 8 \geqslant 6$, $2t^2 \leqslant 2$, $t^2 \leqslant 1$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Так как $t \geqslant 0$, то спортсмен находился на высоте не менее шести метров при $t \in [0, 1]$, то есть 1 секунду.

Ответ: 1.

732. Выясним, сколько часов займёт каждый путь.

Напрямую: $t = \dfrac{AB}{60} = \dfrac{60}{60} = 1$ ч;

через пункт C: $t = \dfrac{AC}{100} + \dfrac{BC}{80} = \dfrac{50}{100} + \dfrac{20}{80} = 0{,}75$ ч.

Наиболее долгий путь займёт 1 час.

Ответ: 1.

733. Задача сводится к решению неравенства $-\dfrac{1}{2}t^2 + 5 \geqslant 3$ при $t \geqslant 0$.

$-\frac{1}{2}t^2 + 5 \geqslant 3$, $-t^2 \geqslant -4$, $t^2 \leqslant 4$, $-2 \leqslant t \leqslant 2$. Так как $t \geqslant 0$, то лыжник находился на высоте не менее трёх метров при $t \in [0, 2]$, то есть 2 секунды.

Ответ: 2.

734. В первой партии 20 деталей, из которых $0,4 \cdot 20 = 8$ бракованных, то есть $20 - 8 = 12$ деталей без брака. Во второй партии 3 бракованных детали, тогда $14 - 3 = 11$ деталей без брака. В третьей партии 30 деталей, из которых не более чем $\frac{1}{3} \cdot 30 = 10$ без брака.

Наибольшее число деталей без брака в первой партии, которая содержит 8 бракованных деталей.

Ответ: 8.

735. Из рисунка 22 видно, что график функции $\ell = 20 + 5\cos t$ имеет четыре точки пересечения с графиком прямой $\ell = 18$ при $t \in [0; 12]$.

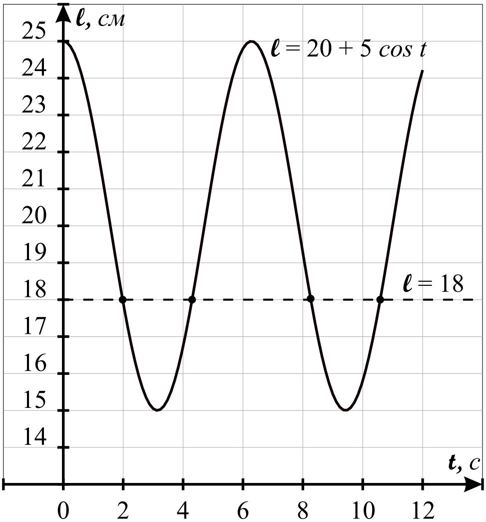


Рис. 22.

Ответ: 4.

736. Пусть всего было x персиков, причём в первый день дети съели $\frac{2}{3}x$ персиков. Так как по условию $\frac{2}{3}x = 2 + 3 + 3$, то $x = 12$.

Ответ: 12.

737. Укажем на схеме (см. рис. 23) не только длину участка пути, но и время, затраченное туристами на его преодоление.

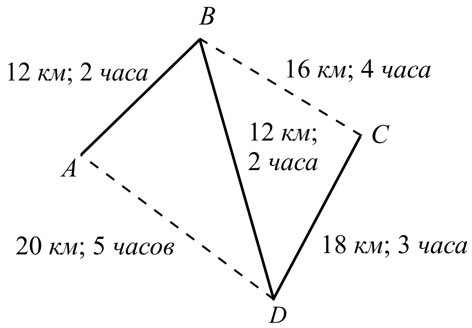


Рис. 23.

Видно, что 8-часовым является маршрут ADC, длина которого равна 38 км.

Ответ: 38.

738. Так как мяч коснулся земли при $h = 0$, то для нахождения d необходимо решить уравнение: $3 - 0,48d^2 = 0$. Его положительный корень — $d = 2,5$.

Ответ: $2,5$.

739. Пусть x и y — вес одного карандаша и одной ручки в граммах соответственно. Тогда из условия получим систему уравнений:

$\begin{cases} 3x - 7 = y, \\ 3y - 11 = x. \end{cases}$ Её решение $x = 4$, $y = 5$.

Значит, 5 ручек и 5 карандашей весят $5x + 5y = 45$ граммов.

Ответ: 45.

740. Расстояние, пройденное тремя участниками эстафеты, равно $3000 + 2700 + 1500 = 7200$ (м).

Время, за которое была пройдена этими спортсменами вся дистанция эстафеты, равно $480 + 450 + 270 = 1200$ (сек).

Следовательно, средняя скорость: $\dfrac{7200 \cdot 60}{1200} = 360$ (м/мин).

Ответ: 360.

741. Из уравнения движения автомобиля находим уравнение зависимости его скорости от времени: $v(t) = S'(t) = 30 - 10t$. Поскольку в момент остановки автомобиля его скорость была равна 0 м/с, то искомое время находим из уравнения $30 - 10t = 0$; $t = 3$ с.

Ответ: 3.

742. Пусть ученики 11а класса получили x пятёрок, y четвёрок и z троек. Тогда ученики 11б класса получили $x - 3$ пятёрки, $\dfrac{y}{2}$ четвёрок и $2z$ троек.

Всего в 11б классе 28 человек. Следовательно, $x - 3 + \dfrac{y}{2} + 2z = 28$.

Согласно условию, ученики 11в класса получили $x - 3$ пятёрки, $\dfrac{3y}{2}$ четвёрок и $2z - 16$ троек.

Всего в этом классе 30 учеников. Значит, $x - 3 + \dfrac{3y}{2} + 2z - 16 = 30$.

Получаем систему уравнений $\begin{cases} x - 3 + \dfrac{y}{2} + 2z = 28, \\ x - 3 + \dfrac{3y}{2} + 2z - 16 = 30; \end{cases}$

$\dfrac{3y}{2} - \dfrac{y}{2} - 16 = 2$; $y = 18$.

Ответ: 18.

743. Время в пути от станции 1 до станции 6 электрички I с учётом остановок равно:

$20 + 1,5 + 20 + 1,5 + 25 + 1,5 + 26 + 1,5 + 20 = 117$ (мин).

Для электрички II это время равно:

$20 + 1,5 + 25 + 1,5 + 24 + 1,5 + 25 + 1,5 + 20 = 120$ (мин).

Следовательно, средняя скорость электрички II меньше, чем электрички I. Так как расстояние между станциями 1 и 6 равно 117 км, то средняя скорость электрички II на этом промежутке пути равна

$\dfrac{117 \cdot 60}{120} = 58,5$ (км/ч).

Ответ: 58,5.

744. Чтобы определить, сколько секунд мяч находится на высоте не менее 3 м, решим неравенство $4t - t^2 \geqslant 3$. Получаем $1 \leqslant t \leqslant 3$. Следовательно, мяч на указанной высоте находился 2 секунды.

Ответ: 2.

745. Пусть в первой машине было: x кг лука, y кг картошки, z кг капусты. Тогда во второй машине было: $3x$ кг лука, $2y$ кг картошки, $6z$ кг капусты. Всего в этой машине было 200 кг овощей. Следовательно, $3x + 2y + 6z =$

$= 200.$

Согласно условию, в третьей машине было: $3x$ кг лука, $5y$ кг картошки, $(6z - 9)$ кг капусты. Так как всего в этой машине было 260 кг овощей, то $3x + 5y + 6z - 9 = 260$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 200, \\ 3x + 5y + 6z - 9 = 260; \end{cases}$$

$3y - 9 = 60;\ y = 23.$

Ответ: 23.

746. Годовой оборот биржи A:
$(42 + 13 + 87 + 23) \cdot 10^3 = 165 \cdot 10^3 = 1{,}65 \cdot 10^5$ (у.е.)
Годовой оборот биржи B:
$(63 + 47 + 22 + 37) \cdot 10^3 = 169 \cdot 10^3 = 1{,}69 \cdot 10^5$ (у.е.)

Ответ: 4000.

747. $a(t_0) = s''(t_0)$,
$s'(t) = t^3 - 24t - 3$,
$s''(t) = 3t^2 - 24$,
$s''(t) = 3$, $3t^2 - 24 = 3$, $t^2 = 9$, $t = 3$, так как $t > 0$.

Ответ: 3.

748. Объём продукции за год составил: $19 + 23 + 26 + 18 + 20 + 20+$ $+20 + 20 + 32 + 27 + 35 + 40 = 300$ единиц.

$\dfrac{120000}{250} \cdot 300 = 144000$ (у.е.) — прибыль за год.

Ответ: 144000.

749. $a(t_0) = S''(t_0)$, $S'(t) = t^2 - 4t + 3$, $S''(t) = 2t - 4$,
$S''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$ (см/с^2).

Ответ: 2.

750. Перебираем пары различных комплектов по возрастанию суммарной стоимости, в которых количество пирожных не менее 19. Действуя таким образом, получаем пару Наслаждение и Восторг. Суммарная стоимость равна 278.

Ответ: 278.

751. Найдём момент времени, в который автомобили поравняются.
$S_1(t) = S_2(t)$; $-t^2 + 6t = 4t$; $t^2 - 2t = 0$; $t = 0$, $t = 2$. В момент времени $t = 0$ автомобилисты выезжали из города, а поравняются они в момент $t = 2$ на расстоянии $S_1(2) = 8$ от города.

Ответ: 8.

752. Пусть изначально требовалось a ниток холодных тонов, тогда тёплых — $2a$. После замены ниток холодных тонов стало b, а тёплых тонов —

$1{,}5b$. Так как общее количество ниток не изменялось, то $a + 2a = b + 1{,}5b$, откуда $b = 1{,}2a$, то есть ниток холодных тонов стало в 1,2 раза больше.

Ответ: 1,2.

753. Перебираем пары наборов карандашей по возрастанию суммарной стоимости, в которых количество карандашей не менее 31. Действуя таким образом, получаем пару Радуга и Вдохновение, суммарная стоимость равна 87.

Ответ: 87.

754. Найдём момент времени, в который машинки поравняются.
$S_1(t) = S_2(t)$; $0{,}25t = 1{,}25t - 0{,}25t^2$; $t^2 - 4t = 0$; $t = 0$, $t = 4$. В момент времени $t = 0$ машинки отъезжали от старта, а поравняются они в момент $t = 4$ на расстоянии $S_1(t) = 1$ от старта.

Ответ: 1.

755. Пусть изначально планировалось сделать a отбивных, тогда котлет — $\frac{2}{3}a$. После приготовления оказалось b отбивных, тогда котлет — $\frac{5}{6}b$. Так как суммарное количество не изменилось, то $\frac{2}{3}a + a = \frac{5}{6}b + b$, $\frac{5a}{3} = \frac{11b}{6}$, откуда $a = 1{,}1b$, то есть предполагаемое количество отбивных в 1,1 раза больше того, которое было приготовлено.

Ответ: 1,1.

756. Не теряя общности, предположим, что продолжительность смены таксиста составляет 1 час, тогда составим следующую таблицу:

	Гонорар за эту поездку	Затраченное время	Заработок за оставшееся время	Суммарный заработок
AB	450	$\frac{1}{2}$	225	675
$ACDB$	645	$\frac{43}{45}$	20	665
ADB	525	$\frac{7}{10}$	135	660

В итоге наиболее выгодным является маршрут AB, значит за эту поездку таксист заработает 450 рублей.

Ответ: 450.

757. Задача сводится к решению неравенства: $2+4t-t^2 \geqslant 5$; $t^2-4t+3 \leqslant 0$;

$1 \leqslant t \leqslant 3$. Отсюда следует, что волан находится на высоте не менее 5 метров 2 секунды.

Ответ: 2.

758. Составим для наглядности таблицу, соответствующую условию задачи:

	Стоимость предложенного мяса (руб.)	Масса мяса за вычетом массы костей (кг)	Цена мяса без костей (руб.)
I	1200	3,5	$\frac{1200}{3{,}5} \approx 342{,}8$
II	1375	3,9	$\frac{1375}{3{,}9} \approx 352{,}5$
III	1500	4,5	$\frac{1500}{4{,}5} \approx 333{,}3$

В итоге наименьшая цена за килограмм мяса без костей у третьего продавца. Она составляет приблизительно 333 рубля.

Ответ: 333.

759. Задача сводится к решению неравенства $6t - t^2 > 5$;
$t^2 - 6t + 5 < 0$;
$1 < t < 5$, отсюда следует, что предмет находится на глубине более 5 метров 4 секунды.

Ответ: 4.

760. Пусть в копилке монет достоинством 2 рубля x штук, тогда все монеты в копилке весят $(3x + 10 \cdot 6{,}5)$ г. Из условия следует, что этот вес равен $270 - 100 = 170$ (г). Из уравнения $3x + 65 = 170$ находим $x = 35$. Значит, в копилке: 35 двухрублёвых монет и 10 пятирублёвых, то есть $2 \cdot 35 + 5 \cdot 10 = 120$ (руб.).

Ответ: 120.

761. По диаграммам определяем: число всех медалей, завоёванных в Афинах, равно $6 + 16 + 19 = 41$ (шт.), а в Пекине: $23 + 21 + 28 = 72$ (шт.).

Пусть x — количество процентов завоёванных медалей в Пекине относительно числа медалей, завоёванных в Афинах. Составим пропорцию:
41 — 100%
72 — x%, тогда

$$x = \frac{72 \cdot 100\%}{41} \approx 175{,}61\%.$$

Значит, количество медалей увеличилось на $175{,}61 - 100\% = 75{,}61\%$. Округляя до целых, получим 76%.

Ответ: 76.

762. Пусть x м — высота, с которой упало яблоко, тогда за последние 0,4 с оно пролетело $\frac{3}{4}x$ м. Согласно данной в условии формуле, это расстояние равно $x - \frac{10 \cdot 0{,}4^2}{2} = x - 0{,}8$. Получаем: $\frac{3}{4}x = x - 0{,}8$; $\frac{x}{4} = 0{,}8$; $x = 3{,}2$. 3,2 м — высота, с которой упало яблоко.

Ответ: 3,2.

763. Пусть всего в копилке x монет. Тогда монет достоинством 1 рубль — $0{,}2x$ штук, а достоинством 2 рубля — $0{,}8x$ штук. Однорублёвые монеты, находящиеся в копилке, весят $0{,}2x \cdot 2 = 0{,}4x$ (г), а двухрублёвые — $0{,}8x \cdot 3 = 2{,}4x$ (г).

Общий вес всех монет в копилке равен $0{,}4x + 2{,}4x = 254 - 100$; $2{,}8x = 154$, $x = 55$. Значит, всего в копилке 55 монет. Из них однорублёвых $0{,}2 \cdot 55 = 11$ (шт.), а двухрублёвых $55 - 11 = 44$ (шт.). Получаем, что в копилке находится $1 \cdot 11 + 2 \cdot 44 = 99$ (руб.).

Ответ: 99.

764. По диаграммам определяем: число всех медалей, завоёванных в чемпионате, равно $3+5+3+3+1+5+2+5+2+1+3 = 33$ (шт.). Сборной России на этом чемпионате было завоёвано $3+3+5 = 11$ медалей.

Составим пропорцию:

33 — 100%

11 — x%, тогда

$x = \frac{11 \cdot 100\%}{33} \approx 33{,}33\% \approx 33\%$.

Ответ: 33.

765. Из первого уравнения выразим время: $t = \frac{x}{v_0}$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим: $h = y = \frac{gt^2}{2} = \frac{g \cdot x^2}{2{v_0}^2}$ $(*)$. Так как лётчик с высоты h должен видеть место падения груза под углом 60°, то из $\triangle\ ABC$ (см. рис. 24) находим: $x = CB = \frac{AC}{\operatorname{tg}\angle ABC} = \frac{h}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Подставляя это выражение для x в $(*)$, получим: $h = \frac{g \cdot h^2}{6v_0^2}$; $h = \frac{6{v_0}^2}{g}$;

$g \approx 10$ м/$c^2 = \frac{10 \cdot 3600^2}{1000}$ км/ч^2; $v_0 = 180$ км/ч. $h = \frac{6 \cdot 180^2 \cdot 100}{3600^2} = 1{,}5$ (км).

Ответ: 1,5.

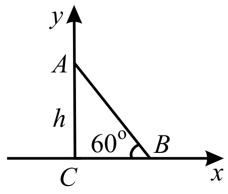


Рис. 24.

766. Найдём, сколько времени понадобится туристу для прохождения по каждому маршруту.

На подъём: $t_1 = \dfrac{8{,}1}{1{,}8} = 4{,}5$ ч; $t_2 = \dfrac{6{,}6}{1{,}5} = 4{,}4$ ч; $t_3 = \dfrac{7{,}4}{2} = 3{,}7$ ч.

На спуск: $t_1 = \dfrac{6{,}3}{1{,}4} = 4{,}5$ ч; $t_2 = \dfrac{7{,}2}{1{,}5} = 4{,}8$ ч.

Наименьшее время, за которое турист может подняться на вершину горы и спуститься с неё, равно $3{,}7 + 4{,}5 = 8{,}2$ часа.

Ответ: 8,2.

767. Пусть a см — длина прямоугольника, b см — его ширина, тогда площадь вычисляется по формуле $S = ab$. По условию периметр прямоугольника $P = 34$, $2a + 2b = 34$, $a + b = 17$.

Выразим $b = 17 - a$ и подставим в формулу площади, получим $S = a(17 - a)$. Необходимо найти наибольшее $a < 17$, удовлетворяющее неравенству $S \geqslant 66$.

$a(17-a) \geqslant 66$, $a^2 - 17a + 66 \leqslant 0$, $(a-6)(a-11) \leqslant 0$, $6 \leqslant a \leqslant 11$. Искомое значение a равно 11.

Ответ: 11.

768. Найдём, сколько времени понадобится для прохождения по каждому из мостов. $t_1 = \dfrac{288}{8} = 36$ с; $t_2 = \dfrac{282}{6} = 47$ с; $t_3 = \dfrac{294}{7} = 42$ с; $t_4 = \dfrac{351}{9} = 39$ с; $t_5 = \dfrac{385}{11} = 35$ с.

Чтобы добраться с одного берега на другой, необходимо воспользоваться одним из мостов $1, 2, 3$ и одним из мостов $4, 5$. Наименьшее время равно $36 + 35 = 71$ с.

Ответ: 71.

769. Пусть a см — длина прямоугольника, b см — его ширина, тогда площадь вычисляется по формуле $S = ab$. По условию, периметр прямоугольника $P = 32$, $2a + 2b = 32$, $a + b = 16$. Выразим $a = 16 - b$ и

подставим в формулу площади, получим $S = b(16 - b)$. Необходимо найти наименьшее значение b, $0 < b < 16$, удовлетворяющее неравенству $S \geqslant 48$.
$b(16 - b) \geqslant 48$; $b^2 - 16b + 48 \leqslant 0$; $(b - 12)(b - 4) \leqslant 0$; $4 \leqslant b \leqslant 12$.
Искомое значение b равно 4.

Ответ: 4.

770. Теплоход рассчитан на $840+26 = 866$ человек, следовательно, нужно не менее $\dfrac{866}{72} = 12\dfrac{2}{72}$ шлюпок. Наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому условию — 13.

Ответ: 13.

771. При выборе тарифного плана «0» пользователь заплатит $1{,}2 \cdot 950 = 1140$ рублей, при выборе плана «800» — заплатит $650+(950-800)\cdot 2 = 950$ рублей, а при выборе плана «Безлимитный» — заплатит 900 рублей. Самый дешёвый тарифный план — «Безлимитный», и пользователь заплатит 900 рублей.

Ответ: 900.

772. Задача сводится к нахождению наименьшего решения неравенства $-\dfrac{1}{450}x^2 + \dfrac{1}{3}x + 1 \geqslant 13 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 150x + 5400 \leqslant 0$. Корнями трёхчлена в левой части являются числа 60 и 90, поэтому решением неравенства будет $x \in [60; 90]$. Наименьшим решением является $x = 60$.

Ответ: 60.

774. Пусть данное число равно $\overline{ab}$. По условию $a + b = 11$. Рассмотрим два случая.
1) $(a+4)^2+(b-4)^2 = a^2+b^2+8$, $8(a-b)+32 = 8$, $a-b = -3$, $a = b-3$.
$b + (b - 3) = 11$, $2b = 14$, $b = 7$, $a = 4$, $\overline{ab} = 47$.
2) $(a+4)^2+(b-4)^2 = a^2+b^2-8$, $8(a-b)+32 = -8$, $a-b = -5$, $a = b-5$.
$b + (b - 5) = 11$, $b = 8$, $a = 3$, $\overline{ab} = 38$.
Наибольшим из найденных чисел является число 47.

Ответ: 47.

776. В арифметической прогрессии $S_{32} = 16$

$$S_{32} = \frac{2a_1 + 31d}{2} \cdot 32 = (2a_1 + 31d) \cdot 16$$

$a_3 + a_{30} = a_1 + 2d + a_1 + 29d = 2a_1 + 31d$.
По условию задачи $S_{32} = 16$, то есть $(2a_1 + 31d) \cdot 16 = 16$,
отсюда $2a_1 + 31d = a_3 + a_{30} = 1$.

Ответ: 1.

777. $S_{50} = a_{99}$, $S_{50} = \dfrac{2a_1 + 49d}{2} \cdot 50 = (2a_1 + 49d) \cdot 25$. $a_n = 0$, $a_{99} = a_1 + 98d$.

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (2a_1 + 49d) \cdot 25 = a_1 + 98d, \\ a_1 + d(n-1) = 0; \end{cases}$$

Из 1-го уравнения выразим a_1 через d: $50a_1 + 25 \cdot 49d = a_1 + 98d$. $49a_1 + 25 \cdot 49d = 98d$, $a_1 + 25d = 2d$, $a_1 = -23d$. Подставим во второе уравнение: $-23d + dn - d = 0$. По определению разности d арифметической прогрессии $d \neq 0$, поэтому можно полученное уравнение разделить на d: $-23 + n - 1 = 0$, откуда $n = 24$.

Ответ: 24.

778. Число рисунков, выполненных последовательно отдельными школьниками составляют геометрическую прогрессию с $q = \dfrac{1}{2}$, $S_n = 2667$, $b_3 = 336$, где n — число детей, рисовавших рисунки. $b_3 = b_1 \cdot q^2$, отсюда

$b_1 = \dfrac{336}{0{,}25} = 1344$. $S_n = \dfrac{1344\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - 0{,}5}$; $1344 \cdot 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 2667$.

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{128}$; $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^7$; $n = 7$. Поэтому отрезки рисовали 7 школьников.

Ответ: 7.

779. $a_1, a_2, a_3,$ — арифметическая прогрессия, $d > 0$.
$a_1 + 8, a_2, a_3$ — геометрическая прогрессия, $S_3 = 26$.
$S_3 = \dfrac{2a_1 + d \cdot 2}{2} \cdot 3$, $S_3 = 26 - 8 = 18$. $\dfrac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3 = 18$, $a_1 + d = 6$, $d = 6 - a_1$. Арифметическая прогрессия имеет вид: a_1; $a_1 + 6 - a_1$, $a_1 + 2(6 - a_1)$; упростив, получим $a_1, 6, 12 - a_1$. Составим геометрическую прогрессию: $a_1 + 8, 6, 12 - a_1$. По ее определению $\dfrac{6}{a_1 + 8} = \dfrac{12 - a_1}{6} = q$.
$(12 - a_1)(a_1 + 8) = 36$, $12a_1 + 96 - a_1^2 - 8a_1 = 36$;
$a_1^2 - 4a_1 - 60 = 0$, $(a_1)_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 60}$. $(a_1)_1 = 10$ $(a_1)_2 = -6$,
$d_1 = 6 - 10 = -4$ не удовлетворяет условию $d > 0$;
$d_2 = 6 - (-6) = 12$, $12 > 0$. Итак, $a_1 = -6$, $q = \dfrac{6}{-6 + 8} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Ответ: 3.

780. 1. $S_{ABC} = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot r$, с другой стороны $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle C$,

$\frac{1}{2}P_{ABC} \cdot r = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle C$, по условию $r = 1$, $AC = 5$, $\sin\angle C = 0{,}6$, поэтому $P_{ABC} = 5 \cdot 0{,}6 \cdot BC$, $P_{ABC} = 3BC$ (см. рис. 25).

2. Так как $AB < AC$, то $\angle C < \angle B$. Это означает, что $\angle C$ острый. Следо-

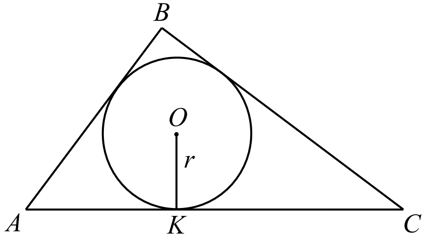


Рис. 25.

вательно, $\cos\angle C > 0$.

$\cos\angle C = \sqrt{1 - \sin^2\angle C} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$

3. Выразим сторонуAB через BC. По теореме косинусов $AB^2 =$
$= BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C$, $AB = \sqrt{BC^2 + 25 - 8BC}$.

4. $P_{ABC} = AB + BC + AC$, $P_{ABC} = \sqrt{BC^2 + 25 - 8BC} + BC + 5$, по доказанному $P_{ABC} = 3BC$. Пусть a — длина стороны BC, $a > 0$, тогда найдем a из уравнения:

(1) $\sqrt{a^2 + 25 - 8a} + a + 5 = 3a \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 25 - 8a} = 2a - 5 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^2 + 25 - 8a = (2a-5)^2, \\ 2a - 5 \geqslant 0; \end{cases} \begin{cases} 3a^2 - 12a = 0, \\ a \geqslant 2{,}5; \end{cases} \Rightarrow a = 4.$

$a = 4$ — корень уравнения (1). $BC = 4$.

Ответ: 4.

781. Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный, $\angle B = 30^\circ$, точка O — центр описанной окружности около $\triangle ABC$, AD — диаметр, $r = AO =$
$= 7\sqrt{2}$.

Найти: диаметр окружности, описанной около $\triangle AEC$.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 26).

1. $\triangle ABC$ — равнобедренный, $\angle B = 30^\circ$, $\angle A = \angle C = 75^\circ$.

2. Вписанные углы $\angle ABC$ и $\angle ADC$ опираются на одну и ту же дугу AC, поэтому $\angle ADC = \angle ABC = 30^\circ$.

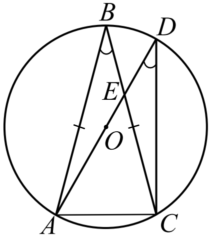


Рис. 26.

3. $\angle ACD = 90^\circ$. $\triangle ACD$ — прямоугольный, $AC = \frac{1}{2}AD = 7\sqrt{2}$, так как $\angle ADC = 30^\circ$.

4. $\triangle AEC$: $\angle EAC = 60^\circ$, $\angle ECA = 75^\circ$, тогда $\angle AEC = 45^\circ$. Стороны AE и EC найдем по теореме синусов. $\frac{AE}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle E} = \frac{EC}{\sin\angle A}$.

$AE = \frac{7\sqrt{2}\cdot\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = 7\sqrt{2}\cdot\sin 75^\circ\cdot\sqrt{2} = 14\sin 75^\circ$.

$EC = \frac{7\sqrt{2}\cdot\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{7\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{3}$.

$S_{AEC} = \frac{1}{2}AE\cdot AC\cdot\sin\angle EAC$, $S_{AEC} = \frac{1}{2}\cdot 14\sin 75^\circ\cdot 7\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{49\sqrt{6}}{2}\sin 75^\circ$. d — диаметр окружности, описанной около $\triangle AEC$.

$d = \frac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot S_{AEC}}$, где a,b,c — длины сторон $\triangle AEC$.

$d = \frac{7\sqrt{2}\cdot 14\sin 75^\circ\cdot 7\sqrt{3}}{2\cdot\frac{49\sqrt{6}}{2}\sin 75^\circ} = 14$.

Ответ: 14.

782. Так как O — центр описанной окружности треугольника ABC, то $OA = OB = OC = R$, где R — радиус этой окружности (см. рис. 27). Центральный угол $\angle AOB$ и вписанный угол $\angle ACB$ опираются на одну и ту же дугу AB, поэтому $\angle AOB = 2\angle ACB = 150^\circ$. Аналогична ситуация для центрального угла $\angle AOC$ и вписанного угла $\angle ABC$: они оба опираются на дугу $AC \Rightarrow \angle AOC = 2\angle ABC = 120^\circ$. Так как $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = OA\cdot OC\cdot\cos\angle AOC$, то $R^2\cdot\cos 120^\circ = \frac{\sqrt{3}-2}{2} \Rightarrow$

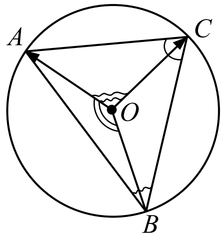


Рис. 27.

$R^2 = \dfrac{\sqrt{3}-2}{2} \cdot (-2) = 2 - \sqrt{3}$. Для нахождения AB воспользуемся теоремой косинусов в треугольнике AOB:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\angle AOB = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos 150^\circ =$

$= 2R^2 \cdot \left(1 - \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$

$= 2(2-\sqrt{3}) \cdot \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} = 4 - 3 = 1.$

Ответ: 1.

783.

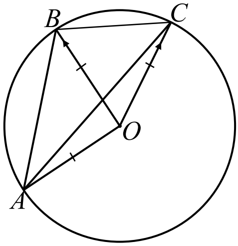


Рис. 28.

В треугольнике ABC (см. рис. 28) точка O — центр описанной окружности около $\triangle ABC$, то

$OA = OB = OC = R$, где R — радиус этой окружности. Центральный угол $\angle AOB$ и вписанный угол ACB опираются на одну и ту же дугу AB, поэтому $\angle AOB = 2\angle ACB = 90^\circ$.

Так как $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB \cdot OC \cdot \cos\angle BOC$, то $R^2 \cdot \cos\angle BOC = 9$, $\cos\angle BOC = \dfrac{9}{R^2}$ ($\angle BOC$ — острый).

Для нахождения радиуса окружности воспользуемся теоремой косинусов

в $\triangle BOC$. $BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos\angle BOC =$
$= R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \dfrac{9}{R^2} = 2R^2 - 18$. $2R^2 - 18 = (3\sqrt{2})^2$, $2R^2 = 36$, $R^2 = 18$, $R = \sqrt{18}$.
$\triangle AOB$: $AB = \dfrac{OB}{\sin 45^\circ}$, $AB = \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = 6$.

Ответ: 6.

785. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник с основанием AC, O — центр его вписанной окружности, T, K, H — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, AC соответственно (см. рис. 29), а радиус вписанной окружности треугольника ABC равен r. Так как отрезки касательных равны, то $HC = KC$, $HA = AT$, $BT = BK$. Пусть $KC = AT = AH = HC = 2x$, $BK = BT = 5x$, $AB = BC = 7x$. Тогда $BH = \sqrt{(7x)^2 - (2x^2)^2} = 3\sqrt{5}x$. Площадь треугольника ABC равна $\dfrac{1}{2}BH \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5}x \cdot 4x = 6\sqrt{5}x^2$. С другой стороны, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + CA) = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 18x = 18\sqrt{5}x$, $18\sqrt{5}x = 6\sqrt{5}x^2$, $x = 3$, $AB = BC = 7x = 21$.

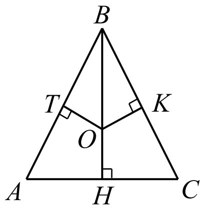


Рис. 29.

Ответ: 21.

786. Так как вершины треугольника (см. рис. 30), делят окружность в отношении $1 : 2 : 3$, то в $\triangle ABC$ $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Так как $OA = \sqrt{2}$, то $AC = 2\sqrt{2}$; $AB = \sqrt{2}$; $BC = \sqrt{6}$.
$S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB \cdot BC}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.
Если сторона правильного треугольника равна a, то его площадь
$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Учитывая предыдущую запись $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, $a^2 = 4$, $a = 2$.

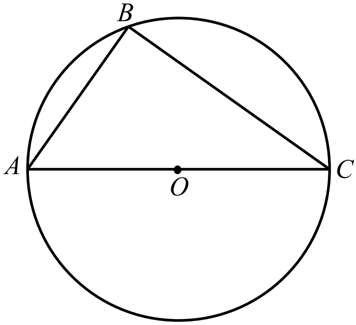


Рис. 30.

Отсюда $a^2 = 4$; $a = 2$.

Ответ: 2.

787. $R = \sqrt{\sqrt{12} - 2}$. $\smile AB : \smile BC : \smile CA = 3 : 4 : 5$.

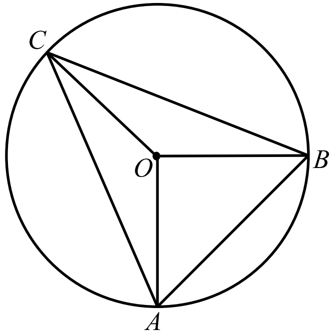


Рис. 31.

O — центр окружности (см. рис. 31).
Определим, на какие части разбивают вершины треугольника окружность: $3 + 4 + 5 = 12$, $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Значит $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle BOC = 120^\circ$, $\angle COA = 150^\circ$. $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC}$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}R^2(\sin 90^\circ + \sin 150^\circ + \sin 120^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2}R^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}R^2(3 + \sqrt{3}) = \frac{1}{4}(\sqrt{12} - 2)(\sqrt{3} + 3) = \sqrt{3}.$$

Пусть a — искомая сторона правильного треугольника. Известно, что

$S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ — площадь правильного треугольника. Тогда $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ и $a^2 = 4$ или $a = 2$.

Ответ: 2.

789. $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ (по 2 углам) (см. рис. 32). $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AB}$,

$AB^2 = AD{\cdot}AC = 4{\cdot}9$, $AB = 6$. $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}AB{\cdot}AD{\cdot}\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}{\cdot}6{\cdot}4{\cdot}\dfrac{1}{2} = 6$.

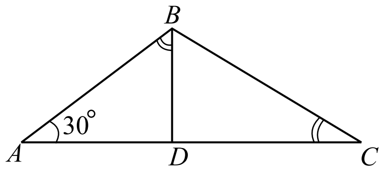


Рис. 32.

Ответ: 6.

790. Так как расстояние $MN = MP$, то $M \in$ биссектрисе $\angle B$ (см. рис. 33). $\triangle ABC$ — равнобедренный, то биссектриса совпадает с высотой (B, M, K

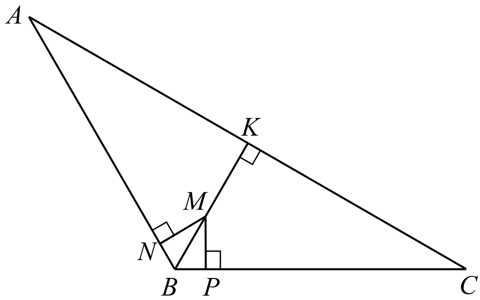


Рис. 33.

лежат на высоте BK). Из $\triangle BMP$ имеем: $BM = \dfrac{MP}{\sin 60^\circ} = \dfrac{3 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$,

$BK = 2\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$. Из $\triangle BKC$: $KC = BK \cdot \operatorname{tg} \angle 60^\circ$,

$KC = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 7$, $AC = 2KC = 14$.

Ответ: 14.

791. Из $\triangle BOK$ (см. рис. 34) имеем: $BO = \dfrac{OK}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot 2}{\sqrt{3}} =$

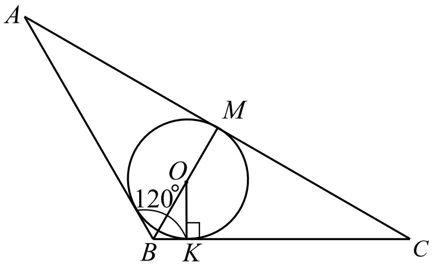


Рис. 34.

$= \dfrac{2\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}-6}{3}$; $BM = BO + OM = \dfrac{4\sqrt{3}-6}{3} + 2 - \sqrt{3} =$
$= \dfrac{4\sqrt{3}-6+6-3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Из $\triangle BMC$ имеем: $MC = BM \cdot \operatorname{tg} 60^\circ =$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{3}{3} = 1$. $AC = 2$.

Ответ: 2.

792. Используя условие задачи, сделаем рисунок (см. рис. 35). Из усло-

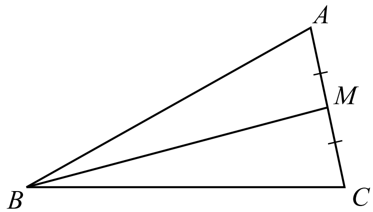


Рис. 35.

вия, что $S_{\triangle ABC} = 96$, следует $S_{BMC} = 48$, $S_{BMC} = \dfrac{1}{2} BM \cdot BC \cdot \sin\angle MBC$,

$48 = 6 \cdot 2\sqrt{97} \cdot \sin\angle MBC$, $\sin\angle MBC = \dfrac{4}{6\cdot 2\sqrt{97}} \dfrac{4}{\sqrt{97}}$;

$\cos\angle MBC = \sqrt{\dfrac{81}{97}} = \dfrac{9}{\sqrt{97}}$. По теореме косинусов из $\triangle BMC$ имеем:
$MC^2 = BM^2 + BC^2 - 2BM \cdot BC \cdot \cos\angle MBC$,

$MC^2 = 144 + 388 - 2 \cdot 12 \cdot 2\sqrt{97} \cdot \dfrac{9}{\sqrt{97}}$, $MC^2 = 100$, $MC = 10$; $AC = 20$. Из $\triangle ABC$ имеем: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin\angle C$, $\sin\angle C = \dfrac{24}{5\sqrt{97}}$; $\cos\angle C = \pm\sqrt{1 - \dfrac{576}{25 \cdot 97}} = \pm\dfrac{43}{5\sqrt{97}}$. Из условия следует, что $BC > BM$. Значит $\angle BMC = \angle BCM$. Следовательно, $\angle BCM < 90^\circ$; $\cos\angle C = \dfrac{43}{5\sqrt{97}}$. Так как по условию $BC > MC$, то $\angle MBC < \angle BMC$. Следовательно, $\angle MBC = 90^\circ$; $\cos\angle MBC = \dfrac{9}{27}$. По теореме косинусов из $\triangle ABC$ имеем: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C$,
$AB^2 = 4 \cdot 97 + 400 - 2 \cdot 2\sqrt{97} \cdot 20 \cdot \dfrac{43}{5\sqrt{97}} = 100$; $AB = 10$.

Ответ: 10.

793. 1. Пусть $\triangle ABC$ — данный по условию (см. рис. 35).

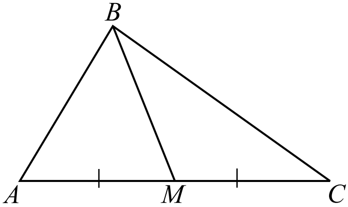


Рис. 36.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle A$; $96 = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20 \cdot \sin\angle A$, $\sin\angle A = \dfrac{96 \cdot 2}{10 \cdot 20} = 0{,}96$;
$\cos\angle A = \pm\sqrt{1 - 0{,}96^2} = \pm\sqrt{(1 - 0{,}96)(1 + 0{,}96)} =$
$= \pm\sqrt{0{,}04 \cdot 1{,}96} = \pm 0{,}2 \cdot 1{,}4 = \pm 0{,}28$. Так как $\angle A$ — острый, то $\cos\angle A = 0{,}28$.
2. Из $\triangle ABM$ имеем: $BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \cdot AM \cdot \cos\angle A$,
$BM^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0{,}28$; $BM^2 = 144$; $BM = 12$.

Ответ: 12.

794. Обозначим $\dfrac{1}{7} AB = x$; $\dfrac{1}{8} BC = y$, тогда $AB = 7x$, $MB = 4x$, $BN = 3y$, $BC = 8y$ (см. рис. 37).

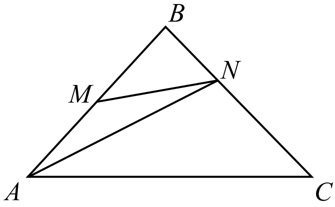


Рис. 37.

1. $\dfrac{S_{ABN}}{S_{MBN}} = \dfrac{\frac{1}{2}AB \cdot BN \cdot \sin\angle B}{\frac{1}{2}MB \cdot BN \cdot \sin\angle B} = \dfrac{7}{4}.$

Так как $S_{MBN} = S_{ABN} - S_{AMN} = S_{ABN} - 9$,

то $\dfrac{S_{ABN}}{S_{ABN} - 9} = \dfrac{7}{4}$; $4S_{ABN} = 7S_{ABN} - 63$; $S_{ABN} = 21$, $S_{BMN} = 12$.

2. $\dfrac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{1}{2}BM \cdot BN \cdot \sin\angle B}{\frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B}$; $\dfrac{12}{S_{ABC}} = \dfrac{4 \cdot 3}{7 \cdot 8}$; $S_{ABC} = 56$.

Ответ: 56.

795. Сделаем рисунок (рис. 38).

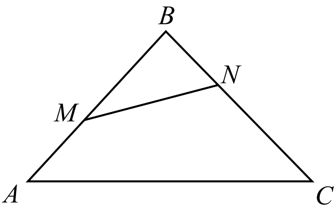


Рис. 38.

Обозначим $\frac{1}{5}AB = x$, $\frac{1}{13}BC = y$, тогда $AB = 5x$, $BM = 3x$, $BN = 2y$, $BC = 13y$. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 13y \cdot \sin\angle B =$ $= \dfrac{65xy}{2}\sin\angle B$,

$S_{BNM} = \dfrac{1}{2}BM \cdot BN \cdot \sin\angle B = \dfrac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4y \cdot \sin\angle B = \dfrac{1}{2} \cdot xy\sin\angle B,$

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{MBN}} = \dfrac{65xy\sin\angle B}{12xy\sin\angle B}, S_{MBN} = S_{ABC} \cdot \dfrac{12}{65} = \dfrac{130 \cdot 12}{65} = 24.$
$S_{AMNC} = 130 - 24 = 106.$

Ответ: 106.

796. Сделаем рисунок (см. рис. 39).

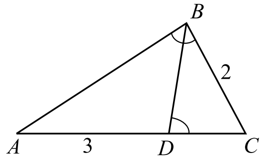


Рис. 39.

По условию $\angle ABC + \angle ADB = 180°$, а углы ADB и BDC смежные, то $\angle BDC + \angle ADB = \pi$. Следовательно, $\angle ABC = \angle BDC$. Тогда $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ ($\angle ABC = \angle BDC$, $\angle C$ — общий). Значит, справедлива пропорция $\dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$, откуда $BC^2 = AC \cdot DC$. Пусть $DC = x > 0$. Тогда $4 = (3 + x)x,\ x^2 + 3x - 4 = 0$; $x_1 = -4$ (не удовлетворяет $y > 0$), $x_2 = 1$. Таким образом, $DC = 1$; $AC = AD + DC = 4$, применив к треугольнику ABC теорему косинусов, имеем:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos\angle ABC.$$

Так как $\angle ABC = \angle BDC$, то $\cos\angle ABC = \cos\angle BDC = \dfrac{13}{20}$. Обозначим, $AB = y$, $(y > 0)$. Получаем уравнение: $16 = y^2 + 4 - 4y \cdot \dfrac{13}{20}$, $5y^2 - 13y - 60 = 0$, $y_1 = 5$, $y_2 = -2{,}4$ (не удовлетворяет условию $y > 0$). Значит, $AB = 5$, а периметр треугольника ABC равен $2 + 4 + 5 = 11$.

Ответ: 11.

797. $\triangle KOH \sim \triangle MOP$ (см. рис. 40) ($\angle KOH = \angle MOP$ — вертикальные;

$\angle KHO = \angle OMP$ — накрест лежащие). $\dfrac{HO}{OM} = \dfrac{KO}{OP}, \dfrac{4}{5} = \dfrac{KO}{OP}$, но

$MH = KP = 9; OK = \dfrac{4}{5}OP; 9 = PK = OK + OP = \dfrac{4}{5}OP + OP = \dfrac{9}{5}OP;$

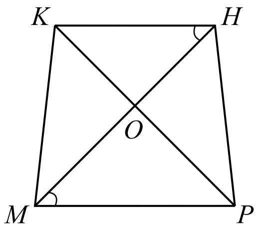


Рис. 40.

$OP = 5$, $KO = 4$. Следовательно, $MKHP$ — равнобедренная трапеция, $\dfrac{P_{OKM}}{P_{OHP}} = 1$.

Ответ: 1.

798. Пусть $\triangle ABC$ — данный по условию (см. рис. 41) $OD = \dfrac{1}{2}AO$;

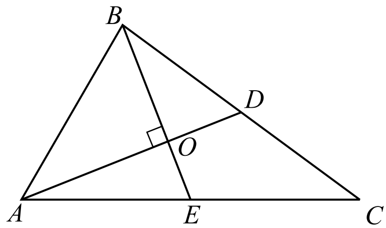


Рис. 41.

$BD = \dfrac{1}{2}BC = 6\sqrt{5}$. Из $\triangle BOD$ имеем: $BD^2 = BO^2 + OD^2 = BO^2 + \dfrac{1}{4}AO^2$.

$OE = \dfrac{1}{2}BO$; $AE = \dfrac{1}{2}AC = 15$.

Из $\triangle AOE$ имеем: $AE^2 = AO^2 + OE^2 = AO^2 + \dfrac{1}{4}BO^2$.

$$\begin{cases} BD^2 = BO^2 + \dfrac{1}{4}AO^2, \\ AE^2 = AO^2 + \dfrac{1}{4}BO^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 180 = BO^2 + \dfrac{1}{4}AO^2, \\ 225 = AO^2 + \dfrac{1}{4}BO^2; \end{cases}$$

$405 = (AO^2 + BO^2) + \dfrac{1}{4}(AO^2 + BO^2)$. Из $\triangle ABO$ имеем $AO^2 + BO^2 = AB^2$, следовательно $405 = \frac{5}{4}AB^2$, $AB^2 = 324$; $AB = 18$.

Ответ: 18.

799. Пусть $\angle CBA = \alpha$ (см. рис. 42), тогда $\angle CAB = 2\alpha$. Воспользуемся

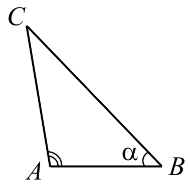


Рис. 42.

теоремой синусов для треугольника ABC: $\dfrac{AC}{\sin\angle CBA} = \dfrac{BC}{\sin\angle CAB} \Rightarrow$ $\dfrac{10}{\sin\alpha} = \dfrac{12}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{12}{10}$; $\dfrac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{6}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Далее применим теорему косинусов: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha$. Обозначая $AB = x$, $x > 0$, и подставляя значения известных величин в равенство теоремы косинусов, приходим к уравнению: $100 = x^2 + 144 - 2\cdot 12\cdot\frac{3}{5}x$; $x^2 - \frac{72}{5}x + 44 = 0$; $5x^2 - 72x + 220 = 0$; $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{22}{5}$.

Пусть $AB = 10$, тогда $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = AC$), а значит $\angle ACB = \angle CBA = \alpha$. Но, тогда из равенства
$\angle CAB + \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ \Rightarrow 4\alpha = 180^\circ$; $\alpha = 45^\circ$; $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{3}{5}$.
Получили противоречие.

Следовательно, $AB \neq 10$. Получаем $AB = \frac{22}{5} = 4{,}4$.

Ответ: 4,4.

801. Пусть BO пересекает AC в точке B_1 (см. рис. 43), BB_1 — биссектриса (центр вписанной окружности точка O является точкой пересечения биссектрис). Так как $AB = BC$, то BB_1 является одновременно и медианой, при этом $S_{B_1OC} = S_{BB_1C} - S_{BOC} = \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABC}$.

Отсюда следует, что $\dfrac{BO}{B_1O} = \dfrac{S_{BOC}}{S_{B_1OC}} = \dfrac{S_{ABC}}{3} : \dfrac{S_{ABC}}{6} = 2 \Rightarrow O$ —

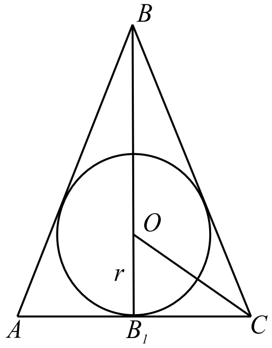


Рис. 43.

точка пересечения медиан (BB_1 — медиана, и она делится точкой O в отношении 2:1). То есть в $\triangle ABC$ точка пересечения биссектрис совпадает с точкой пересечения медиан $\Rightarrow$ $\triangle ABC$ — равносторонний. Пусть a — сторона $\triangle ABC$, $r = \sqrt[4]{3}$ радиус, вписанной в него окружности, тогда площадь $\triangle ABC$ равна

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3}r)^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} \cdot r^2 = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9.$$

Ответ: 9.

802. Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$; $AC = 6$ (см. рис. 44). Обозначим через r — радиус вписанной окружности; R — радиус описанной окружности.

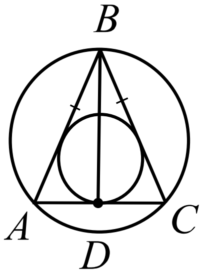


Рис. 44.

Пусть $BC = x$, $x > 3$, тогда $BD = \sqrt{x^2 - 9}$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD$. С другой стороны $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}P_{ABC} \cdot r$. Следовательно $AC \cdot BD = P_{ABC} \cdot r$;

$6\sqrt{x^2-9} = (2x+6)\cdot 1$; $36\cdot\left(x^2-9\right) = 4x^2+24x+36$; $32x^2-24x-360=0$; $4x^2-3x-45=0$; $x_1 = 3{,}75$, $x_2=-3$ — не удовлетворяет условию $x>3$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\left(3{,}75+3{,}75+6\right)\cdot 1 = 6{,}75$;

$R = \dfrac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{ABC}} = \dfrac{3{,}75\cdot 3{,}75\cdot 6}{4\cdot 6{,}75} = 3{,}125.$

Ответ: 3,125.

803. 1) В $\triangle ABB_1$ (см. рис. 45): $\angle B_1 = 90^\circ$; $AB = \sqrt{AB_1^2+BB_1^2}$; $AB = \sqrt{32^2+24^2} = 40$.

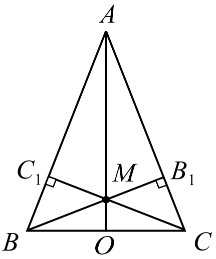


Рис. 45.

2) По условию $AB = AC$. Следовательно, $B_1C = AC - AB_1$; $B_1C = 40-24 = 16$.

3) В $\triangle BB_1C$: $\angle B_1 = 90^\circ$; $BC = \sqrt{BB_1^2 + B_1C^2}$; $BC = \sqrt{32^2+16^2} = 16\sqrt{5}$.

4) В $\triangle AOB$: $\angle O = 90^\circ$; $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2}$;
$AO = \sqrt{40^2 - \left(8\sqrt{5}\right)^2} = 16\sqrt{5}$.

5) $\triangle AOC \sim \triangle AB_1M$ ($\angle A$ — общий, $\angle O = \angle B_1 = 90^\circ$), отсюда $\dfrac{AO}{AB_1} = \dfrac{OC}{MB_1}$; $\dfrac{16\sqrt{5}}{24} = \dfrac{8\sqrt{5}}{MB_1}$; $MB_1 = 12$, тогда и $MC_1 = 12$.

6) $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AB\cdot MC_1$; $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}\cdot 40\cdot 12 = 240$.

Ответ: 240.

804.1) $LP = LO + OP$ (см. рис. 46). Получаем, что $LP = 5+4 = 9$.
2) $\triangle MLP \sim \triangle OLB$ ($\angle L$ — общий, $\angle P = \angle B = 90^\circ$), поэтому $\dfrac{LP}{LB} = \dfrac{PM}{BO}$, но $PM = KP$; $\dfrac{9}{LB} = \dfrac{KP}{BO}$, отсюда $LB = \dfrac{9BO}{KP}$.
3) $\triangle KOP \sim \triangle LOB$ ($\angle 1 = \angle 2$ — вертикальные, $\angle P = \angle B = 90^\circ$),

следовательно, $\dfrac{OP}{OB} = \dfrac{KP}{LB}$; $\dfrac{4}{OB} = \dfrac{KP}{LB}$, отсюда

$LB = \dfrac{OB \cdot KP}{4}$.

4) Из 2) и 3) следует, что $\dfrac{9BO}{KP} = \dfrac{OB \cdot KP}{4}$, отсюда $KP^2 = 36$; $KP = 6$.

5) $S_{KLO} = S_{KLP} - S_{KOP} = \dfrac{1}{2} \cdot KP \cdot LP - \dfrac{1}{2} KP \cdot OP =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 - \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 15.$

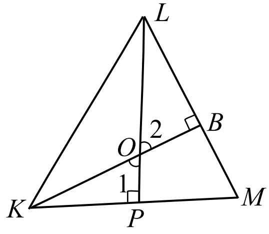


Рис. 46.

Ответ: 15.

805. Так как O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, (см. рис. 47) то прямые AM и BN являются биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$ треугольника $\triangle ABC$.

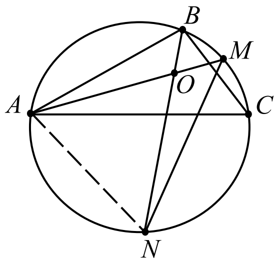


Рис. 47.

Пусть градусные меры углов $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ равны α, β и γ, соответственно. Тогда, $\angle CAN = \angle CBN = \beta/2$, как углы, опирающиеся на одну дугу. Аналогично, $\angle BNA = \angle BCA = \gamma$, $\angle MNB = \angle MAB = \alpha/2$. Из условия $AM = MN \Rightarrow \angle MAN = \angle MNA$. Выразим углы $\angle MAN$ и

$\angle MNA$ через α, β, γ: $\angle MAN = \angle MAC + \angle CAN = \alpha/2 + \beta/2$, $\angle MNA = \angle MNB + \angle BNA = \alpha/2 + \gamma$. Отсюда мы имеем: $\alpha/2+\beta/2 = \alpha/2+\gamma$; $\beta = 2\gamma$. По условию, $\alpha = 30°$, воспользовавшись соотношением $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ и равенством $\beta = 2\gamma$, получаем: $3\gamma = 150°$, $\gamma = 50°$.

Ответ: 50.

806. $\triangle ABC$ — равнобедренный (см. рис. 48).

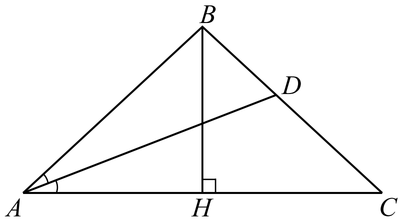


Рис. 48.

Свойство биссектрисы $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow AB = \dfrac{5}{8}AC$. Пусть $AC = x$, $x > 0$, тогда $AB = BC = \dfrac{5}{8}x$. $r = \dfrac{S_{ABC}}{p}$, где p — полупериметр $\triangle ABC$, то есть $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = \dfrac{\frac{5}{8}x + \frac{5}{8}x + x}{2} = \dfrac{9}{8}x$. Пусть H — середина стороны AC. Так как $AB = BC$, то $BH \perp AC$. Поэтому из $\triangle ABH \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{25}{64}x^2 - \dfrac{x^2}{4}} = \dfrac{3}{8}x$. Следовательно, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BH \cdot AC = \dfrac{3}{16}x^2$. Таким образом, $r = \dfrac{S_{ABC}}{p} = \dfrac{\frac{3}{16}x^2}{\frac{9}{8}x} = \dfrac{x}{6}$.

По условию $r = 2$, поэтому $\dfrac{x}{6} = 2$; $x = 12$.

Ответ: 12.

807. $S_{ANMB} = \dfrac{1}{2} \cdot AM \cdot BN \cdot \sin\angle AON$(см. рисунок 49).

В равнобедренном $\triangle ACB$ $\angle C = 120°$, тогда $\angle A = \angle B = 30°$. AM

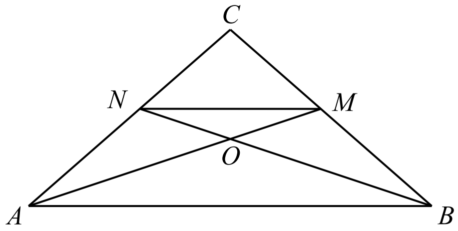


Рис. 49.

и BN биссектрисы $\Rightarrow \angle MAB = \angle NBA = 15^\circ$, тогда $\angle AON = 30^\circ$. $S_{ANMB} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 6{,}25$.

Ответ: 6,25.

808. 1. По условию $\triangle ABC$ равнобедренный и $\angle C = 120^\circ$, следовательно $\angle BAC = \angle ABC = 30^\circ$.

2. AM и BN биссектрисы, следовательно, $\angle MAB = \angle NBA = 15^\circ$, тогда $\angle AON = 30^\circ$, как внешний угол $\triangle AOB$ (см. рис. 49).

3. $S_{ANMB} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BN \cdot \sin\angle AON \Rightarrow AM \cdot BN = \frac{2S_{ANMB}}{\sin\angle AON} =$

$= \frac{2 \cdot 12{,}25}{0{,}5} = 49$. Следовательно, $AM = BN = 7$.

Ответ: 7.

809. Так как CD — биссектриса $\angle ACB$ (см. рис. 50), то $\frac{CB}{BD} = \frac{AC}{AD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$.
Значит, мы можем обозначить $AC = 2x$; $AD = x$, $x > 0$. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора:
$6^2 + (3 + x)^2 = (2x)^2$; или $x^2 - 2x - 15 = 0$.
Решениями этого уравнения будут: $x_1 = 5$; $x_2 = -3$. Учитывая, что $x > 0$, получаем $x = 5$. $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 6 = 15$.

Ответ: 15.

810. Так как AD — биссектриса $\angle BAC$ (см. рис. 51), то $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
Поэтому можем обозначить $AB = 2x$, $AC = x$, $x > 0$. Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\angle BAC$; $36 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \frac{1}{2}$. Отсюда $x = 2\sqrt{3}$. Теперь все стороны треугольника ABC известны. По теореме, обратной теореме Пифагора,

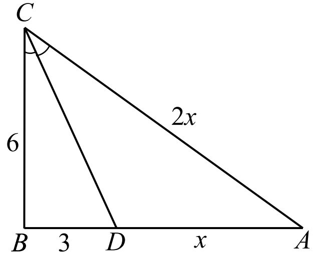


Рис. 50.

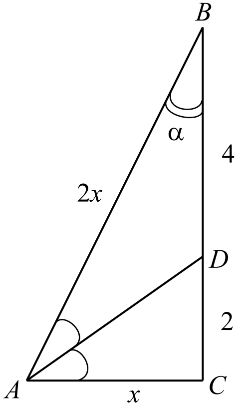


Рис. 51.

так как $(2\sqrt{3})^2 + 6^2 = (4\sqrt{3})^2$ — истинное равенство, то $\triangle ABC$ является прямоугольным и катет AC равен половине гипотенузы AB. Значит $\angle ABC = 30°$.

Ответ: 30.

811. Так как треугольник ABC – остроугольный (см. рис. 52), то высота BH, опущенная на боковую сторону AC, попадает на саму сторону, а не на её продолжение. Найдём BH.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = 300 = \frac{1}{2}25 \cdot BH$. Отсюда $BH = 24$. Из $\triangle BCH$ имеем теперь по теореме Пифагора: $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$. Следовательно, $AH = AC - CH = 25 - 7 = 18$. Из треугольника ABH получаем по теореме Пифагора:
$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$.

Ответ: 30.

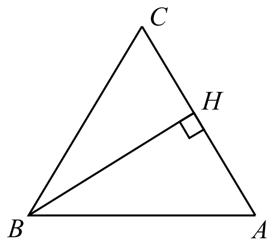


Рис. 52.

813. В координатной плоскости Oxy построим треугольник ABC (см. рис. 53).

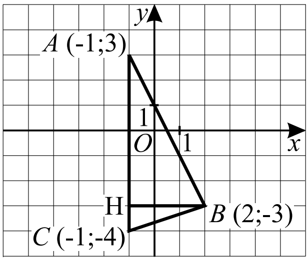


Рис. 53.

Проведём $BH \perp AC$. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BH$.

Сторона AC параллельна оси ординат, $AC = 3 - (-4) = 7$.
Высота BH параллельна оси абсцисс, $BH = 2 - (-1) = 3$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = 10{,}5$.

Ответ: 10,5.

814. В координатной плоскости Oxy построим треугольник ABC (см. рис. 54). Проведём $AH \perp BC$, тогда $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AH \cdot BC$.

Сторона BC параллельна оси ординат, $BC = 5 - 2 = 3$.
Высота AH параллельна оси абсцисс, $AH = 3 - 0 = 3$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4{,}5$.

Ответ: 4,5.

815. Проведём KH — высоту к основанию.

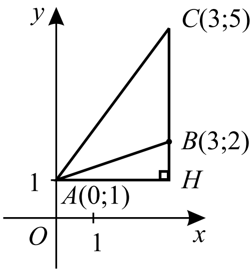


Рис. 54.

$$KH = PK \sin \angle P = PK\sqrt{1 - \cos^2 \angle P} = 13\sqrt{1 - \frac{105}{169}} = 13 \cdot \frac{8}{13} = 8.$$

Ответ: 8.

816. 1) $\angle CLD = \angle BCL$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых, (см. рис. 55). Так как CL — биссектриса $\angle C$, то $\angle DCL = \angle BCL$.

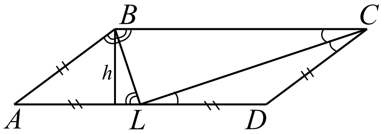


Рис. 55.

Получаем $\angle CLD = \angle DCL$; $DL = CD$. Аналогично, $AL = AB$. Поскольку $AB = CD$, как противоположные стороны параллелограмма, то $AL = DL$, и, значит, $AL = \frac{1}{2}AD$. Пусть h — высота параллелограмма $ABCD$, проведенная к стороне AD. Тогда $S_{ABCD} = h \cdot AD$, $S_{ABL} = \frac{1}{2}h \cdot AL = \frac{1}{4}h \cdot AD$. Следовательно, $S_{ABCD} = 4S_{ABL} = 60$. Отметим также, что для периметра p параллелограмма $ABCD$ имеем выражение: $p = 2(AB + AD) = 2 \cdot \frac{3}{2}AD = 3AD = 3BC$.

2) $\angle BCL = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle CBL = \frac{1}{2}\angle B$, $\angle B + \angle C = 180°$. Значит, $\angle BCL + \angle CBL = 90°$, $\angle BLC = 180° - \angle BCL - \angle CBL = 90°$. Следовательно, $\triangle BCL$ — прямоугольный. Значит, $2S_{BCL} = BL \cdot CL = h \cdot BC = S_{ABCD} = 60$, $BL = \frac{60}{CL} = 5$.

Из $\triangle BCL$ по теореме Пифагора имеем: $BC = \sqrt{BL^2 + CL^2} = 13$. Итак, $p = 3BC = 39$.

Ответ: 39.

817. 1) Так как $\angle CLD = \angle BCL$ и $\angle DCL = \angle BCL$, то $\angle CLD = \angle DCL$, (см. рис. 56). Следовательно, $DL = CD$, и, аналогично, $AL = AB$. По-

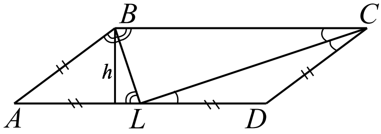


Рис. 56.

скольку $CD = AB$, то $DL = AL = \frac{1}{2}AD$.

2) Так как $\angle BCL = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle CBL = \frac{1}{2}\angle B$, то $\angle BCL + \angle CBL =$

$= \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle B = 90^\circ \Rightarrow \angle BLC = 90^\circ$. Пусть $CL = x$, $(x > 0)$, тогда из $\triangle BLC$ по теореме Пифагора имеем: $BC = \sqrt{36 + x^2}$. Таким образом, $DL = CD = \frac{1}{2}\sqrt{36 + x^2}$ и $CL + CD + DL = x + \sqrt{36 + x^2}$. Так как по условию периметр $\triangle BCL = 18$, то $x + \sqrt{36 + x^2} = 18$, $\sqrt{36 + x^2} = 18 - x$. Отсюда $x = 8$. Итак, $S_{BCL} = \frac{1}{2}BL \cdot CL = 24$, $S_{ABCD} = 2S_{BCL} = 48$.

Ответ: 48.

818. 1) Так как $\angle ABL = \angle CBL = \angle BLA$, то $AB = AL$. Аналогично, $CD = DK$. Следовательно, учитывая условие, получаем:
$LK = AD - AL - DK = 3AB - 2AB = AB$, (см. рис. 57). Пусть P — точ-

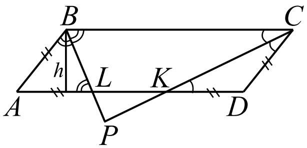


Рис. 57.

ка пересечения прямых BL и CK. Так как $AL + DK = 2AB = \frac{2}{3}AD < AD$, то точка P лежит вне параллелограмма. Так как $LK \parallel BC$, то

$\triangle LKP \backsim \triangle BCP$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{LK}{BC} = \dfrac{1}{3}$. Имеем: $PL = \dfrac{1}{3}BP$, $BL = \dfrac{2}{3}BP$, $BP = \dfrac{3}{2}BL = 9$. Аналогично находим, что $CP = \dfrac{3}{2}CK = 12$.

2) Так как $\angle PBC = \dfrac{1}{2}\angle B$, $\angle PCB = \dfrac{1}{2}\angle C$, $\angle PBC + \angle PCB =$ $= \dfrac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90°$, то $\angle BPC = 90°$.

3) $S_{BCP} = \dfrac{1}{2}BP \cdot CP = 54$, $S_{LKP} = k^2 \cdot S_{BPC} = \dfrac{1}{9} \cdot 54 = 6$. Итак, $S_{BCKL} = S_{BCP} - S_{LKP} = 48$, $S_{BCKL} = \dfrac{h}{2} \cdot (BC + LK) = \dfrac{h}{2} \cdot \dfrac{4}{3}BC =$ $= \dfrac{2}{3}S_{ABCD}$ (здесь h обозначает высоту параллелограмма). Следовательно, $S_{ABCD} = \dfrac{3}{2}S_{BCKL} = 72$. *Ответ:* 72.

819. Так как $\angle ABL = \angle CBL = \angle BLA$, то $AB = AL$. Аналогично, $CD = DK$. Поскольку $AL + DK = 2AB = \dfrac{4}{3}AD > AD$, то точка пересечения отрезков BL и CK лежит внутри параллелограмма. Пусть $P = BL \cap CK$ (см. рис.58). Тогда $KL = AL + DK - AD = 2AB - AD =$ $= 2 \cdot \dfrac{2}{3}AD - AD = \dfrac{1}{3}AD$. $KL = AL + DK - AD = \dfrac{1}{3}AD$. Пусть h —

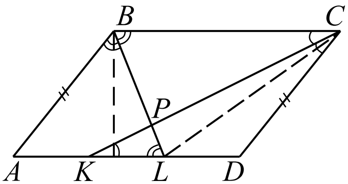


Рис. 58.

высота параллелограмма $ABCD$ к стороне AD. Тогда

$S_{BCLK} = \dfrac{1}{2}h \cdot (BC + KL) = \dfrac{1}{2}h(BC + \dfrac{1}{3}AD) = \dfrac{1}{2}h \cdot \dfrac{4}{3}BC = \dfrac{2}{3}S_{ABCD}$,

$S_{ABCD} = \dfrac{3}{2} S_{BCLK}$.

2) Заметим, что $\angle BPC = 90°$, так как $\angle PBC + \angle PCB =$
$= \dfrac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90°$. Поэтому $S_{BCLK} = \dfrac{1}{2} BL \cdot CK \cdot \sin 90° = 30$.

Получаем $S_{ABCD} = \dfrac{3}{2} S_{BCLK} = \dfrac{3}{2} \cdot 30 = 45$.

Ответ: 45.

820. Пусть ML — высота треугольника MEC. Тогда KL — высота трапеции $FECD$ (см. рис. 59).

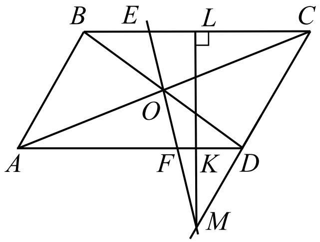


Рис. 59.

Рассмотрим треугольники MEC и MFD. $\angle ECM$ и $\angle FDM$ — соответственные, $\angle CEM$ и $\angle DFM$ — соответственные, $\angle CME$ и $\angle DMF$ — совпадают. Следовательно, $\triangle CME \sim \triangle FMF$ — по трем равным углам. Так как, по условию, $EC : FD = 2$, то $ML : KM = 2$. Отсюда, $EC = 2FD$, $ML = 2KM$. С учетом того, что $LK = ML - KM = 2KM - KM = KM$, получаем $S_{FECD} = \dfrac{EC + FD}{2} KL = \dfrac{3FD \cdot KM}{2}$.

$S_{ECM} = \dfrac{1}{2} EC \cdot ML = \dfrac{2FD \cdot 2KM}{2} = 2FD \cdot KM$. Следовательно,

$\dfrac{S_{FECD}}{S_{ECM}} = \dfrac{3FD \cdot KM}{4FD \cdot KM} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

821. Искомый периметр $P_{ABD} = AB + AD + BD$. Найдём стороны AB, AD и BD (см. рис. 60).

$AD = AF + FD$. Чтобы найти FD покажем, что треугольники BOE и FOD равны. $\angle EBO$ и $\angle ODF$ — накрест лежащие, $\angle BOE$ и $\angle FOD$ — вертикальные, $BO = OD$ — так как O — точка пересечения диагоналей. Следовательно, $\triangle BOE = \triangle FOD$ — по стороне и двум прилежащим

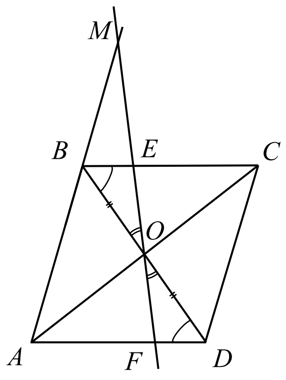


Рис. 60.

углам. Поэтому $FD = BE = 1{,}6$. Следовательно, $AD = 6{,}4 + 1{,}6 = 8$.

Найдём сторону AB. Рассмотрим треугольники BME и AMF. $\angle MBE$ и $\angle MAF$ — соответственные, $\angle BME$ и $\angle AMF$ — совпадают. Следовательно, $\triangle BME \sim \triangle AMF$ — по двум равным углам. Из подобия треугольников имеем $\dfrac{MB}{AM} = \dfrac{BE}{AF}$, $AM = \dfrac{MB \cdot AF}{BE} = \dfrac{1 \cdot 6{,}4}{1{,}6} = 4$. Получаем, $AB = AM - BM = 4 - 1 = 3$.

Найдём сторону BD. По теореме косинусов $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos\angle BAD = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cos 60^\circ = 49$, $BD = 7$.

Получаем, $P_{ABD} = 3 + 8 + 7 = 18$.

Ответ: 18.

822. 1) $\triangle BKP \sim \triangle CDP$ (по двум углам).

Значит, $\dfrac{BK}{CD} = \dfrac{PK}{PD} = \dfrac{PK}{PK + DK} = \dfrac{6}{6+9} = \dfrac{2}{5}$. То есть $BK = \dfrac{2}{5}CD = 4$.

2) Докажем, что $\triangle BKP$ – равнобедренный (см. рис. 61). $\angle BPK = \angle PDA$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD, PC и секущей PD), $\angle BKP = \angle CDP$ (как соответственные при параллельных прямых AB, CD и секущей PD), $\angle PDA = \angle CDP$ (DP – биссектриса $\angle D$). Значит, $\angle BPK = \angle BKP$ и $BP = BK = 4$.

3) $P_{BKP} = BP + BK + PK = 4 + 4 + 6 = 14$.

Ответ: 14.

823. 1) $\triangle ABN \sim \triangle DMN$ (по двум углам) (см. рис. 62). Значит, $\dfrac{AB}{MD} = \dfrac{BN}{MN} = \dfrac{BM + MN}{MN} = \dfrac{6+4}{4} = \dfrac{5}{2}$. То есть $AB = \dfrac{5}{2}MD = 12{,}5$.

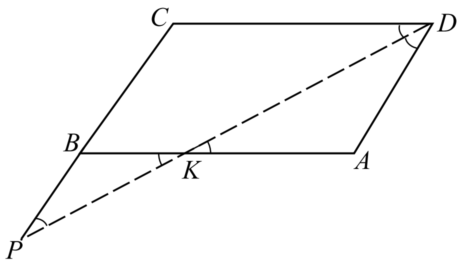


Рис. 61.

2) $\angle ANB = \angle NBC$ (как накрест лежащие), $\angle ABN = \angle NBC$, BN — биссектриса $\angle B$. Значит, $\angle ANB = \angle ABN$, следовательно, $\triangle ABN$ – равнобедренный, $AN = AB = 12{,}5$.

3) $P_{ABN} = AN + AB + BN = 12{,}5 + 12{,}5 + 10 = 35$.

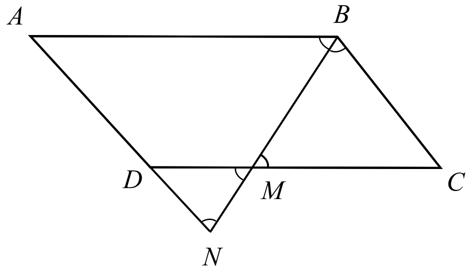


Рис. 62.

Ответ: 35.

824. $\cos\angle B = \cos(180^\circ - \angle A) = -\cos\angle A = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (см. рис. 63).

Пусть AH_1 высота параллелограмма, проведенная к стороне CB. $BH_1 = 2\sqrt{5}\cdot\cos\angle B = 2$; $AH_1 = CH = 4$. Так как $\triangle AHK \sim \triangle KBC$, то $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AH}{BC} = \dfrac{3}{5}$. Пусть $AH = 3x$, тогда $BC = 5x$. Так как четырехугольник $AHCH_1$ является прямоугольным, то $AH = CH_1 = 3x \Rightarrow BH_1 = BC - CH_1 = 2x = 2 \Rightarrow x = 1$, $BC = 5$. $S_{ABCD} = BC\cdot AH_1 = 5\cdot 4 = 20$.

Ответ: 20.

825. $\angle CDN = \angle DNA$ (как накрест лежащие), $\angle CDN = \angle NDA$ (DN

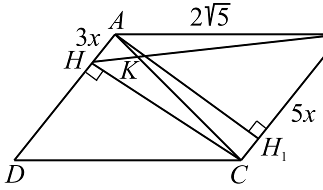


Рис. 63.

— биссектриса $\angle D$). Следовательно $\angle ADN = \angle DNA$. Следовательно $\triangle ADN$ — равнобедренный (см. рис. 64). $AD = AN = AB - BN = = DC - BN = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, $\angle ADN = \angle BMN$ (как накрест лежащие), $\angle BNM = \angle DNA$ (вертикальные). Так как $\angle NDA = \angle DNA$, то $\angle BNA = \angle BMN$. Значит, $\triangle NBM$ — равнобедренный. $BN = BM = \sqrt{3}$. $\triangle DCM \sim \triangle NBM$ (по двум углам: $\angle M$ — общий, $\angle CDM = \angle BNM$ — соответственные), $\dfrac{DC}{BN} = \dfrac{DM}{NM}$. $NM = \dfrac{BN \cdot DM}{DC}$, $NM = 3$. Из $\triangle BNM$ по теореме косинусов $MN^2 = BN^2 + BM^2 - 2BN \cdot BM \cdot \cos\angle NBM$, $\cos\angle NBM = -\dfrac{1}{2}$, $\angle NBM = 120^\circ$. $\angle NBC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Из $\triangle CBN$ по теореме косинусов
$CN^2 = BC^2 + BN^2 - 2BC \cdot BN \cos\angle NBC$, $CN^2 = 9$, $CN = 3$.

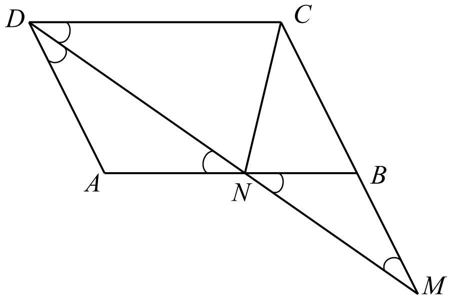


Рис. 64.

Ответ: 3.

826. Пусть $h_1 = 5$, $h_2 = 7$, $AB = b$, $AD = a$ (см. рис. 65).

$S_{ABCD} = ah_1 = bh_2 \Rightarrow 5a = 7b$, кроме того периметр параллелограмма равен $2(a + b) = 48$. Составим систему: $\begin{cases} 5a - 7b = 0, \\ a + b = 24; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14, \\ b = 10. \end{cases}$

Тогда $\sin\alpha = \dfrac{h_1}{b} = \dfrac{1}{2}$.

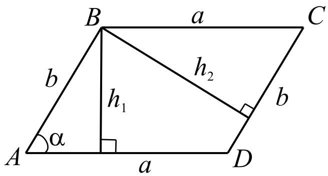


Рис. 65.

Ответ: 0,5.

827. Пусть $h_1 = 3\sqrt{2}$, $h_2 = 5\sqrt{2}$ (см. рис. 65). $S_{ABCD} = ah_1 = bh_2$, $\Rightarrow$ $3a\sqrt{2} = 5b\sqrt{2}$, так же $2(a+b) = 32$. $\begin{cases} 3a\sqrt{2} = 5b\sqrt{2}, \\ a+b = 16. \end{cases}$ Решив систему, получим $a = 10$, $b = 6$. $\sin\alpha = \dfrac{h_1}{b} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1$.

Ответ: 1.

829. Обозначим одну восьмую часть площади трапеции через x, тогда $S_{MBCN} = 3x$, $S_{AMND} = 5x$, $S_{ABCD} = 8x$. Пусть $AD = a$, $a > 10$. Так

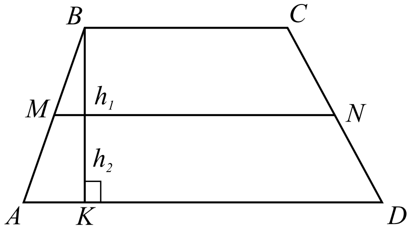


Рис. 66.

как $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$ (по теореме о средней линии трапеции), $BC =$ $= 2MN - AD = 20 - a$. Проведем высоту $BK = h_1 + h_2$, где h_1 — высота трапеции $MBCN$, h_2 — высота трапеции $AMND$ (см. рис. 66).

$S_{MBCN} = \dfrac{MN + BC}{2} \cdot h_1$; $3x = \dfrac{10 + 20 - a}{2} \cdot h_1$; $h_1 = \dfrac{6x}{30 - a}$.

$S_{AMND} = \dfrac{MN + AD}{2} \cdot h_2$; $5x = \dfrac{10 + a}{2} \cdot h_2$; $h_2 = \dfrac{10x}{10 + a}$.

$S_{ABCD} = 10 \cdot (h_1 + h_2)$; $h_1 + h_2 = \frac{8x}{10} = \frac{4x}{5}$, $\frac{6x}{30-a} + \frac{10x}{10+a} = \frac{4x}{5}$;

$\frac{3}{30-a} + \frac{5}{10+a} = \frac{2}{5}$; $a^2 - 25a + 150 = 0$; $a_1 = 15$, $a_2 = 10$ не удовлетворяет условию $a > 10$. $AD = 15$.

Ответ: 15.

830. Дано: $ABCD$ — равнобедренная трапеция, вписанная, $AD = 21$, $BC = 9$, BH — высота, $BH = 8$ (см. рис. 67).

Найти: диаметр описанной окружности.

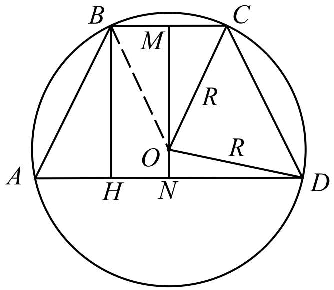


Рис. 67.

Обозначим через O — центр описанной около трапеции окружности (см. рис. 67). MN — высота трапеции, проходящая через точку O. Так как $OC = OB$ (радиус описанной окружности), то $\triangle OBC$ — равнобедренный. OM — высота $\triangle BOC$, а следовательно и медиана. Поэтому $BM = MC$; $MC = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2}$. Аналогично, $ND = AN$. $ND = \frac{AD}{2} = \frac{21}{2}$. Пусть $MO = x$, $x > 0$, тогда $ON = 8 - x$. Так как MN — высота трапеции, то $\angle CMO = 90°$, $\angle OND = 90°$. Следовательно, $\triangle CMO$ и $\triangle OND$ — прямоугольные. Из $\triangle MOC$ имеем:
$OC^2 = MC^2 + MO^2$. Пусть R — радиус описанной окружности. Тогда $R^2 = OC^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + x^2$ (1). Из $\triangle NOD$ имеем:

$OD^2 = ON^2 + ND^2$, $R^2 = OD^2 = (8-x)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2$ (2). Из (1) и (2) имеем: $\left(\frac{9}{2}\right)^2 + x^2 = (8-x)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2$; $\frac{81}{4} + x^2 = \frac{441}{4} + 64 - 16x + x^2$;

$16x = 154$; $x = \dfrac{77}{8} = 9\dfrac{5}{8}$. Из (1) имеем: $R^2 = \left(\dfrac{9}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{77}{8}\right)^2 = \dfrac{7225}{64}$;

$R = \dfrac{85}{8}$. Диаметр окружности $D = 2R = \dfrac{85}{4} = 21{,}25$.

Ответ: 21,25.

831. Через вершину C проведем $CE \parallel BD$ (см. рис. 68). Продолжим отрезок AD до пересечения с CE. Четырехугольник $DBCE$ — параллело-

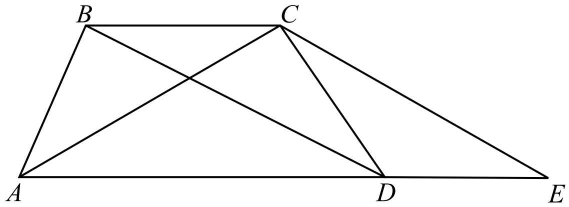


Рис. 68.

грамм,
$CE = BD = 12$, $DE = BC = 5$. $S_{ABCD} = S_{ACE}$. Найдём S_{ACE} по формуле Герона. $AC = 9$, $CE = 12$, $AE = 15$. Полупериметр $\triangle ACE$ $p = \dfrac{9+12+15}{2} = 18$. $S_{ACE}\sqrt{p(p-AC)(p-CE)(p-AE)} =$
$= \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)} = 3 \cdot 18 = 54$. $S_{ABCD} = 54$.

Ответ: 54.

832. Пусть O — центр вписанной в трапецию $ABCD$ окружности. Точка O лежит на средней линии (см. рис. 69) MN трапеции, так как равноудалена от прямых AD и BC. А поскольку $\angle BAD = 90^\circ$, то и $\angle OMA$ — тоже прямой. Значит, M — точка касания. Поэтому, $MO = 5$. Пусть H — точка касания окружности со стороной CD. Тогда $\angle NHO = 90^\circ$, $OH = 5$. Из прямоугольного треугольника OHN находим $ON = 2OH = 10$, то есть $MN = MO + ON = 15$.

Ответ: 15.

833. 1. Пусть O — центр окружности с диаметром AC. $AO = KO$ как радиусы, значит $\triangle AOK$ равнобедренный. Проведем высоту OM, тогда OM — медиана в $\triangle KOA \Rightarrow AK = 2AM = 2AO\cos\alpha = 18\cos\alpha$ (см. рис. 70).

2. В трапеции $ABCD$ проведем высоты DF и CK ($\angle CKA = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр AC). Пусть $2\alpha = 90^\circ$, тогда DB совпадает с высотой $DF = FK$. И, значит, $CK = DB$. Но тогда $CK = 18\cos\alpha = 18\cos 45^\circ =$

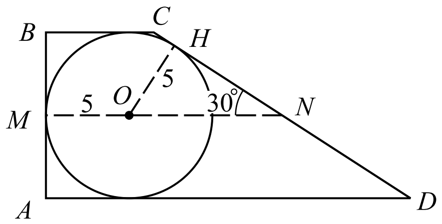


Рис. 69.

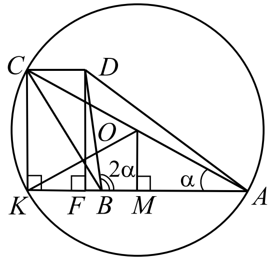


Рис. 70.

$= 9\sqrt{2} \neq 16 = DB$. Следовательно, $2\alpha \neq 90°$. Из $\triangle AKC$, $CK = AC \sin\alpha =$ $= 18\sin\alpha$. Из $\triangle BFD$ получаем : 1) если $2\alpha < 90°$, то $DF = BD\sin 2\alpha = 16\sin 2\alpha$; 2) если $2\alpha > 90°$, то $DF = BD\sin(180° - 2\alpha) = BD\sin 2\alpha =$

$= 16\sin 2\alpha$. Тогда $CK = DF$; $18\sin\alpha = 32\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos\alpha = \dfrac{9}{16}$.

3. $AK = 18 \cdot \dfrac{9}{16} = \dfrac{81}{8} = 10{,}125$.

Ответ: 10,125.

834. Пусть $AC = 12$; $DB = 10$; $\angle OAB = x$, тогда $\angle OBA = 2x$ (см. рис. 71).

1. Высоту трапеции можно найти как $AC \cdot \sin x$. Пусть $2x = 90°$, тогда

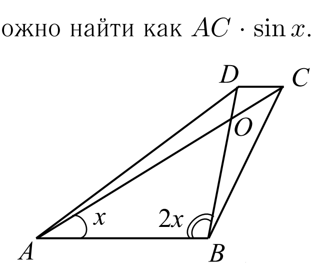


Рис. 71.

DB — высота трапеции. И, значит, $AC \cdot \sin x = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \neq 10 = DB$.
Следовательно, $2x \neq 90°$.

2. Если $2x > 90°$, то высота трапеции будет равна $DB \sin(180° - 2x) = DB \sin 2x$. Если $2x < 90°$, то высота трапеции будет равна $DB \sin 2x$. Тогда, с учетом п. 1, получаем $AC \sin x = DB \sin 2x$; $12 \sin x = 10 \sin 2x$, $\frac{\sin x}{2 \sin x \cos x} = \frac{10}{12}$, $\frac{1}{2 \cos x} = \frac{5}{6}$, $\cos x = \frac{3}{5}$, $\sin x = \frac{4}{5}$.

3. $S_{ADCB} = \frac{1}{2} AC \cdot DB \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \sin(180° - (x + 2x)) = 60 \sin 3x$.
Найдём $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x =$
$= 2 \sin x \cos^2 x + \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x = \frac{108}{125} - \frac{64}{125} = \frac{44}{125}$.

Следовательно $S_{ADCB} = 60 \cdot \frac{44}{125} = 21{,}12$.

Ответ: 21,12.

835.

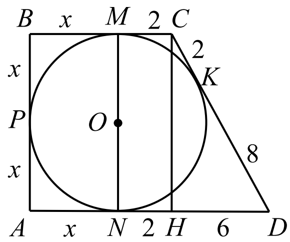


Рис. 72.

Проведем $MN \perp AD$ через центр вписанной окружности (см. рис. 72). Тогда точки M и N являются точками касания окружности со сторонами BC и AD соответственно.
$MC = CK = 2$ и $DK = DN = 8$ как отрезки касательных.
$BM = BP = PA = AN = x$ (аналогично). Опустим высоту CH.
$HD = DN - NH = 8 - 2 = 6$. Из $\triangle HCD$: $CH^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2$; $CH = 8$.
$BA \parallel CH$, так как по условию $\angle BAD = 90°$. Следовательно, $BA = CH$ (как отрезки, заключенные между параллельными прямыми). Получаем, $2x = 8$; $x = 4$. Теперь найдем $P_{ABCD} = 4x + 2 + 10 + 8 = 20 + 16 = 36$.

Ответ: 36.

836. 1. Используя рисунок 73, имеем $S_{ABD} = S_{ABO} + S_{AOD}$;

$S_{ACD} = S_{COD} + S_{AOD}$.

Так как $S_{ABD} = S_{ACD} = \dfrac{H \cdot AD}{2}$, то $S_{ABO} + S_{AOD} = S_{COD} + S_{AOD}$;

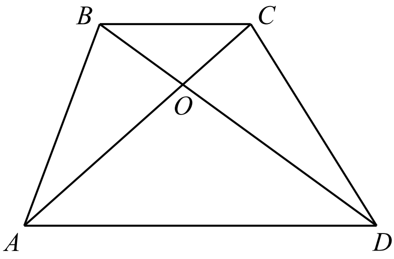


Рис. 73.

$S_{ABO} = S_{COD}$.

2. Из подобия треугольников BOC и AOD следует, $\dfrac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOD}} = k^2 = \dfrac{1}{9}$, где k — коэффициент подобия; $S_{\triangle AOD} = 9S_{\triangle BOC}$.

3. Так как $OC = \dfrac{1}{3}AO$, то $S_{\triangle BOC} = \dfrac{1}{2}h \cdot OC = \dfrac{1}{2} \cdot h \cdot \dfrac{1}{3}AO =$

$= \dfrac{1}{3}S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{3} \cdot 6 = 2$. $S_{\triangle AOB} = 3S_{\triangle BOC}$. Получим:

$S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD} = 6 + 2 + 6 + 18 = 32$.

Ответ: 32.

837. Пусть $BC = x$, тогда $AD = 2x$ (см. рис. 74). $\triangle BOC \sim \triangle AOD$ (по двум углам), значит $\dfrac{OH_1}{OH_2} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$. Так как $BC = \dfrac{1}{2}AD$, то BC — средняя линия $\triangle APD$. Следовательно высота $\triangle BCC$ $PH = H_1H_2 = 3OH_1$. По условию $\dfrac{x \cdot OH_1}{2} = 3$, значит $S_{BOC} = \dfrac{x \cdot 3OH_1}{2} = 9 = S_{\triangle BPC}$.

$S_{PCOB} = S_{\triangle BPC} + S_{\triangle BOC} = 9 + 3 = 12$.

Ответ: 12.

839. 1) Из равенства $\triangle A_1A_2A_3$ и $\triangle A_3A_4A_5$ (см. рис. 75) имеем $A_1A_3 = A_3A_5$. $\angle A_1A_3A_5 = \angle A_2A_3A_4 - \angle A_2A_3A_1 - \angle A_4A_3A_5$. Так как $\angle A_2A_3A_4 =$ $= \dfrac{180^\circ(8-2)}{8} = 135^\circ$ и $\angle A_2A_3A_1 + \angle A_4A_3A_5 = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, то $\angle A_1A_3A_5 = 90^\circ$. Следовательно A_3A_5 — диаметр описанной окружности и $A_1A_3 = A_3A_5 = R\sqrt{2}$.

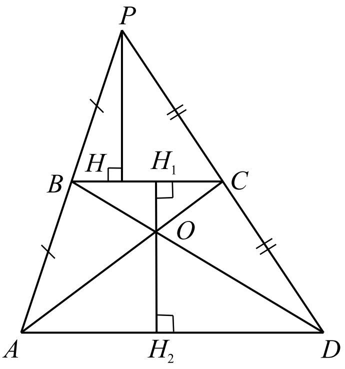


Рис. 74.

$S_{\triangle A_1A_3A_5} = \dfrac{1}{2}A_1A_3 \cdot A_3A_5 = R^2$; $R^2 = 9$; $R = 3$.

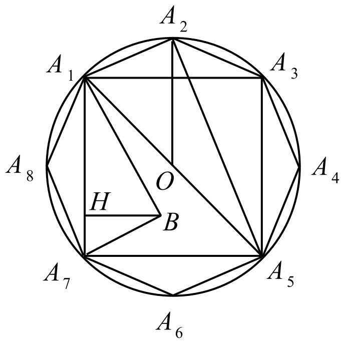


Рис. 75.

2) Так как $\angle A_1OA_2 = \dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, то $\angle A_2OA_5 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$;

$S_{A_2OA_5} = \dfrac{1}{2} \cdot A_2O \cdot A_5O \cdot \sin 135^\circ = \dfrac{1}{2}R^2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$.

3) Из равенства $\triangle A_1A_8A_7$ и $\triangle A_1A_2A_3$ имеем $A_1A_7 = A_1A_3 = R\sqrt{2}$. Тогда, $S_{\triangle A_1A_7B} = \dfrac{1}{2}A_1A_7 \cdot BH = \dfrac{1}{2}R\sqrt{2} \cdot BH = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \cdot BH$. Учитывая, что по условию $\triangle A_1A_7B$ и $\triangle A_2OA_5$ равновелики, получаем $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}BH = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$;

$BH = 1{,}5.$

Ответ: 1,5.

840.

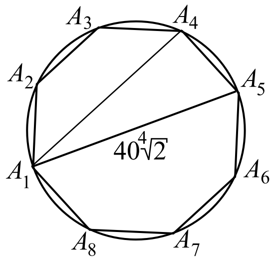


Рис. 76.

1) $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = 135^\circ$; $180n - 360 = 135n$; $45n = 360$, $n = 8$, значит, дан правильный восьмиугольник (см. рис. 76).

2) $\angle A_1A_5A_4 = \angle A_1A_5A_6$ (как углы, опирающиеся на равные дуги $\smile A_1A_2A_4$ и $\smile A_1A_8A_6$). Следовательно, $\angle A_1A_5A_4 = \dfrac{1}{2}\angle A_5 = \dfrac{1}{2}\cdot 135^\circ = 67{,}5^\circ$.

3) Из четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ следует $\angle A_3A_4A_1 + \angle A_2A_1A_4 =$
$= 360^\circ - \angle A_1A_2A_3 - \angle A_2A_3A_4 = 360^\circ - 2\cdot 135^\circ = 90^\circ$. $\angle A_3A_4A_1 =$
$= \angle A_2A_1A_4 = 45^\circ$. Тогда $\angle A_1A_4A_5 = \angle A_3A_4A_5 - \angle A_3A_4A_1 =$
$= 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$. Следовательно, A_1A_5 — диагональ описанной окружности. Сторона восьмиугольника $a_8 = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{8}$, где $2R = A_1A_5 = 40\sqrt[4]{2}$;

$a_8 = 40\sqrt[4]{2}\cdot\sin 22{,}5^\circ$.

4) $S_{A_1A_4A_5} = \dfrac{1}{2}A_1A_5\cdot A_4A_5\cdot\sin\angle A_4A_5A_1 =$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 40\sqrt[4]{2}\cdot 40\sqrt[4]{2}\cdot\sin 22{,}5^\circ\cdot\sin 67{,}5^\circ = 800\sqrt{2}\sin 22{,}5^\circ\cdot\cos 22{,}5^\circ =$

$= 400\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ = 400\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 400.$

Ответ: 400.

841. Так как двенадцатиугольник правильный, то $\angle A_6OA_9$ равен $3\cdot\dfrac{360^\circ}{12} = 90^\circ$ (см. рис. 77). Обозначим через r радиус, описанной около двенадцатиугольника окружности. Тогда, площадь треугольника

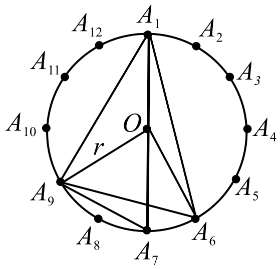


Рис. 77.

$$S_{\triangle A_6OA_9} = \frac{1}{2}A_6O \cdot A_9O = \frac{1}{2}r^2.$$

$$S_{\triangle A_1OA_9} = \frac{1}{2}A_1O \cdot A_9O \sin 120^\circ = \frac{1}{2}r^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}r^2}{4};$$

$$S_{\triangle A_7OA_9} = \frac{1}{2}A_7O \cdot A_9O \sin 60^\circ = \frac{1}{2}r^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Откуда, $S_{\triangle A_1A_7A_9} = S_{\triangle A_1OA_9} + S_{\triangle A_7OA_9} = \dfrac{\sqrt{3}r^2}{2}$, учитывая, что $S_{\triangle A_1A_7A_9} = 6\sqrt{3}$, то $\dfrac{\sqrt{3}r^2}{2} = 6\sqrt{3}$, $r^2 = 12 \Rightarrow S_{\triangle A_6OA_9} = 6$.

Ответ: 6.

842. Пусть $A_1A_2 = a$, $a > 0$, тогда так как $\triangle OA_1A_2$ — равносторонний, (покажите это) то $OB_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (см. рис. 78).

$$S_{A_1A_2A_3A_6} = 3 \cdot S_{A_1OA_2} = 3 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$S_{B_1B_2B_3B_4B_5B_6} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{B_1OB_2} = 3 \cdot OB_1 \cdot OB_2 \sin \angle B_1OB_2 =$$

$$= 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin 60^\circ = \frac{9a^2\sqrt{3}}{8};$$

$$\frac{S_{B_1B_2B_3B_4B_5B_6}}{S_{A_1A_2A_3A_6}} = \frac{9 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}}{3 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

844. Углы APH и ADP равны, так как каждый из них в сумме с углом

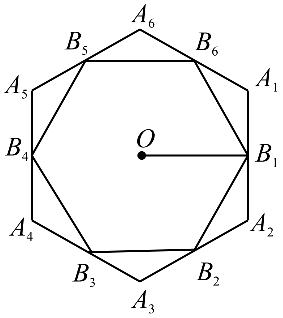


Рис. 78.

PAH даёт 90° (см. рис. 79).

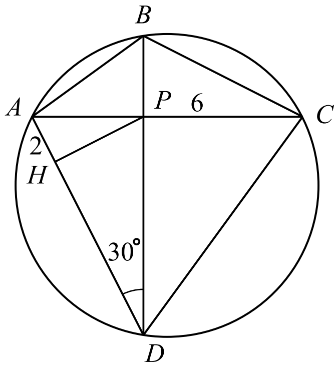


Рис. 79.

Следовательно $\angle APH = 30^\circ$. $AP = \dfrac{AH}{\sin 30^\circ} = 4$.

$PD = AP \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3}$ (см. рисунок). Углы DAC и DBC равны, как опирающиеся на одну дугу. $\angle BPC = \angle APD$ (как вертикальные). Следовательно, треугольники ADP и BCP подобны.

$AP : PD = BP : PC$. $BP = \dfrac{AP \cdot PC}{DP} = 2\sqrt{3}$.

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}DP \cdot AC}{\frac{1}{2}PB \cdot AC} = \frac{DP}{BP} = 2.$$

Ответ: 2.

845. Так как $O_1A = 3$, $O_2A = 4$, $O_1O_2 = 5$, то $\triangle O_1O_2A$ является прямоугольным по теореме, обратной теореме Пифагора (см. рис. 80).

$$S_{O_1O_2A} = \frac{1}{2} \cdot O_1O_2 \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{2 \cdot S_{O_1O_2A}}{O_1O_2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot O_1A \cdot O_2A}{O_1O_2} = \frac{12}{5}.$$

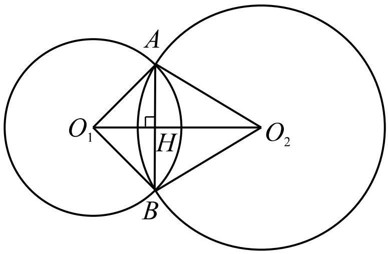


Рис. 80.

$AB = 2 \cdot AH = \dfrac{24}{5}.$

Ответ: 4,8.

846. Пусть ℓ_{BC} — длина дуги BC (см. рис. 81); $\angle BAC = \alpha$. Тогда

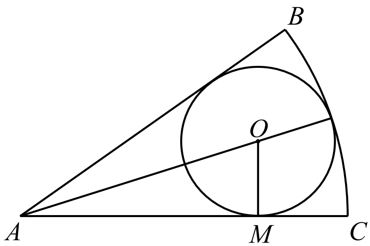


Рис. 81.

$\ell_{BC} = \alpha \cdot AC =$
$= \alpha \cdot 9 = 9\alpha.$
$P_{\text{сект.}} = AB + \ell_{BC} + AC = 2 \cdot 9 + 9\alpha = 18 + 9\alpha.$

По условию $P_{\text{сект.}} = 18 + 3\pi$, значит $9\alpha = 3\pi$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. $\angle CAO =$ $= \angle BAO = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{6}$. Пусть r — радиус окружности, вписанной в сектор. Из $\triangle AOM$: $\sin\angle OAM = \dfrac{OM}{AO}$; $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{r}{9-r}$; $\dfrac{r}{9-r} = \dfrac{1}{2}$; $r = 3$.

Ответ: 3.

847. Длина окружности радиусом 3 дм равна 6π дм, тогда скорость, с которой ползёт муха, равна $\dfrac{6\pi}{10}$ дм/мин. Диаметр окружности равен 6 дм, тогда искомое время равно $6 : \dfrac{6\pi}{10} = \dfrac{10}{\pi}$ (мин.). Округлив до целых, получим 3.

Ответ: 3.

848. Площадь прямоугольника 2 м $\times$ 3 м равна 6 м^2, значит, для окрашивания 1 м^2 необходимо 100 г краски. Площадь круга радиусом 5 м равна 25π м^2, значит, для его окрашивания нужно 2500π г $= 2{,}5\pi$ кг краски. Округлив до целых, получим 8.

Ответ: 8.

849. Рассмотрим рисунок 82, где AB — данный отрезок.

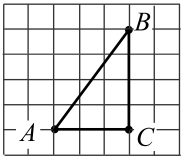


Рис. 82.

$\triangle ABC$ — прямоугольный, поэтому по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 +$ $+ BC^2$, $AB^2 = 3^2 + 4^2$, $AB^2 = 25$, $AB = 5$.

Ответ: 5.

850. $\triangle ABC$ — прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, $AB^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, $AB = 10$.

Ответ: 10.

851. По рисунку можно найти координаты точек: $A(1;1)$, $B(3;5)$, $C(3;2)$. Тогда $\overrightarrow{AB}(3-1;5-1)$, $\overrightarrow{AB}(2;4)$; $\overrightarrow{AC}(3-1;2-1)$, $\overrightarrow{AC}(2;1)$. Тогда $|\overrightarrow{AB}| =$ $= \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$. Таким образом, $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}| =$ $= \sqrt{20}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{100} = 10$.

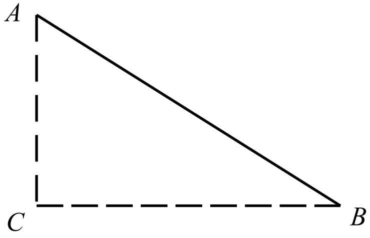


Рис. 83.

Ответ: 10.

852. Так как точка M — середина отрезка BC, то её координаты:
$x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2}$; $y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{4+2}{2} = 3$.

Координаты точки A: $x_A = 0$; $y_A = -3$. Тогда

$$AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{\left(0 - \frac{5}{2}\right)^2 + (-3-3)^2} = 6,5.$$

Ответ: $6,5$.

853. Фигурой, ограниченной линиями $3y + x = -5$, $2y - x = 5$ и $x = 1$ является треугольник ABC (см. рис. 84). Найдём координаты вершин этого

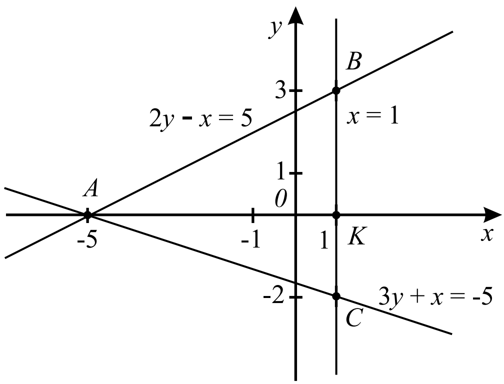


Рис. 84.

треугольника, решая соответствующие системы уравнений.

1) $\begin{cases} 3y + x = -5, \\ 2y - x = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5, \\ y = 0; \end{cases}$ $A(-5; 0)$.

2) $\begin{cases} x = 1, \\ 3y + x = -5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -2; \end{cases}$ $C(1; -2)$.

3) $\begin{cases} x = 1, \\ 2y - x = 5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 3; \end{cases}$ $B(1; 3)$.

Так как вершина $A(5; 0)$ лежит на оси Ox и сторона $BC \perp Ox$, то $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AK \cdot BC$.

$BC = 5$; $OK = 6$. Следовательно, $S_{\triangle ABC} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

Ответ: 15.

854. Фигурой, ограниченной линиями $3y + 8x = -6$, $y - x = -2$ и $y = 6$, является треугольник ABC (см. рис. 85).

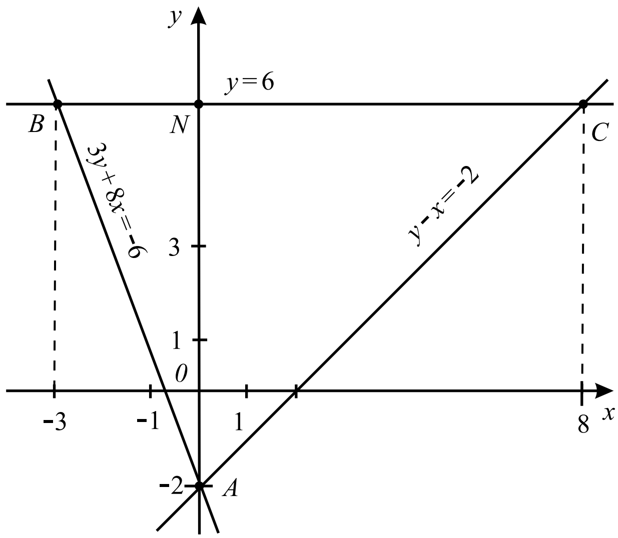


Рис. 85.

Найдём координаты вершин этого треугольника, решая соответствующие системы уравнений.

1) $\begin{cases} 3y + 8x = -6, \\ y - x = -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = -2; \end{cases}$ $A(0; -2)$.

2) $\begin{cases} 3y + 8x = -6, \\ y = 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = 6; \end{cases}$ $B(-3; 6)$.

3) $\begin{cases} y - x = -2, \\ y = 6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 6; \end{cases}$ $C(8; 6)$.

Так как вершина $A(0; -2)$ лежит на оси Oy и сторона $BC \perp Oy$, то $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}NA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 11 = 44$.

Ответ: 44.

855. По рисунку определим периметр участка на плане. Он равен 14 см, тогда на местности периметр участка равен 140000 см. Найдём скорость движения: $\frac{140000}{28} = 5000\frac{\text{см}}{\text{мин}}$. Длина диагонали участка на плане 5 см, на местности — 50000 см. Найдём время движения по диагонали:
$50000 : 5000 = 10\,(\text{мин.})$

Ответ: 10.

856. Число колец найдём по формуле

$$n = \frac{2\pi r}{\smile A_1A_2},\ n = \frac{2\pi \cdot 32}{\pi \cdot 4} = 16.$$

Ответ: 16.

857. Найдём длины сторон треугольника ABC, $AB^2 = (-1-2)^2 +$
$+ (3-(-1))^2 = 25$, $AB = 5$;
$AC^2 = (-1-2)^2 + (3-2)^2 = 10$, $AC = \sqrt{10}$;
$BC^2 = (2-2)^2 + (-1-2)^2 = 9$, $BC = 3$.

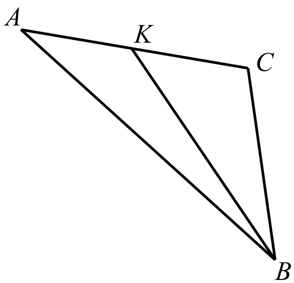


Рис. 86.

Так как BK — биссектриса, то $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{3}$, тогда $AK = \frac{5}{8}AC$.

$16AK^2 = 16 \cdot \frac{25}{64} \cdot 10 = \frac{25 \cdot 10}{4} = \frac{125}{2} = 62{,}5$.

Ответ: 62,5.

858. Найдём длины сторон треугольника ABC. $AB^2 = (12-6)^2 +$

$+(-1-7)^2 = 100$, $AB = 10$;
$AC^2 = (12-12)^2 + (-1-5)^2 = 36$, $AC = 6$;
$BC^2 = (6-12)^2 + (7-5)^2 = 40$, $BC = 2\sqrt{10}$.

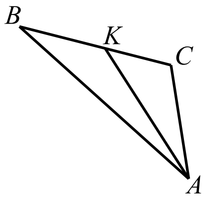


Рис. 87.

Так как AK — биссектриса, то $\dfrac{BK}{CK} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5}{3}$, тогда $CK = \dfrac{3}{8}BC$.

$CK^2 = \dfrac{9}{64} \cdot 40 = \dfrac{9 \cdot 5}{8} = \dfrac{45}{8} = 5{,}625$.

Ответ: 5,625.

859. Высота трапеции составляет 4 клетки, верхнее основание — 4 клетки, нижнее основание — 8 клеток. Так как длина стороны одной клетки равна 1 см, то площадь трапеции равна $4 \cdot (4+8) \cdot \dfrac{1}{2} = 24$ (см^2).

Ответ: 24.

860. Высота трапеции составляет 4 клетки, меньшее основание — 1 клетка, большее основание — 7 клеток. Так как длина стороны одной клетки равна 1 см, то площадь трапеции равна $4 \cdot (1+7) \cdot \dfrac{1}{2} = 16$ (см^2).

Ответ: 16.

861. Так как сторона треугольника равна 20 см $= 0{,}2$ м, то на каждые два ряда паркета, составленного из данных элементов (см. рис. 88), потребуется $2 \cdot 6 : 0{,}2 = 60$ элементов. (При этом во втором ряду один треугольник разрезан пополам.)

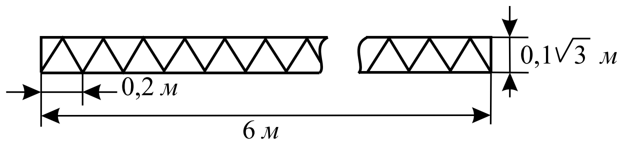


Рис. 88.

Так как треугольники равносторонние, то высота одного треугольного элемента равна $0{,}2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}1\sqrt{3}$ (м). Эта высота соответствует высоте каждых двух рядов уложенного паркета (см. рис. 88). Всего при длине $5\sqrt{3}$ м получится $5\sqrt{3} : 0{,}1\sqrt{3} = 50$ таких рядов. Итак, необходимо 50 рядов по 60 элементов паркета в каждом: $50 \cdot 60 = 3000$ элементов паркета.

Ответ: 3000.

862. Введём декартову систему координат, тогда вершины данного треугольника имеют координаты $A(0;0)$, $B(3;6)$ и $C(7;2)$ (см. рис. 89).

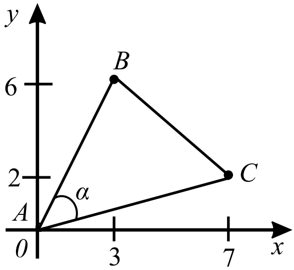


Рис. 89.

$AB^2 = (3-0)^2 + (6-0)^2 = 45$, $AB = 3\sqrt{5}$;
$BC^2 = (7-3)^2 + (2-6)^2 = 32$, $BC = 4\sqrt{2}$;
$AC^2 = (7-0)^2 + (2-0)^2 = 53$, $AC = \sqrt{53}$.

По теореме косинусов $\cos\alpha = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{33}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}}$.

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{1089}{2385}} = \sqrt{\dfrac{1296}{2385}} = \dfrac{36}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}}$, тогда

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{53} \cdot \dfrac{36}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{53}} = 18.$

Ответ: 18.

863. Разделим четырёхугольник на части, как показано на рисунке.
$S_{ABCD} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle BNC} + S_{MNCD}$; $S_{MNCD} = MD \cdot CD = 4 \cdot 2 = 8$;
$S_{\triangle ABM} = \dfrac{1}{2}BM \cdot AM = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$; $S_{\triangle BNC} = \dfrac{1}{2}BN \cdot NC = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$;
$S_{ABCD} = 8 + 9 + 8 = 25.$

Ответ: 25.

864. Длина «нижней» стороны треугольника равна 9 см, а длина прове-

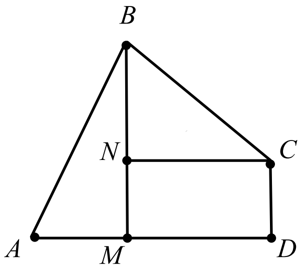


Рис. 90.

дённой к ней высоты равна 5 см. Искомая площадь равна $\frac{9 \cdot 5}{2} = 22{,}5$ (см^2).

Ответ: 22,5.

865. По условию боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом (см. рис. 91), то высота пирамиды проходит через

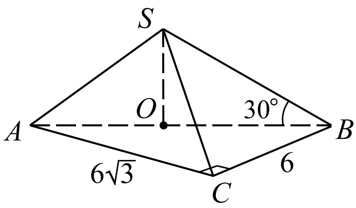


Рис. 91.

центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. А как как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то центр O описанной окружности лежит в точке O — середине гипотенузы. Следовательно, $\angle SBA = 30°$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3},\ AB = \sqrt{36 + 3 \cdot 36} = 12,\ OB = \frac{1}{2}AB = 6.$$

$$SO = OB \cdot \operatorname{tg} 30° = \frac{6}{\sqrt{3}}.\ V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3}18\sqrt{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = 36.$$

Ответ: 36.

866. Используя данные, сделаем рисунок (см. рис. 92).

1) $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot SO$; $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \sin\angle 60° =$

$= \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

2) Пусть R — радиус описанной окружности около $\triangle ABC$. Тогда, по

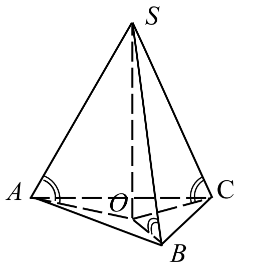


Рис. 92.

теореме синусов $\dfrac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R$.

3) Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов имеем
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ$;
$AC^2 = 36 + 9 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} = 27$; $AC^2 = 27$; $AC = 3\sqrt{3}$. Тогда имеем:
$\dfrac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$; $\dfrac{3\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2R$; $R = 3$. Так как боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. Следовательно, $OC = R = 3$.

4) Из $\triangle SOC$ имеем: $SO = \sqrt{SC^2 - CO^2}$; $SO = \sqrt{21 - 9} = 2\sqrt{3}$.

5) $V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 9$.

Ответ: 9.

867. Используя данные задачи, сделаем рисунок (см. рис. 93).

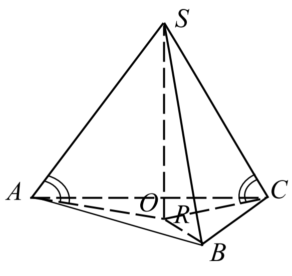


Рис. 93.

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO.$

1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}.$

2) $\angle BAC = \angle BCA = 30^\circ.$

3) Пусть R — радиус описанной около окружности $\triangle ABC$. Тогда, по теореме синусов $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2R$; $\frac{6}{\frac{1}{2}} = 2R$; $R = 6$. Так как боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около $\triangle ABC$.

4) Из $\triangle SOC$ имеем: $SO = \sqrt{SC^2 - CO^2}$;
$SO = \sqrt{16 \cdot 3 - 36} = 2\sqrt{3}$; $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18.$

Ответ: 18.

868. $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot SO$ (см. рис. 94).

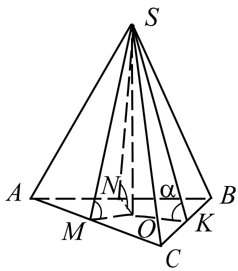


Рис. 94.

1) $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$

2) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot r_{\text{вп.}}$, где $P_{\triangle ABC}$ — периметр $\triangle ABC$, $r_{\text{вп.}}$ — радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

3) Из $\triangle ABC$ имеем: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$;
$r_{\text{вп.}} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{2 \cdot 24}{6 + 8 + 10} = 2.$

4) Так как двугранные углы при основании пирамиды равны между со-

бой, то высота пирамиды проходит через центр вписанной окружности. Следовательно, $OK = r_{\text{вп.}} = 2$. Тогда из $\triangle SOK$ имеем: $SO = OK \cdot \operatorname{tg}\alpha$; $SO = 2 \cdot 3 = 6$.

5) $V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6 = 48$.

Ответ: 48.

869. Сечением пирамиды плоскостью, указанной в условии задачи (см. рис. 95), является $\triangle MEN$. $S_{\triangle MEN} = \dfrac{1}{2} MN \cdot EK$, где EK — высота

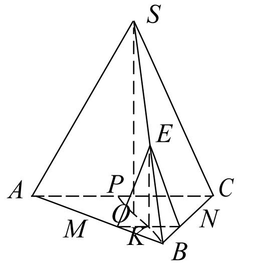


Рис. 95.

$\triangle MEN$. Из условия следует, что MN — средняя линия $\triangle ABC$. Поэтому $MN = \dfrac{1}{2} AC =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Пусть P — точка пересечения высоты, опущенной из вершины B к стороне AC с прямой AC. Из $\triangle BCP$ имеем: $BP = BC \cdot \sin 60°$; $BP = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Так как $SABC$ — правильная пирамида, то точка O является центром вписанной окружности, $O \in BP$, $\dfrac{BO}{OP} = \dfrac{1}{2}$. Следовательно $BO = \dfrac{2}{3} BP = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $BK = \dfrac{1}{2} BP$; $BK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\triangle OSB \sim \triangle BKE$ (по двум углам: $\angle EKB = \angle SOB = 90°$; $\angle EBK = \angle SBO$), тогда имеем: $\dfrac{SO}{EK} = \dfrac{BO}{BK}$; $EK = \dfrac{SO \cdot BK}{BO} = \dfrac{24 \cdot \sqrt{3} \cdot 3}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = 18$; $S_{\triangle MEN} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 18 = 9$.

Ответ: 9.

870. $S_{\text{бок.}} = \dfrac{S_{\text{осн.}}}{\cos 60°}$; $S_{\text{осн.}} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC$ (см. рис. 96); $S_{\text{осн.}} = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$;

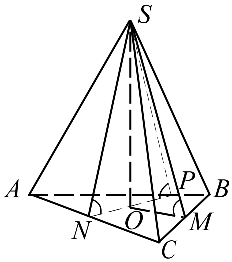


Рис. 96.

$S_{\text{бок.}} = \dfrac{24}{\frac{1}{2}} = 48.$

Ответ: 48.

871. Проведем прямые $CM \perp AS$; $BM \perp AS$ (см. рис. 97), тогда $\angle BMC = 120°$. Из того, что пирамида $SCAB$ — правильная, следу-

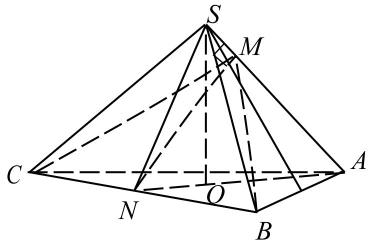


Рис. 97.

ет, что $\triangle BMC$ — равнобедренный; $\angle CBM = \angle BCM = 30°$. Пусть N — середина отрезка CB. Обозначим $BN = x$. Из $\triangle MNB$ имеем $MN = BN \cdot \operatorname{tg} 30°$; $MN = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Из $\triangle ABN$ имеем $AN = AB \cdot \sin 60° = \dfrac{2x \cdot \sqrt{3}}{2}$; $S_{\triangle ANS} = \dfrac{1}{2} AS \cdot MN$. Пусть SO — высота пирамиды.

Так как $SABC$ — правильная, то SO — высота $\triangle NSA$, тогда $S_{ANS} = \dfrac{1}{2} AN \cdot SO$; $AS \cdot MN = AN \cdot SO = \dfrac{AN \cdot SO}{MN} = \dfrac{x\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6}}{\frac{x\sqrt{3}}{3}} = 9\sqrt{6}.$

Из $\triangle ASO$ имеем: $AO = \sqrt{AS^2 - SO^2} =$
$= \sqrt{81 \cdot 6 - 9 \cdot 6} = 12\sqrt{3}$. Так как O является точкой пересечения медиан $\triangle CAB$, то $NA = \dfrac{3}{2}AO = \dfrac{3}{2} \cdot 12\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

Тогда $AB = \dfrac{AN}{\sin 60^\circ} = \dfrac{18\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 36$.

Ответ: 36.

872. Пусть L — середина отрезка SB (см. рис. 98). Проведем $LK \parallel AS$,

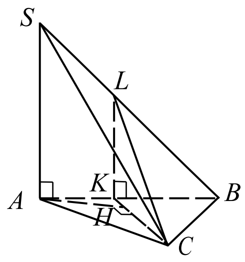


Рис. 98.

тогда угол между AS и LC равен $\angle KLC = 60^\circ$.

1) Так как KL — средняя линия $\triangle SAB$, то CK — является медианой и высотой правильного $\triangle ABC$. Значит, $AK \perp KC$ и $AK \perp KL$ (по построению). Следовательно, $AK \perp KLC$, отсюда $AK \perp LC$. Значит AK — расстояние между прямыми AS и CL. Тогда согласно условию $AK = \sqrt{3}$. Так как CK — медиана $\triangle ABC$, то $AB = 2AK = 2\sqrt{3}$. Так как CK — высота $\triangle ABC$, то $CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{12 - 3} = 3$. Получаем $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}CK \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

2) Из прямоугольного $\triangle KLC$ находим $KL = CK \cdot \operatorname{tg} KLC = 3 \operatorname{tg} 60^\circ =$
$= 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

Так как KL — средняя линия $\triangle ASB$, то $AS = 2\sqrt{3}$. $V_{\text{пир.}} =$
$= \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot AS = \dfrac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6$.

Ответ: 6.

874. Рассмотрим плоскость SAB (см. рис. 99). Она содержит прямую SB и прямую $AB||CD$. Поэтому пл. $SAB||CD$, а значит, расстояние между скрещивающимися прямыми CD и SB равно расстоянию между прямой

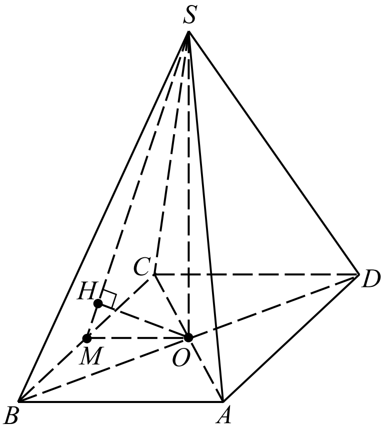


Рис. 99.

CD и плоскостью SAB, и равно расстоянию от любой точки прямой CD до плоскости SAB. Найдём расстояние от точки N — середины ребра CD — до плоскости SAB. Пусть M — середина ребра AB и пусть NH — высота $\triangle SMN$, тогда искомое расстояние равно длине высоты NH. Найдём её. $OB = \dfrac{1}{2}DB = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot AB = 4\sqrt{2}$. Так как SO — высота пирамиды, то в прямоугольном треугольнике SOB:
$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{9+32} = \sqrt{41}$. В прямоугольном треугольнике SMB: $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{41-16} = 5$. Рассмотрим треугольник SMN. С одной стороны $S_{\triangle SMN} = \dfrac{1}{2} \cdot SO \cdot MN = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 = 12$, с другой стороны $S_{\triangle SMN} = \dfrac{1}{2} \cdot SM \cdot NH = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot NH = \dfrac{5}{2} \cdot NH$. Следовательно, справедливо равенство $12 = \dfrac{5}{2} \cdot NH$, откуда $NH = \dfrac{24}{5} = 4{,}8$.

Ответ: 4,8.

875. Проведем $PN \parallel BD$ (см. рис. 100), тогда $(PSN) \parallel BD$; $OK \perp (PSN)$; OK — искомое расстояние. $AO = \dfrac{1}{2}AC$; $AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$; $AO = \sqrt{2}$, $MO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, так как PN — средняя линия $\triangle ABD$. Из $\triangle SMO$ имеем:

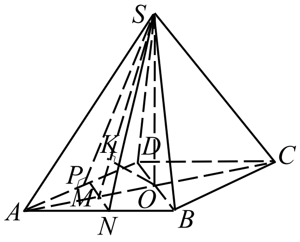


Рис. 100.

$SM = \sqrt{S0^2 + MO^2}$; $SM = \sqrt{\dfrac{49 \cdot 2}{4} + \dfrac{2}{4}} = 5$;

Так как $S_{\triangle SMO} = \dfrac{1}{2} SM \cdot KO$ и $S_{\triangle SMO} = \dfrac{1}{2} MO \cdot SO$, то $SM \cdot KO =$

$= MO \cdot SO = \dfrac{MO \cdot SO}{SM}$; $KO = \dfrac{\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2 \cdot 2 \cdot 5} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$.

Ответ: 0,7.

876. Так как $\angle SMO = \angle SNO = \angle SPO$ (см. рис. 101), то O — центр вписанной окружности. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC$; $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} P_{\triangle ABC} \cdot r_{\text{вп.}}$,

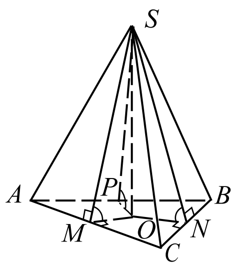


Рис. 101.

где $r_{\text{вп.}}$ — радиус вписанной окружности. $AC \cdot BC = P_{\triangle ABC} \cdot r_{\text{вп.}}$; $r_{\text{вп.}} = \dfrac{AC \cdot BC}{P_{\triangle ABC}}$. Из $\triangle ABC$ имеем: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$; $AB =$

$= \sqrt{144 + 25} = 13$; $r_{\text{вп.}} = \dfrac{12 \cdot 5}{30} = 2$; $MO = 2$. Из $\triangle SMO$ имеем:

$SO = MO \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$; $SO = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $2\sqrt{3}h = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 4$.

Ответ: 4.

877. Так как $AS = BS = CS$ (см. рис. 102), то $AO = BO = CO = R$, (R

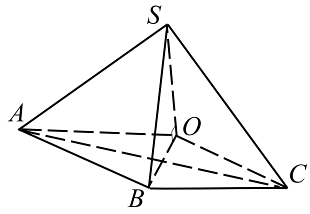


Рис. 102.

— радиус описанной окружности около $\triangle ABC$). Из $\triangle SBO$ имеем: $BO = \sqrt{BS^2 - SO^2} = \sqrt{35^2 - 15^2 \cdot 5} = 10$. По теореме синусов имеем: $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB} = 2R$;

$AB = 2R \cdot \sin 30^\circ$; $AB = 2 \cdot 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 10$.

Ответ: 10.

878. Так как пирамида $SABCD$ правильная (см. рис. 103), а O — центр

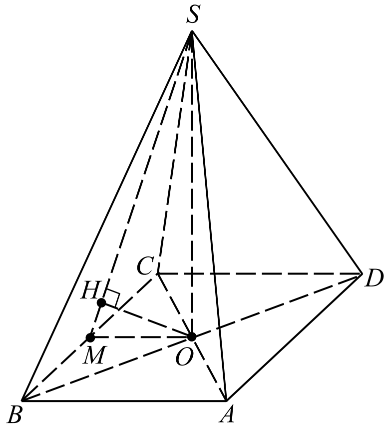


Рис. 103.

ее основания, то SO — высота этой пирамиды. Пусть M — середина ребра BC, тогда $OM \perp BC$. Проведем высоту OH в треугольнике SOM. Так как $OM \perp BC$ и $SO \perp BC$, то $BC \perp$ пл. $SOM \Rightarrow BC \perp OH$. Так как $OH \perp BC$ и $OH \perp SM$, то $OH \perp$ пл. SBC. Следовательно, длина высоты OH равна расстоянию от точки O до грани SBC, то есть $OH = \sqrt{5}$. Так как $ABCD$ — квадрат со стороной, равной 10, O — его центр, а M — середина его стороны, то $OM = 5$. Из $\triangle OHM$: $HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} = \sqrt{25-5} = 2\sqrt{5}$; $\cos\angle HMO = \dfrac{HM}{OM} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Из $\triangle SOM$: $SM = \dfrac{OM}{\cos\angle OMS} = 5 \cdot \dfrac{5}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$. Из прямоугольного $\triangle SMB$: $SB = \sqrt{BM^2 + SM^2} = \sqrt{25 + \dfrac{125}{4}} = \sqrt{\dfrac{225}{4}} = \dfrac{15}{2}$.

Ответ: 7,5.

879. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку H

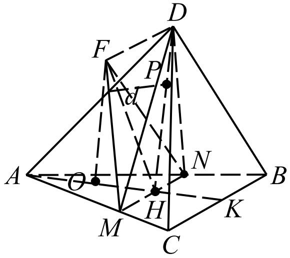


Рис. 104.

параллельно плоскости DBC (см. рис. 104). Для этого через точку H проведем $MN \parallel BC$. Через точку M проведем $MF \parallel CD$. Сечение MFN — искомое. Пусть d — расстояние от точки D до плоскости MFN.

1) В $\triangle ABC$ проведем высоту AK; $AK = AC \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 9$. Так как пирамида $DABC$ — правильная, то H является в $\triangle ABC$ точкой пересечения медиан. Следовательно, $AH = \dfrac{2}{3}AK = \dfrac{2}{3}\cdot 9 = 6$.

2) $\triangle CAB \sim \triangle MAN$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{2}{3}$. Тогда $MC = \dfrac{1}{3}AC$, $MN = \dfrac{2}{3}BC = \dfrac{2}{3}\cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$; $\triangle CAD \sim \triangle MAF$ с коэффициен-

том подобия $k = \frac{2}{3}$. Следовательно, $FD = \frac{1}{3}AD$. Проведем $FO \parallel DH$, $O \in ABC$. Тогда $\triangle HAD \sim \triangle OAF$ с коэффициентом подобия $k = \frac{2}{3}$, следовательно, $OH = \frac{1}{3}AH = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$, $OF = \frac{2}{3}DH = \frac{8}{3}$.

3) Так как $DH \perp$ пл.ABC, то $OF \perp$ пл.ABC, следовательно $OF \perp AH$. Из $\triangle FOH$: $FH = \sqrt{FO^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{10}{3}$.

4) Проведем $FP \parallel AH$, $AH \perp (MDN)$, значит $FP \perp (MDN)$, следовательно, FP-высота пирамиды $FMND$.

5) Рассмотрим пирамиду $DFMN$: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle FMN} \cdot d$, с другой стороны $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle MDN} \cdot FP$, $FP = OH = 2$,

$d = \dfrac{S_{\triangle MDN} \cdot FP}{S_{\triangle FMN}} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3}{4\sqrt{3} \cdot 10} = 2{,}4.$

Ответ: 2,4.

880. Пусть $AB = x$, $x > 0$. Так как в основании пирамиды лежит квадрат, то $AC = x\sqrt{2}$, $HC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Из $\triangle SHC$ получаем:

$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{100 + \frac{x^2}{2}}$ (см. рис. 105).

$NL = MK = \frac{1}{2}\sqrt{100 + \frac{x^2}{2}}$ (так как $NL \parallel SC$ и $LC = \frac{1}{2}BC$). $KL = AB = x$,

$MN = \frac{1}{2}KL = \frac{1}{2}x$.

Сечение $MNLK$ представляет собой равнобедренную трапецию (см. рис. 106). Следовательно, $KT = \dfrac{KL - MN}{2} = \dfrac{x}{4}$. Из $\triangle KMT$:

$MT = \sqrt{KM^2 - KT^2} = \sqrt{\dfrac{200 + x^2}{8} - \dfrac{x^2}{16}} = \dfrac{\sqrt{400 + x^2}}{4}$.

$S_{KMNL} = \frac{1}{2}(MN + KL) \cdot MT = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}x \cdot \dfrac{\sqrt{400 + x^2}}{4}$.

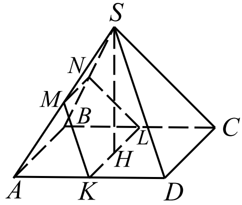


Рис. 105.

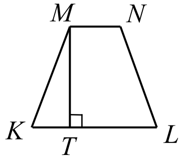


Рис. 106.

По условию $S_{KMNL} = 6\sqrt{29}$, значит $\dfrac{3x\sqrt{400+x^2}}{16} = 6\sqrt{29}$;
$x\sqrt{400+x^2} = 2^5\sqrt{29}$; $400x^2 + x^4 = 2^{10}\cdot 29$; $x^4 + 2^4\cdot 5^2x^2 - 2^{10}\cdot 29 = 0$. Пусть $x^2 = t$, $t > 0$, тогда $t^2 + 2^4\cdot 5^2t - 2^{10}\cdot 29 = 0$, Учитывая, что $t > 0$, получаем $t = \dfrac{-400 + 2^4\cdot 3\cdot 11}{2} = 64$. Тогда $x^2 = 64$, $x = 8$, значит, сторона основания равна 8.

Ответ: 8.

881. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду $OABC$ с треугольником $\triangle ABC$ в основании, удовлетворяющую условию (см. рис. 107). Так как пирамида правильная, то $\triangle ABC$ — равносторонний. Обозначим через a длину стороны $\triangle ABC$, тогда $AB = AC = BC = a$, $a > 0$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle ABC = \dfrac{1}{2}a^2\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Пусть M — середина ребра AC, тогда BM — высота $\triangle ABC \Rightarrow$
$BM = AC\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. Обозначим через H — центр $\triangle ABC$, тогда

$BH = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{\sqrt{3}a}{3}$,$DH$ — высота пирамиды, $\angle DBH$ — угол между ребром DB и плоскостью основания $\Rightarrow$ $\angle DBH = \varphi$. Из $\triangle DHB$: $\dfrac{DH}{BH} = \mathrm{tg}\varphi$; $DH = \mathrm{tg}\varphi\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. Так как $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, то $\mathrm{tg}\varphi = 2\sqrt{2}$.

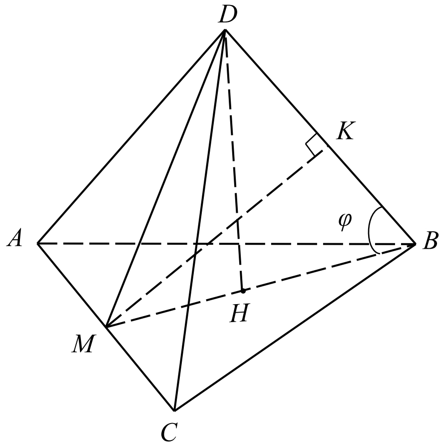


Рис. 107.

Тогда объем данной пирамиды
$V = \frac{1}{3}DH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3}{12}\mathrm{tg}\varphi = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = 16\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{6}.$

Обозначим через K основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ребро $DB \Rightarrow \triangle MKB$ — прямоугольный $\Rightarrow \dfrac{MK}{BM} = \sin\varphi \Rightarrow$
$MK = BM\sin\varphi = \sin\varphi\dfrac{\sqrt{3}a}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{6} = 4.$

Таким образом, расстояние между боковым ребром и серединой противоположной стороны равно 4.

Ответ: 4.

882. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду $ABCD$ с треугольником $\triangle ABC$ в основании, удовлетворяющую условию (см. рис. 108). Так как пирамида правильная, то $\triangle ABC$ — равносторонний. Обозначим через a длину стороны $\triangle ABC$, тогда $AB = AC = BC = a, (a > 0)$.
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC\sin\angle ABC = \frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$
Пусть M — середина ребра AC, тогда BM — высота $\triangle ABC \Rightarrow$
$BM = AC\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$. Обозначим через H — центр $\triangle ABC$, тогда DH — высота пирамиды, $MH = \dfrac{1}{3}BM = \dfrac{\sqrt{3}a}{6}$. Поскольку DM — апо-

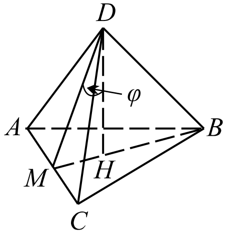


Рис. 108.

фема пирамиды, то $\angle HDM = \varphi$. В прямоугольном треугольнике $\triangle HDM$ выполняются следующие соотношения:

$DH = \mathrm{ctg}\varphi \cdot MH = \mathrm{ctg}\varphi \frac{\sqrt{3}a}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{6}\,\mathrm{ctg}\,\varphi$. Вычислим $\mathrm{ctg}\varphi$. Имеем,

$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{5}{6}}$, $\mathrm{ctg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Таким образом, объем пирамиды

$V = \frac{1}{3}DH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3}{24}\mathrm{ctg}\varphi = \frac{a^3}{24\sqrt{5}}$, используя условия $v = 40\sqrt{3}$,

$\frac{a^3}{24\sqrt{5}} = 40\sqrt{3}$, $a^3 = 960\sqrt{15}$, $a = 4\sqrt{15}$.

Следовательно, высота пирамиды $DH = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 4\sqrt{15} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 2$.

Ответ: 2.

883. Рассмотрим треугольную пирамиду $ABCD$, удовлетворяющую условию (см. рис. 109). Обозначим через A_1, B_1 и C_1 точки пересечения се-

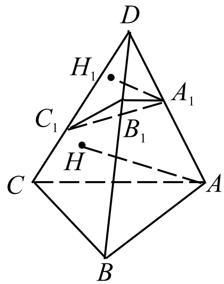


Рис. 109.

кущей плоскости с ребрами AD, BD и CD, соответственно. Пусть для определенности $\dfrac{A_1D}{A_1A} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{B_1D}{B_1B} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{C_1D}{C_1C} = \dfrac{2}{3}$. Обозначим через H и H_1 основания перпендикуляров, опущенных из точек A и A_1 на плоскость BCD. Ясно, что треугольники $\triangle ADH$ и $\triangle A_1DH_1$ подобны. Следовательно, $\dfrac{AH}{A_1H_1} = \dfrac{AD}{A_1D} = \dfrac{3+1}{1} = 4$.

Треугольники $\triangle BDC$ и $\triangle B_1DC_1$ имеют общий угол $\angle D$, следовательно, их площади относятся как произведения, прилежащих к углу сторон: $\dfrac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle B_1DC_1}} = \dfrac{BD \cdot CD}{B_1D \cdot C_1D} = \dfrac{(1+4)(2+3)}{1 \cdot 2} = \dfrac{25}{2}$.

Имеем, $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}AH \cdot S_{\triangle BCD}$ и $V_{A_1B_1C_1D} = \dfrac{1}{3}A_1H_1 \cdot S_{\triangle B_1C_1D}$.

Отсюда получаем, $\dfrac{V_{ABCD}}{V_{A_1B_1C_1D}} = 4 \cdot \dfrac{25}{2} = 50$.

Таким образом, искомое отношение $\dfrac{V_{ABCD} - V_{A_1B_1C_1D}}{V_{A_1B_1C_1D}} =$

$= \dfrac{V_{ABCD}}{V_{A_1B_1C_1D_1}} - 1 = 49$.

Ответ: 49.

884. 1) Обозначим через L середину ребра BC (см. рис. 110). Тогда плоскость ASL перпендикулярна прямой BC, так как AL и SL — высоты.

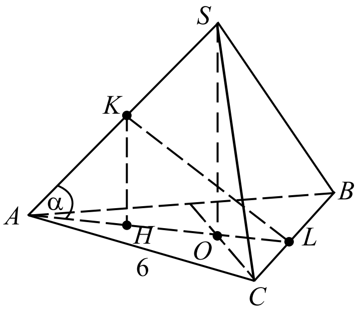


Рис. 110.

Следовательно, прямая KL перпендикулярна прямой BC. Таким образом, расстояние от точки K до ребра BC равно KL.

2) Так как треугольник ABC равносторонний, то $AL = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = 3\sqrt{3}$.

Пусть O — центр треугольника ABC, H — основание перпендикуляра, опущенного из K на плоскость ABC. Тогда по свойству точки пересечения медиан $AO = \dfrac{2}{3} \cdot AL = 2\sqrt{3}$. Поскольку точка H делит AO на две равные части, то $AH = \sqrt{3}$. Тогда, $HL = AL - AH = 2\sqrt{3}$.

3) Рассмотрим треугольник KAH. Имеем, $KH = AH \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Так как $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = 2\sqrt{2}$. Следовательно, $KH = 2\sqrt{6}$.

4) Рассмотрим прямоугольный треугольник KHL. По теореме Пифагора получаем $KL = \sqrt{KH^2 + HL^2} = 6$.

Ответ: 6.

885. 1) Обозначим через L середину ребра AC (см. рис. 111). Тогда плоскость BSL перпендикулярна прямой AC, так как BL и SL — высоты. Следовательно, прямая KL перпендикулярна прямой AC. Таким образом, расстояние от точки K до ребра AC равно KL.

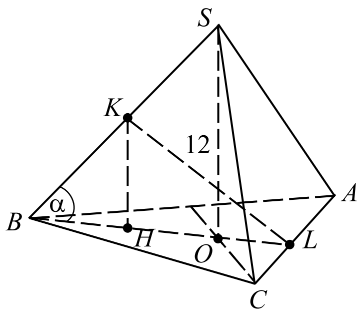


Рис. 111.

2) Обозначим через x, $x > 0$ сторону основания ABC. Так как треугольник ABC равносторонний, то $BL = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC = \dfrac{\sqrt{3}x}{2}$. Пусть O — центр треугольника ABC, H — основание перпендикуляра, опущенного из K на плоскость ABC. Тогда по свойству точки пересечения медиан $BO = \dfrac{2}{3} \cdot BL = \dfrac{\sqrt{3}x}{3}$. Поскольку точка H делит BO на две равные части, то $BH = \dfrac{\sqrt{3}x}{6}$. Тогда $HL = BL - BH = \dfrac{\sqrt{3}x}{3}$.

3) Рассмотрим треугольник KBH. Имеем, $KH = BH \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Так как $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = 2\sqrt{2}$. Следовательно, $KH = \dfrac{\sqrt{6}x}{3}$.

4) Рассмотрим прямоугольный треугольник KHL. По теореме Пифагора получаем $KL = \sqrt{KH^2 + HL^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}x}{3}\right)^2} = x = 12$.

Ответ: 12.

886. 1) Обозначим через L середину ребра BC (см. рис. 112). Тогда плоскость ASL перпендикулярна прямой BC, так как AL и SL — высоты. Следовательно, прямая KL перпендикулярна прямой BC. Таким образом, высота треугольника KBC равна KL.

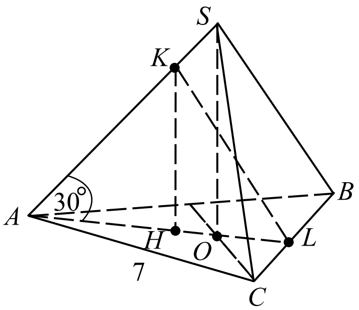


Рис. 112.

2) Так как треугольник ABC равносторонний, то $AL = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$. Пусть O — центр треугольника ABC, H — основание перпендикуляра, опущенного из K на плоскость ABC. Тогда по свойству точки пересечения медиан $AO = \dfrac{2}{3} \cdot AL = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$. Поскольку точка H делит AO в отношении $1 : 3$, считая от центра O, то $AH = \dfrac{3}{4} \cdot AO = \dfrac{7\sqrt{3}}{4}$. Тогда $HL = AL - AH = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.

3) Рассмотрим треугольник KAH. Имеем, $KH = AH \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{7}{4}$.

4) Рассмотрим прямоугольный треугольник KHL. По теореме Пифа-

гора получаем $KL = \sqrt{KH^2 + HL^2} = \dfrac{7}{2}$. Тогда $S_{KBC} = \dfrac{1}{2} \cdot KL \cdot BC =$

$= \dfrac{49}{4} = 12{,}25.$

Ответ: 12,25.

887. 1) Обозначим через L середину ребра BC (см. рис. 113). Тогда плоскость ASL перпендикулярна прямой BC, так как AL и SL — высоты. Следовательно, прямая KL перпендикулярна прямой BC. Таким образом, высота треугольника KBC и расстояние от точки K до прямой BC равно KL.

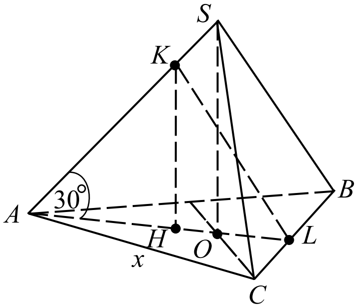


Рис. 113.

2) Пусть $AB = AC = BC = x$, $x > 0$. Так как треугольник ABC равносторонний, то $AL = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot AC = \dfrac{\sqrt{3}x}{2}$. Пусть O — центр треугольника ABC, H — основание перпендикуляра, опущенного из K на плоскость ABC. Тогда по свойству точки пересечения медиан $AO = \dfrac{2}{3} \cdot AL = \dfrac{\sqrt{3}x}{3}$. Поскольку точка H делит AO в отношении $1 : 3$, считая от центра O, то $AH = \dfrac{3}{4} \cdot AO = \dfrac{\sqrt{3}x}{4}$; $HL = AL - AH = \dfrac{\sqrt{3}x}{4}$.

3) Рассмотрим треугольник KAH. Так как пирамида правильная, то $\angle SAL = \angle SBO = 30°$. Имеем, $KH = AH \cdot \operatorname{tg} 30° = \dfrac{x}{4}$.

4) Рассмотрим прямоугольный треугольник KHL. По теореме Пифагора получаем $KL = \sqrt{KH^2 + HL^2} = \dfrac{x}{2}$. Тогда $S_{KBC} = \dfrac{x^2}{4} = 36$. Отку-

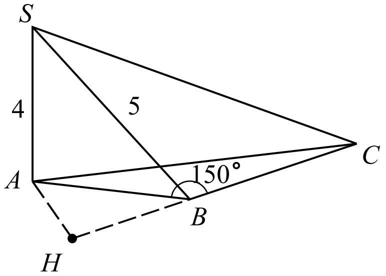


Рис. 114.

да получаем, что $x = 12$. Следовательно, $KL = 6$.

Ответ: 6.

888. Опустим перпендикуляр AH (см. рис. 114) на продолжение отрезка BC. Поскольку SA — перпендикуляр к плоскости ABC, то $AH \perp SA$. Поэтому AH — общий перпендикуляр к прямым AS и BC. То есть AH — расстояние между этими прямыми. Из прямоугольного $\triangle SAB$ находим: $AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = 3$; $AH = AB \cdot \sin ABH = AB \cdot \sin(180° - 150°) = \dfrac{AB}{2} = 1{,}5$.

Ответ: 1,5.

889. 1) Обозначим искомый угол через α. Через вершину A в плоскости ACD проведём прямую параллельно ребру CD, и пусть K — проекция вершины B на эту прямую, а L — проекция точки K на CD, (см. рис. 115). Тогда $\alpha = \angle KAB$, $\sin\alpha = \dfrac{BK}{AB}$. Очевидно, что $KL \parallel AD$, и, значит,

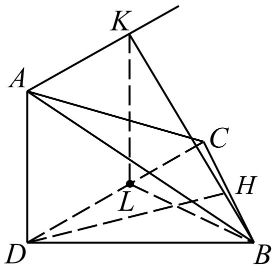


Рис. 115.

прямая KL перпендикулярна плоскости BCD, $\angle KLB = 90°$. Так как $DL \parallel AK$ и $AK \perp BK$, то $DL \perp BK$, поэтому, по теореме о трёх перпендикулярах, $DL \perp BL$.

2) Учитывая, что $KL = AD = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, из $\triangle BKL$ и $\triangle ABD$ по теореме Пифагора имеем:

$BK = \sqrt{KL^2 + BL^2} = \dfrac{\sqrt{1 + 3BL^2}}{\sqrt{3}}$, $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$.

Высоту BL $\triangle BDC$ найдём выразив площадь $\triangle BDC$ двумя способами: $2S_{BDC} = BL \cdot CD = BC \cdot DH$, где DH — высота к стороне BC. Так как $BD = CD$, то DH является и медианой $\triangle BDC$, то есть теореме Пифагора $DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = 1$. Итак, имеем:

$BL = \dfrac{BC \cdot DH}{CD} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$, $BK = \dfrac{\sqrt{1 + 3BL^2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{7}{2\sqrt{3}}$,

$\sin\alpha = \dfrac{BK}{AB} = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, градусная мера α составляет $30°$.

Ответ: 30.

890. Так как SB перпендикуляр к плоскости основания (см. рис. 116), то прямая SD при проекции переходит в BD, таким образом, угол SDB — угол между прямой SD и плоскостью основания. Из основного тригонометрического тождества $\dfrac{1}{\cos^2\angle SDB} = 1 + \operatorname{tg}^2\angle SDB = \dfrac{25}{16}$, откуда $\cos\angle SDB = \dfrac{4}{5}$. Из $\triangle SBD$ находим: $BD = SD \cdot \cos\angle SDB = 12$, $SB = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Из прямоугольных треугольников CBS и ABS находим:

$BC = \sqrt{SC^2 - SB^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12;\ AB = \sqrt{SA^2 - SB^2} =$
$= \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$. Следовательно $AB = BC$. Таким образом, параллелограмм в основании пирамиды — ромб со стороной 12. Его периметр равен 48.

Ответ: 48.

891. Угол между прямой SD (см. рис. 116) и плоскостью основания — это угол SDB, так как прямая SB перпендикулярна плоскости основания. Катет SB находим из прямоугольного $\triangle SAB$: $SB = \sqrt{AS^2 - AB^2} =$
$= \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Угол между прямыми SC и AB равен углу SCD, так как $AB \parallel CD$, поэтому в треугольнике SCD мы знаем стороны: SC и CD, и косинус угла между ними. По теореме косинусов найдем SD:
$SD^2 = SC^2 + DC^2 - 2\cdot SC\cdot DC\cdot\cos\angle SCD = 15^2 + 12^2 - 2\cdot 15\cdot 12\cdot 0{,}4 = 15^2$,
$SD = 15$. Теперь в прямоугольном треугольнике SBD находим

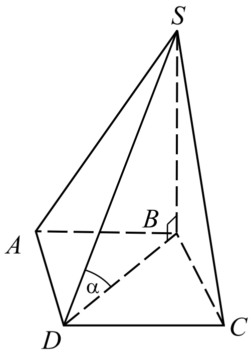


Рис. 116.

$BD = \sqrt{SD^2 - SB^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$, а значит, и тангенс угла SDB.
$\operatorname{tg} SDB = \dfrac{SB}{DB} = \dfrac{9}{12} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

892. $AB \parallel CD$ (см. рис. 116), так что угол между SC и AB равен углу SCD. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $CD = AB = 16$. Из прямоугольного треугольника ABS знаем $AS = 20$, $AB = 16$, находим $SB = \sqrt{AS^2 - AB^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$. Угол между SD и плоскостью основания — это угол SDB, так как SB перпендикулярно плоскости основания. Поэтому $\angle \operatorname{tg} SDB = 0{,}75$, а так как $SB = 12$, то $BD = \dfrac{SB}{\operatorname{tg} \angle SDB} = 16$, а $SD = \sqrt{SB^2 + DB^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$. Теперь мы знаем три стороны в треугольнике SCD и хотим найти косинус угла SCD. Для этого воспользуемся теоремой косинусов:
$SD^2 = SC^2 + DC^2 - 2 \cdot SC \cdot DC \cdot \cos \angle SCD$;
$20^2 + 16^2 - 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot \cos \angle SCD = 20^2$;
$\cos \angle SCD = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

893. Не нарушая общности можем считать, что указанное сечение проведено через вершину B основания ABC пирамиды $SABC$. Пусть K — точка пересечения заданного сечения с апофемой SP грани ASC (см. рис. 117).

Из условия следует, что $BK \perp SP$, $\operatorname{tg} \angle KBP = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Пусть SO —

высота пирамиды $SABC$, проведенная из вершины S к основанию ABC. Тогда объем пирамиды $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO$. Так как пирамида $SABC$ — правильная, то BP — высота $\triangle ABC$ и $BP = BA \cdot \sin 60^\circ = 6$. Тогда $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BP \cdot AC = 12\sqrt{3}$. Так как BP — медиана $\triangle ABC$, то

$OP = \dfrac{1}{3}BP = 2$. $\triangle BKP \backsim \triangle SOP$ (по двум углам). Значит,

$\angle OSP = \angle KBP$. Поэтому $\operatorname{tg}\angle OSP = \dfrac{OP}{SO} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Отсюда $SO = \sqrt{3}$,

и, следовательно, $V_{SABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$.

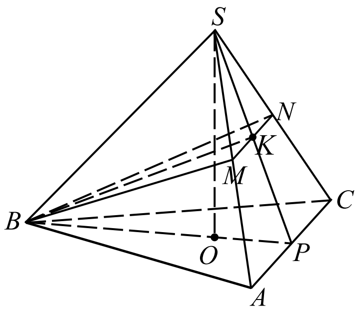


Рис. 117.

Ответ: 12.

894. Не нарушая общности можем считать, что указанное сечение проведено через вершину B основания ABC пирамиды $SABC$. Пусть K — точка пересечения заданного сечения с апофемой SP грани ASC(см. рис. 117).

Так как $\triangle ABC$ — правильный со стороной, равной $3\sqrt{3}$, то $BP = \dfrac{9}{2}$,

$OP = \dfrac{1}{3}BP = \dfrac{3}{2}$ (BP — медиана; O — центр равностороннего $\triangle ABC$), $BO = BP - OP = 3$. Обозначим $\angle KBP = \alpha$. Согласно условию $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{8}$. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{73}}$; $\cos\alpha = \dfrac{8}{\sqrt{73}}$. В $\triangle BKP$ и $\triangle OSP$ $\angle KPO$ — общий и $\angle PKB = \angle POS = 90^\circ$. Поэтому они подобны по двум углам. Значит $\dfrac{SO}{BK} = \dfrac{OP}{KP}$, $SO = \dfrac{BK \cdot OP}{KP}$. Из прямоугольного $\triangle BKP$ $PK = BP\sin\alpha = \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{73}} = \dfrac{27}{2\sqrt{73}}$; $BK = BP\cos\alpha =$ $= \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{8}{\sqrt{73}} = \dfrac{36}{\sqrt{73}}$. Поэтому $SO = \dfrac{36 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{73}}{\sqrt{73} \cdot 2 \cdot 27} = 4$. Итак, $SO = 4$; $BO = 3$. Из $\triangle BOS$ по теореме Пифагора находим $SB = \sqrt{BO^2 + SO^2} = 5$.

Ответ: 5.

895. 1) Пусть SM — медиана $\triangle SAB$. Так как O точка пересечения медиан $\triangle SAB$, то $SO : OM = 2 : 1$ (см. рисунок 118). $\triangle SOK \sim \triangle SMB$,

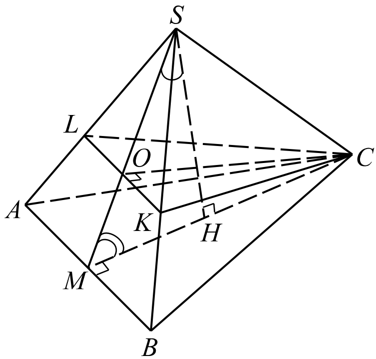


Рис. 118.

так как $SO : OM = SK : SB$ и угол при вершине S общий. Значит $\dfrac{LK}{AB} = \dfrac{SK}{SB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow LK = \dfrac{2}{3}AB = 2$.

2) Так как $\triangle ABC$ — правильный, то CM — высота $\triangle ABC$. Следовательно, $CM = \dfrac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Из прямоугольного треугольника SMB находим $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = $ $= \dfrac{3}{2}\sqrt{15}$; $OM = \dfrac{1}{3}SM = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$. Так как $SABCD$ — правильная пирамида, то H — центр $\triangle ABC$. Из $\triangle ABC$ находим $MH = \dfrac{1}{3}CM =$ $= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\angle SMH = \dfrac{MH}{SM} = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}$. Из $\triangle COM$ по теореме косинусов получаем $CO = \sqrt{OM^2 + CM^2 - 2 \cdot OM \cdot CM \cdot \cos\angle OMC} = 3$.

3) $S_{CLK} = \dfrac{1}{2}CO \cdot LK = 3$.

Ответ: 3.

896. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через её высоту и апофему (см. рис. 119). Пусть SH — высота пирамиды $SABCD$. Тогда H — центр основания $ABCD$ пирамиды. Пусть HP — перпендикуляр, проведенный из точки H на боковую грань пирамиды.

Из $\triangle HSP$ по теореме Пифагора $SP = \sqrt{SH^2 - HP^2} = \sqrt{64 - 4{,}8^2} = 6{,}4$.

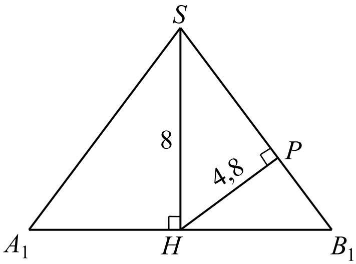


Рис. 119.

$\triangle SPH \sim \triangle SHB_1$, значит $\dfrac{SH}{SP} = \dfrac{HB_1}{HP}$, отсюда $HB_1 = \dfrac{SH \cdot HP}{SP} = 6$, тогда $A_1B_1 = AB = 12$.

Ответ: 12.

897. Пусть SO — высота пирамиды $SABCD$. Тогда O — центр основания $ABCD$ пирамиды. Пусть OH — перпендикуляр, проведенный из точки O на боковое ребро SC. Из $\triangle SOH$ по теореме Пифагора $SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \sqrt{16 - \dfrac{16}{9}} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ (см. рис. 120).

$\triangle SOC \sim \triangle SOH$ (по двум углам: $\angle HSO = \angle CSO$; $\angle SHO = \angle SOC = 90^\circ$), поэтому $\dfrac{SO}{SH} = \dfrac{OC}{OH} \Rightarrow OC = \dfrac{SO \cdot OH}{SH} = \sqrt{2}$.

$OC = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}CD \cdot \sqrt{2}$, отсюда $CD = \dfrac{OC}{\sqrt{2}} \cdot 2 = 2$.

Ответ: 2.

899. Из теоремы, обратной к теореме Пифагора, следует, что основание пирамиды — прямоугольный треугольник. Высота, проведенная из вершины S пирамиды, падает в центр описанной около $\triangle ABC$ окружности,

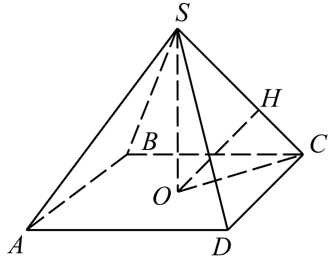


Рис. 120.

так как боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под одним углом (см. рис. 121). Пусть AB — гипотенуза $\triangle ABC$, тогда $AB = 10$. H — се-

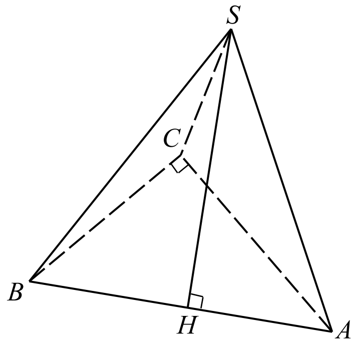


Рис. 121.

редина гипотенузы AB, является центром описанной около $\triangle ABC$ окружности, так как $\triangle ABC$ — прямоугольный. Значит, SH — высота пирамиды. $SH = BH$, так как $\angle SBH = 45^\circ \Rightarrow SH = 5$. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = 24$.

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3} \cdot 5 \cdot 24 = 40.$

Ответ: 40.

900. Из условия следует, что двугранный угол при основании пирамиды составляет 45°, поэтому высота пирамиды равна половине стороны основания. Пусть N — вершина пирамиды с основанием $ABCD$; H — центр основания, HM — перпендикуляр, проведенный к боковому ребру (см. рис. 122), a ($a > 0$) — сторона основания. Из $\triangle HND$ имеем:

$HN = \dfrac{a}{2}$; $HD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $HM = \sqrt{6}$; $ND = \sqrt{HN^2 + HD^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $HN \cdot HD = HM \cdot ND = 2S$, где S — площадь $\triangle HND$. Получаем равенство $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$, откуда $a = 6$. Объем пирамиды: $V = \dfrac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \dfrac{a}{2} = 36$.

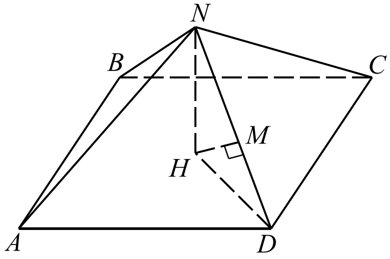


Рис. 122.

Ответ: 36.

901. 1) Так как, по условию $\dfrac{SK}{SC} = \dfrac{4}{5}$, то $\dfrac{SK}{KC} = \dfrac{4}{1}$.

2) Так как пирамида $SABC$ — правильная, то $\triangle ACS = \triangle BCS$. Тогда высоты AK и BK соответственно $\triangle ACS$ и $\triangle BCS$ равны (см. рис. 123). Следовательно, из $\triangle ASK$ и $\triangle BKC$ имеем $\sqrt{AS^2 - SK^2} = \sqrt{BC^2 - KC^2}$. Пусть $KC = y\,(y > 0)$, тогда $SK = 4y$; $SA = SC = SB = 5y$. Получаем $\sqrt{25y^2 - 16y^2} = \sqrt{16 - y^2}$; $9y^2 = 16 - y^2$; $10y^2 = 16$; $y^2 = \dfrac{8}{5}$;

$y = 2\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

3) $BK = \sqrt{BC^2 - KC^2} = \sqrt{16 - \dfrac{8}{5}} = \sqrt{\dfrac{72}{5}} = 6\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

4) $SK = 4KC = 8\sqrt{\dfrac{2}{5}}$.

5) $SC = \dfrac{SK \cdot 5}{4} = 5 \cdot 2\sqrt{\dfrac{2}{5}} = 2\sqrt{10}$;

6) $S_{\text{бок.}} = \dfrac{SK \cdot 5}{4} = 3 \cdot S_{\triangle SBC} = 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot SC \cdot BK = 3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 36$.

Ответ: 36.

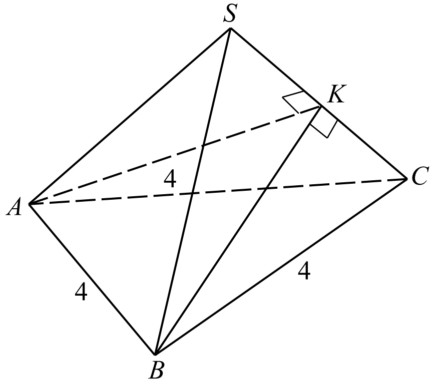


Рис. 123.

902. Пусть SO — высота пирамиды $SABCD$. M — середина стороны CD, Q — середина стороны AD. $OM = \dfrac{1}{2}AD$; $SO = OM\,\mathrm{tg}\,\angle SMO = 3$ (см. рис. 124).

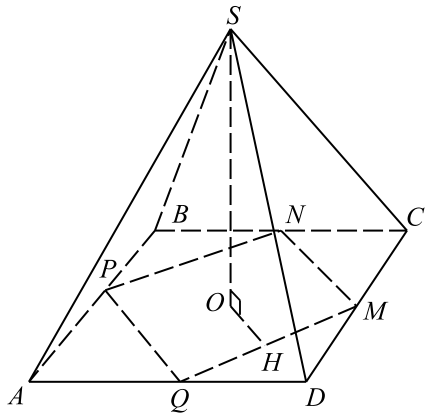


Рис. 124.

Пусть $OH \perp QM$. Тогда $OH = \dfrac{1}{4}BD = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

$QM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Из $\triangle OSH$ получаем

$SH = \sqrt{OH^2 + SO^2} = \dfrac{9}{2\sqrt{2}}$.

Так как $SNPMQ$ — правильная, то площадь ее боковой поверхности равна половине произведения периметра основания на апофему. То есть $S_{\text{бок. } SNPMQ} = \dfrac{1}{2} \cdot 4QM \cdot SH = 13{,}5$.

Ответ: 13,5.

903. Пусть $KH \perp AB$, $KH_1 \perp BC$. Обозначим $KH = x$. Так как BK — биссектриса угла B, то $\triangle KHB = \triangle BKH_1$ и $KH = HB = KH_1 = BH_1$. Тогда $x = AH \cdot \operatorname{tg} \angle HAK = KH_1 = CH_1 \cdot \operatorname{tg} \angle KCH_1$ (см. рис. 125). Учитывая, что $AH = AB - HB = 2 - x$, $CH_1 = BC - BH_1 = 4 - x$; $\operatorname{tg} \angle KAH = \operatorname{tg} \angle CAB = \dfrac{BC}{AB} = 2$; $\operatorname{tg} \angle KCH_1 = \operatorname{tg} \angle ACB = \dfrac{1}{2}$, получаем $(2 - x) \cdot 2 = (4 - x) \cdot \dfrac{1}{2}$, откуда $x = \dfrac{4}{3}$. Пусть KO — перпендикуляр из K на плоскость ASB, тогда $KO = KH \cdot \sin \angle OHK$. Из прямоугольного $\triangle SHK$ находим $SH = \sqrt{SK^2 + HK^2} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \sin \angle OHK = \dfrac{SK}{SH} = \dfrac{3}{5}$.

$OK = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3}{5} = 0{,}8$.

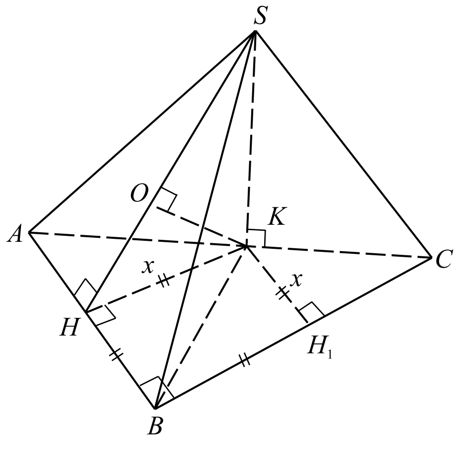


Рис. 125.

Ответ: 0,8.

904. Пусть ABC — основание данной пирамиды, DH — её высота (см. рис. 126).

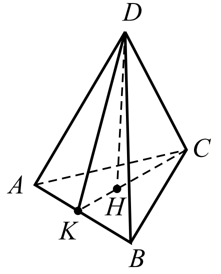


Рис. 126.

$\triangle ABC$ — правильный, H — его центр, тогда HK — радиус вписанной окружности.

$HK = \frac{1}{3}CK = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}AB$. $HK = 5$, тогда $AB = 10\sqrt{3}$. По условию $\angle DKC = 30°$, тогда $DH = \frac{KH}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

$V_{DABC} = \frac{1}{3}DH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}DH \cdot \frac{1}{2}CK \cdot AB = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10\sqrt{3} = 125.$

Ответ: 125.

905. Пусть ABC — основание данной пирамиды, DH — её высота (см. рис.127).

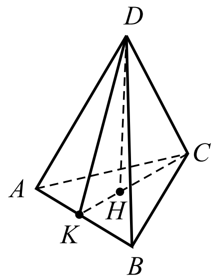


Рис. 127.

Обозначим $AB = a$, тогда $CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $KH = \frac{1}{3}CK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

По условию $\angle DKC = 30°$, поэтому $DH = \frac{KH}{\sqrt{3}} = \frac{a}{6}$.

$V_{DABC} = \frac{1}{3}DH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{8 \cdot 9} = 27$, откуда $a = 6\sqrt{3}$.

Радиус вписанной в основание окружности равен $KH = \frac{a\sqrt{3}}{6} = 3$, диаметр равен $2 \cdot 3 = 6$.

Ответ: 6.

906. Полученная пирамида $KABC$ — правильная, боковые грани наклонены под углом 60° к плоскости основания (см. рис. 128).

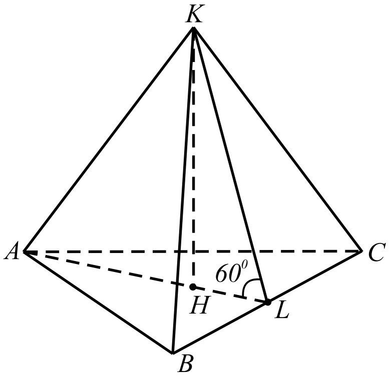


Рис. 128.

$AL = BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$, $HL = \frac{1}{3}AL = 3$. $KH = HL \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = $
$= 3\sqrt{3}$.

$V_{KABC} = \frac{1}{3} \cdot KH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}KH \cdot \frac{1}{2}AL \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6\sqrt{3} = 81.$

Ответ: 81.

907. Полученная пирамида $KABCD$ — правильная, боковые грани составляют угол 30° с плоскостью основания (см. рис. 129).

AC — диагональ квадрата $ABCD$, $AC = 3\sqrt{6}$, тогда $AB = 3\sqrt{3}$.

KH — высота пирамиды, $HL \perp BC$, тогда $HL = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

$KH = HL \cdot \operatorname{tg} 30 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}$;

$V_{KABCD} = \frac{1}{3} \cdot KH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(3\sqrt{3})^2 = \frac{27}{2} = 13{,}5.$

Ответ: 13,5.

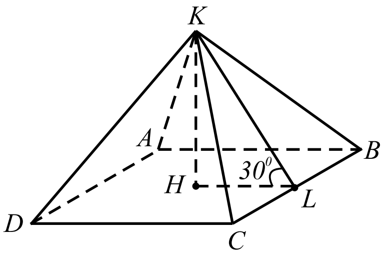


Рис. 129.

908. *Решение*. Пусть NO —высота пирамиды (см. рис. 130), $NK \perp AB$,

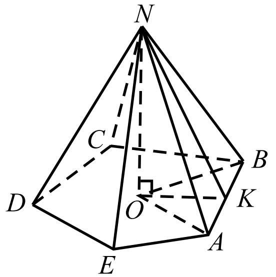


Рис. 130.

$OK \perp AB$, тогда $\angle NKO = 60°$.

1) $S_{NAB} = \frac{1}{2}AB \cdot NK$, $S_{AOB} = \frac{1}{2}OK \cdot AB$. Из $\triangle\ ONK$ имеем: $\cos\angle OKN = \frac{OK}{NK}$. Тогда $\frac{S_{NAB}}{S_{AOB}} = \frac{NK}{OK} = \frac{1}{\cos\angle OKN} \Rightarrow$

$S_{NAB} = \frac{S_{AOB}}{\cos\angle OKN}$.

2) $S_{\text{бок}} = 5S_{ANB} = \frac{5S_{AOB}}{\cos\angle OKN} = \frac{S_{ABCDE}}{\cos\angle OKN} = \frac{17}{\cos 60°} = 17 \cdot 2 =$
$= 34$.

Ответ: 34.

909. Рассмотрим правильную четырёхугольную пирамиду $NABCD$ (см. рис. 131).
1) Пусть $a = AB$, $r = OC$ — радиус окружности, описанной около основания пирамиды.

Площадь боковой грани пирамиды равна $\frac{1}{2}NK \cdot a$, а площадь основания пирамиды равна a^2 (см. рис. 131).

Площадь полной поверхности равна $S_{\text{п.п.}} = 4\cdot\frac{1}{2}NK\cdot a+a^2 = 2NK\cdot a+a^2$.

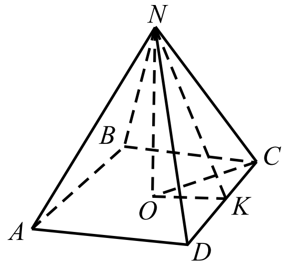


Рис. 131.

2) Из $\triangle OCK$: $OC^2 = r^2 = OK^2 + KC^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 = 2r^2$.

3) По условию $\angle ANC = 60^\circ \Rightarrow \angle ONC = \frac{1}{2}\angle ANC = 30^\circ$. Из $\triangle NOC$: $NO = \frac{OC}{\operatorname{tg}\angle CNO} = \frac{r}{\operatorname{tg}30^\circ} = r\sqrt{3}$.

Из $\triangle NOK$: $NK = \sqrt{NO^2 + OK^2} = \sqrt{3r^2 + \frac{r^2}{2}} = r\sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{r\sqrt{14}}{2}$.

4) $S_{\text{п.п.}} = 2 \cdot \frac{r\sqrt{14}}{2} \cdot a + a^2 = r\sqrt{14} \cdot r\sqrt{2} + 2r^2 = 2r^2(\sqrt{7} + 1)$. По условию $S_{\text{п.п.}} = 72(\sqrt{7} + 1)$, значит $2r^2(\sqrt{7} + 1) = 72(\sqrt{7} + 1)$; $r^2 = 36$; $r = 6$.

Ответ: 6.

910. 1) Пусть M — проекция точки B на плоскость ABC (см. рис. 132). Тогда AMC_1B_1 — прямоугольник, $C_1B_1 = AM = CB = AC$, $CB \parallel C_1B_1 \parallel AM$. Следовательно $AMBC$ — ромб, $MC \perp AB$, $B_1MC \perp AB$. Пусть $L = MC \cap AB$. Тогда $B_1L \perp AB$.

2) Пусть AE — высота $\triangle ABC$. Так как $AC_1 \perp ABC$, C_1E — наклонная к плоскости ABC, AE — проекция наклонной, $AE \perp BC$, то по теореме о трёх перпендикулярах $C_1E \perp BC$.

3) Покажем, что $C_1E = B_1L$. Так как $\triangle ABC$ — равносторонний, то

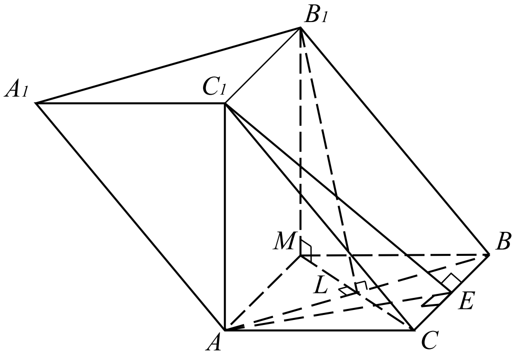


Рис. 132.

AE — медиана $\triangle ABC$, $CE = \dfrac{1}{2}BC$.

L — точка пересечения диагоналей ромба $MACB$, и значит

$LB = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}BC = CE.$

Таким образом в треугольниках CC_1E и BB_1L: $B_1B = C_1C$, $\angle B_1LB = \angle C_1EC = 90^\circ$, $BL = CE$. Следовательно, $\triangle CC_1E = \triangle BB_1L$ и $B_1L = C_1E$.

4) Так как $BC = AB$ и $B_1L = C_1E$, то $S_{A_1B_1BA} = S_{C_1B_1BC}$. Следовательно площадь боковой поверхности заданной призмы $S_{\text{бок.}} = S_{AA_1C_1C} + 2S_{C_1B_1BC}$.

5) Пусть $AC_1 = x$ $(x > 0)$, тогда $AC = \dfrac{AC_1}{\operatorname{tg}\angle ACC_1} = \dfrac{x}{\operatorname{tg}60^\circ} = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

$S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AC_1 = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \cdot x = \dfrac{x^2}{\sqrt{3}}.$

6) AE — высота $\triangle ABC$, $\triangle ABC$ — правильный, $AE = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} =$

$= \dfrac{x \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2} = \dfrac{x}{2}.$

Из $\triangle EAC_1$ $C_1E = \sqrt{AE^2 + AC_1^2} = \sqrt{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + x^2} = \dfrac{x}{2}\sqrt{5}.$

7) $S_{CC_1B_1B} = BC \cdot C_1E = \dfrac{x}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{x}{2}\sqrt{5} = \dfrac{x^2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}.$

8) $S_{\text{бок.}} = \dfrac{x^2}{\sqrt{3}} + \dfrac{2 \cdot x^2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{x^2\left(1+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{3}}$.

По условию $S_{\text{бок.}} = 3\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)$. Найдём x из уравнения
$\dfrac{x^2\left(1+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)$, $x^2 = 9$, $x = 3$. $AC_1 = 3$.

Ответ: 3.

911. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма (см. рис. 133), $\triangle ABC$ — правильный, O — центр $\triangle ABC$, $A_1O \perp$ пл. ABC, $\angle A_1AO = 45°$, $AC = \sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{6}}$.

Найти: $S_{\text{бок. пов.}}$.

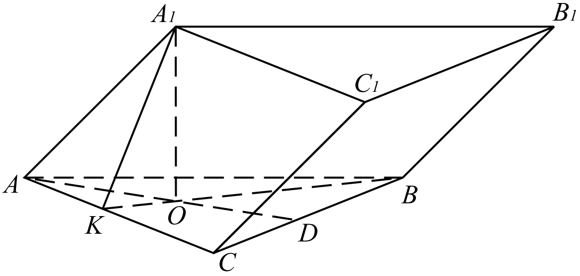


Рис. 133.

Решение.

1) Боковые грани призмы AA_1C_1C и AA_1B_1B — равные параллелограммы, а грань CC_1B_1B — прямоугольник (покажите самостоятельно). $S_{\text{бок. пов.}} = 2S_{AA_1C_1C} + S_{CBB_1C_1}$.

2) Пусть a — длина стороны основания. AD — высота $\triangle ABC$, $\triangle ABC$ — правильный, $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO = \dfrac{2}{3}AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

3) Рассмотрим $\triangle AOA_1$: $\angle A_1AO = 45°$, тогда $AA_1 = AO \cdot \sqrt{2} = \dfrac{a\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

4) BK — высота $\triangle ABC$, $BK \perp AC$, тогда $A_1K \perp AC$.

Из $\triangle AA_1K$ находим: $A_1K = \sqrt{AA_1^2 - AK^2} = \sqrt{\dfrac{6a^2}{9} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

5) $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot A_1K = a \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{6} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{6}$.

$S_{CC_1B_1B} = BC \cdot CC_1 = a \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{3}$.

$S_{\text{бок. пов.}} = \dfrac{2a^2\sqrt{15}}{6} + \dfrac{a^2\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^2\left(\sqrt{15}+\sqrt{6}\right)}{3}$.

По условию $a = \sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{6}}$.

$S_{\text{бок. пов.}} = \dfrac{\left(\sqrt{15}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{15}+\sqrt{6}\right)}{3} = 3$.

Ответ: 3.

912. 1) $AC \perp AB$ и $CC_1 \perp AB \Rightarrow$ по теореме о трёх перпендикулярах $AC_1 \perp AB$. Значит, $\angle C_1AC$ — линейный между плоскостями ABC и ABC_1. Из прямоугольного $\triangle AC_1C$ находим: $AC = CC_1 \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3}$ (см. рис. 134).

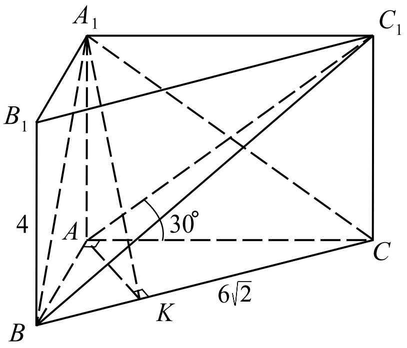


Рис. 134.

2) Из прямоугольного $\triangle ABC$:

$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

3) Пусть AK — высота $\triangle ABC$, проведенная к стороне BC.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot AB$, с другой стороны $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AK \cdot BC$. Следовательно

$AK = \dfrac{AC \cdot AB}{BC} = \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = 4$

4) $AK \perp BC$, $AA_1 \perp BC \Rightarrow$ по теореме о трёх перпендикулярах $A_1K_1 \perp BC$. Значит, $\angle AKA_1$ — линейный угол двугранного угла A_1BCA. $\triangle A_1AK$: $\angle A_1AK = 90^\circ$, $AA_1 = AK$,

следовательно, $\angle AKA_1 = 45°$.

Ответ: 45°.

914. Проведем через точку M отрезок KN параллельно K_1N_1, где $K \in BC$, а $N \in AB$ (см. рис. 135). Тогда, так как $M \in KN$, $M \in \alpha$, $K_1N_1 \subset \alpha$

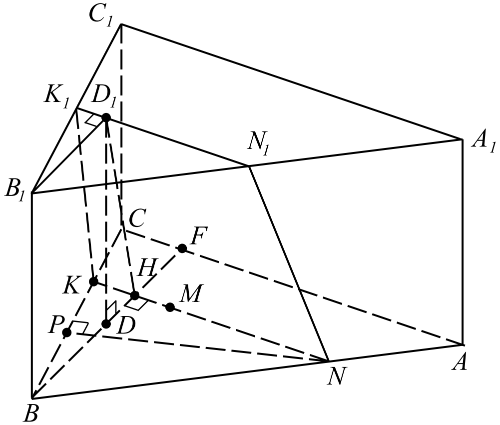


Рис. 135.

и $KN \parallel K_1N_1$, то $KN \subset \alpha$, а трапеция K_1N_1NK — сечение призмы плоскостью α. Так как K_1N_1 — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, то $K_1N_1 = \dfrac{1}{2}A_1C_1 = 7{,}5$ и $K_1N_1 \parallel A_1C_1 \parallel AC$. Поэтому $KN \parallel AC$. Так как $KN \parallel AC$ и KN делит медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B, в отношении $2 : 1$, считая, от вершины, то треугольники BKN и BCA подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{2}{3}$. Тогда $BK = \dfrac{2}{3}BC = \dfrac{2}{3} \cdot 12 = 8$, $KN = BN = \dfrac{2}{3}BA = \dfrac{2}{3} \cdot 15 = 10$. Пусть P — середина отрезка BK. Так как $BN = KN$, то $NP \perp BK$. Поэтому из $\triangle BNP \Rightarrow NP = \sqrt{BN^2 - \dfrac{BK^2}{4}} = \sqrt{100 - 16} = 2\sqrt{21}$. Пусть $H \in KN$ и $BH \perp KN$. Тогда $S_{BKN} = \dfrac{1}{2} \cdot BK \cdot NP = \dfrac{1}{2} \cdot BH \cdot NK$ $\Rightarrow BH = \dfrac{BK \cdot NP}{NK} = \dfrac{8\sqrt{21}}{5}$. Пусть $F = AC \cap BH$, а $D_1 \in K_1N_1$, так что $B_1D_1 \perp KN$. Опустим перпендикуляр D_1D на плоскость ABC,

$DD_1 = BB_1 = 0{,}8$. Так как $B_1D_1 \perp K_1N_1$ и D_1 принадлежит средней линии треугольника $A_1B_1C_1$, то $D \in BF$ и $BD = DF$. Из подобия треугольников BKN и BCA следует, что $BH = \frac{2}{3}BF$. Таким образом, $DH = BH - BD = BH - \frac{1}{2}BF = BH - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}BH = \frac{1}{4}BH = \frac{2\sqrt{21}}{5}$.

Из $\triangle DD_1H \Rightarrow D_1H = \sqrt{DD_1^2 + DH^2} = \sqrt{0{,}64 + \frac{84}{25}} = 2$. По теореме о трёх перпендикулярах так как $DD_1 \perp$ пл. ABC и $DH \perp KN$, то $D_1H \perp KN$. Следовательно, искомая площадь $S_{K_1N_1NK} =$
$= \frac{1}{2} \cdot (K_1N_1 + KN) \cdot D_1H = \frac{1}{2} \cdot 17{,}5 \cdot 2 = 17{,}5$.

Ответ: 17,5.

915. Так как $AC \perp CB$ и $AC \perp C_1C$, то $AC \perp$ пл. CC_1B_1 (см. рис. 136) $\Rightarrow$
$AC \perp CB_1 \Rightarrow CB_1$ — расстояние от точки B_1 до прямой $AC \Rightarrow CB_1 = \sqrt{40}$.

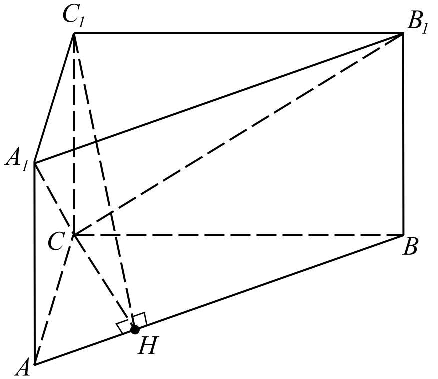


Рис. 136.

Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что $CA_1 = 2\sqrt{17}$. По теореме Пифагора из $\triangle CAA_1$ $AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1^2} =$
$= \sqrt{68 - 4} = 8$, а из $\triangle CBB_1$ $BC = \sqrt{B_1C^2 - BB_1^2} = \sqrt{40 - 4} = 6$.
Тогда из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} =$
$= \sqrt{64 + 36} = 10$. Пусть $H \in AB$ и $CH \perp AB$. Так как $AB \perp CH$ и $CC_1 \perp AB$, то $AB \perp CC_1H$. Поэтому $C_1H \perp AB$, значит, C_1H —

расстояние от точки C_1 до прямой AB. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}CH \cdot AB$ $\Rightarrow CH = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = 4{,}8$. По теореме Пифагора из $\triangle HCC_1 \Rightarrow C_1H =$ $= \sqrt{CH^2 + CC_1^2} = \sqrt{23{,}04 + 4} = 5{,}2$.

Ответ: 5,2.

916. Так как $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, то треугольник ABC явля-

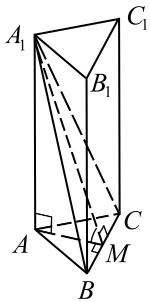


Рис. 137.

ется ортогональной проекцией треугольника A_1BC (см. рис. 137). Пусть A_1M — высота $\triangle BA_1C$, тогда AM — проекция A_1M на плоскость ABC, и значит $AM \perp BC$. По определению линейным углом двугранного угла между плоскостями ABC и A_1BC является $\angle AMA_1$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot AM = 2AM = 6 \Rightarrow AM = 3.$

$S_{\triangle A_1BC} = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot A_1M = 2A_1M = 6\sqrt{10} \Rightarrow A_1M = 3\sqrt{10}.$

Из $\triangle A_1AM$: $\operatorname{tg} \angle AMA_1 = \dfrac{A_1A}{AM} = \dfrac{\sqrt{A_1M^2 - AM^2}}{AM} = \dfrac{\sqrt{90 - 9}}{3} = 3.$

Ответ: 3.

917. Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, то $\triangle ABC$ является ортогональной проекцией $\triangle ABC_1$. Пусть C_1K — высота $\triangle ABC_1$, тогда CK — проекция C_1K на плоскость ABC, и $CK \perp AB$.

Следовательно $\angle CKC_1$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями ABC и ABC_1 (см. рис. 138).

$S_{ABCD} = AB \cdot CK = 7CK = 28 \Rightarrow CK = 4.$

Из $\triangle C_1CK$: $C_1C = CK \cdot \operatorname{tg} \angle CKC_1 = 4 \cdot 2{,}75 = 11.$

Ответ: 11.

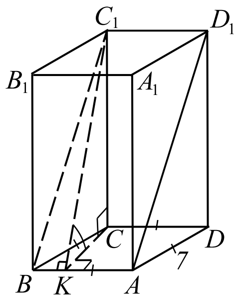


Рис. 138.

918. Пусть α — величина угла между прямыми A_1B и AC. Поскольку $A_1C_1 \parallel AC$, то $\alpha = \angle C_1A_1B$, (см. рис. 139). Так как $A_1C_1 \perp C_1B_1$,

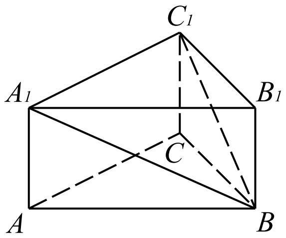


Рис. 139.

$A_1C_1 \perp B_1C_1B$ и C_1B_1 — проекция C_1B на плоскость $A_1B_1C_1$, то по теореме о трёх перпендикулярах $A_1C_1 \perp BC_1$. Следовательно, $A_1C_1 \perp BC_1$, $\cos\alpha = \dfrac{A_1C_1}{A_1B}$. Из $\triangle ACB$ и $\triangle A_1AB$ по теореме Пифагора имеем:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 13,\ A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = 4 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Ответ: 0,75.

919. Обозначим искомый угол через α и заметим, что $\alpha = \angle BA_1C_1$. Пусть K — проекция точки B на прямую A_1C_1, а L — проекция точки K на прямую AC, (см. рис. 140). Тогда $AC \perp LKB$ и, значит, $AC \perp LB$. Из $\triangle A_1KB$ имеем: $\sin\alpha = \dfrac{BK}{A_1B}$. Длины BK и A_1B выразим из $\triangle BKL$ и $\triangle BA_1A$ с помощью теоремы Пифагора:
$BK = \sqrt{KL^2 + BL^2} = \sqrt{1 + BL^2}$, $A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = 3$.
Высоту BL в $\triangle ABC$ найдём, выразив площадь $\triangle ABC$ двумя способами:

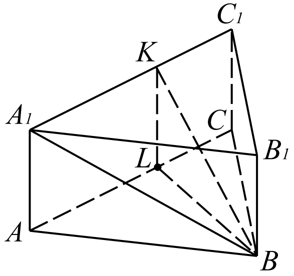


Рис. 140.

$2S_{ABC} = BL \cdot AC = BC \cdot AH$, где AH — высота, проведённая к основанию BC. Так как $AB = AC$, то AH является и медианой $\triangle ABC$, то есть $BH = BC/2 = 1$. По теореме Пифагора $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{7}$. Итак, $BL =$
$= \dfrac{AH \cdot BC}{AC} = \sqrt{\dfrac{7}{2}}$, $BK = \sqrt{1 + BL^2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Так как $\triangle A_1KB$ — прямоугольный, то $\angle\alpha < 90^\circ$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Градусная мера α составляет 45°.

Ответ: 45.

920. Так как диаметр описанной около боковой грани окружности равен диагонали прямоугольника AA_1B_1B, то $AB = \sqrt{A_1B^2 - AA_1^2} =$
$= \sqrt{69 - 49} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Найдём отрезок AC (см. рис. 141). По теореме косинусов из треугольника ABC находим
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC} = AB\sqrt{3} = 2\sqrt{15}$.
$AK = \dfrac{1}{2}AC = \sqrt{15}$. Так как $AK \perp A_1F_1$, то по теореме о трёх перпендикулярах $KA_1 \perp A_1F_1$. Тогда $\angle AA_1K$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями A_1BE и AFF_1, то есть искомый угол.

$\cos\angle AA_1K = \dfrac{AA_1}{A_1K} = \dfrac{7}{\sqrt{7^2 + \sqrt{15}^2}} = 0{,}875.$

Ответ: 0,875.

921. Так как основанием правильной шестиугольной призмы является правильный шестиугольник, то сторона основания равна радиусу описанной окружности, то есть $AB = \sqrt{3}$. Найдём отрезок AC (рис. 142). По теореме косинусов из треугольника ABC находим
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC} = AB\sqrt{3} = 3$. Так как

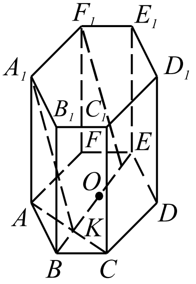


Рис. 141.

$AC \perp CD$, то по теореме о трёх перпендикулярах $A_1C \perp CD$. Тогда $\angle A_1CA$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями A_1CD и ACD, то есть искомый угол. $\sin\angle A_1CA = \dfrac{AA_1}{A_1C} = \dfrac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0{,}8.$

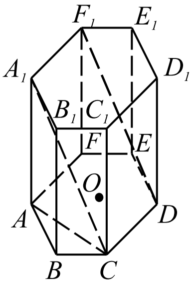


Рис. 142.

Ответ: 0,8.

922. Так как основанием правильной шестиугольной призмы является правильный шестиугольник, то сторона основания равна радиусу описанной окружности, то есть $AB = \dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$. Найдём отрезок AC (рис. 143). По теореме косинусов из треугольника ABC находим
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC} = AB\sqrt{3} = \sqrt{11}$. Так как $AC \perp A_1F_1$, то по теореме о трёх перпендикулярах $A_1C \perp A_1F_1$. Тогда $\angle AA_1C$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями A_1CD и A_1AF, то есть искомый угол. $\cos\angle AA_1C = \dfrac{AA_1}{A_1C} = \dfrac{5}{\sqrt{5^2 + \left(\sqrt{11}\right)^2}} = \dfrac{5}{6}$,

$$\frac{1}{\cos\angle AA_1C} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

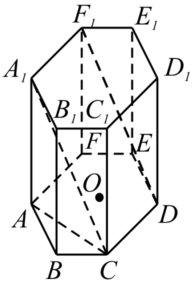


Рис. 143.

Ответ: 1,2.

923. Пусть $H \in AC$ (см. рис. 144) так, что $AC \perp$ пл. BB_1H, тогда $AC \perp BH$ и $AC \perp B_1H$. Так как $B_1H \perp AC$, то B_1H — расстояние от точки B_1 до прямой AC и, следовательно, $B_1H = 15$.

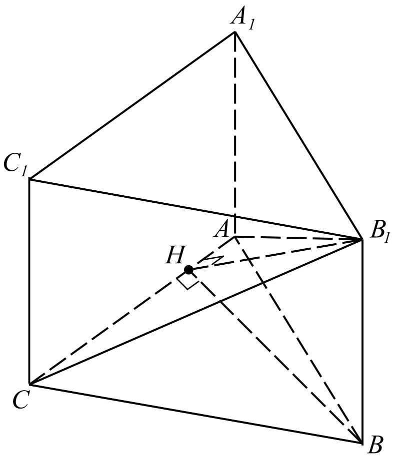


Рис. 144.

Так как $B_1C_1 \parallel BC$, то $\angle(B_1C_1, AC) = \angle(BC, AC) \Rightarrow$ $\sin\angle ACB = \sin\angle(B_1C_1, AC) = \dfrac{3}{5}$. Из прямоугольного треугольника

BCH находим $BH = BC \cdot \sin\angle ACB = 20 \cdot \dfrac{3}{5} = 12$. Из прямоугольного треугольника BB_1H находим по теореме Пифагора:
$BB_1 = \sqrt{B_1H^2 - BH^2} = \sqrt{225 - 144} = 9$.

Ответ: 9.

924. Пусть $H \in AC$, так что $AC \perp$ пл. BB_1H (см. рис. 145), тогда $AC \perp BH$ и $AC \perp B_1H$. Так как $B_1H \perp AC$, то расстояние от точки B_1 до прямой AC равно длине отрезка B_1H. Так как параллельные плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC содержат скрещивающиеся прямые B_1C_1 и AC соответственно, то расстояние между прямыми B_1C_1 и AC равно расстоянию между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ABC. Значит, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 8$.

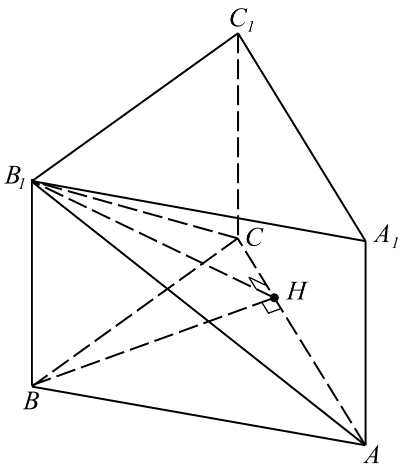


Рис. 145.

Так как $B_1C_1 \parallel BC$, то $\angle(B_1C_1, AC) = \angle(BC, AC) \Rightarrow \sin\angle ACB = \sin\angle(B_1C_1, AC) = \dfrac{2}{5}$. Из прямоугольного треугольника BCH находим $BH = BC \cdot \sin\angle ACB = 15 \cdot \dfrac{2}{5} = 6$. Из прямоугольного треугольника BB_1H находим по теореме Пифагора:
$B_1H = \sqrt{BB_1^2 + BH^2} == \sqrt{64 + 36} = 10$.

Ответ: 10.

925. 1. Так как $AC \perp BC_1$ и $AC \perp CC_1$, то $AC \perp$ пл. BCC_1 (см. рис. 146). Следовательно, $AC \perp BC$ и $A_1C_1 \perp BC_1$, то есть треугольники ACB и A_1C_1B — прямоугольные.

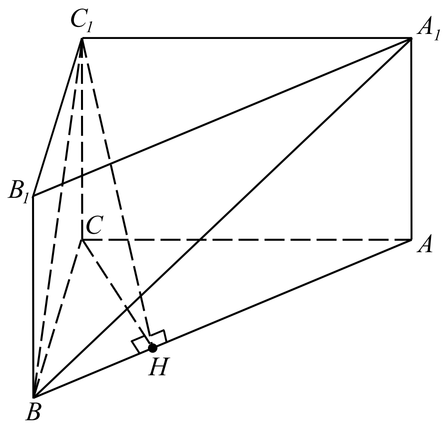


Рис. 146.

2. Из прямоугольного треугольника ABA_1 по теореме Пифагора находим $AB = \sqrt{A_1B^2 - AA_1^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$. Так как $AC \parallel A_1C_1$, то угол между прямыми A_1B и AC равен углу между прямыми A_1B и A_1C_1. Поэтому из условия задачи следует, что $\sin\angle BA_1C_1 = \dfrac{4\sqrt{10}}{13}$. Из $\triangle A_1BC_1$ находим: $BC_1 = A_1B \cdot \sin\angle BA_1C_1 = 13 \cdot \dfrac{4\sqrt{10}}{13} = 4\sqrt{10}$ и $A_1C_1 = \sqrt{A_1B^2 - BC_1^2} = \sqrt{169 - 160} = 3$. Так как $AC = A_1C_1$, то из $\triangle ABC$ имеем: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

3. Пусть CH — высота $\triangle ABC$, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $C_1H \perp AB$.Так как AB — линия пересечения плоскостей BC_1A и ABC и $AB \perp$ пл. CC_1H, то угол между плоскостями BC_1A и ABC равен углу C_1HC.

4. Так как $2S_{\triangle ABC} = BC \cdot AC = AB \cdot CH$, то $CH = \dfrac{BC \cdot AC}{AB} = \dfrac{12}{5}$.

Из прямоугольного треугольника C_1CH находим: $\operatorname{tg}\angle C_1HC = \dfrac{CC_1}{CH} = 5$.

Ответ: 5.

926. План решения (см. рис. 147): 1. Докажем, что $AC \perp$ пл. BCC_1.

2. Найдём длины ребер призмы $ABCA_1B_1C_1$. 3. Рассмотрим такую точку H прямой AB, что $AB \perp$ пл. CC_1H и докажем, что угол между плоскостью AC_1B и прямой CC_1 равен углу CC_1H. 4. Из треугольника CC_1H найдем $\angle CC_1H$.

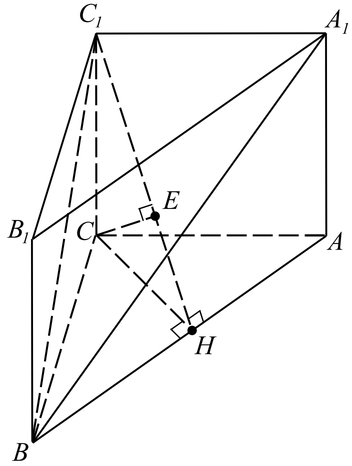


Рис. 147.

Решение. 1. Так как $AC \perp BC_1$ и $AC \perp CC_1$, то $AC \perp$ пл. BCC_1, значит, $A_1C_1 \perp$ пл. BCC_1. Следовательно, $AC \perp BC$ и $A_1C_1 \perp BC_1$, то есть треугольники ACB и A_1C_1B — прямоугольные.

2. Из прямоугольного треугольника ABA_1 по теореме Пифагора находим $AB = \sqrt{A_1B^2 - AA_1^2} = \sqrt{25-9} = 4$. Так как $AC \parallel A_1C_1$, то $\angle(A_1B, AC) = \angle(A_1B, A_1C_1)$. Значит, $\sin\angle BA_1C_1 = \sin\angle(A_1B, AC) = \frac{\sqrt{21}}{5}$. Тогда из прямоугольного треугольника A_1BC_1 находим $BC_1 = A_1B \cdot \sin\angle BA_1C_1 = 5 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \sqrt{21}$ и $A_1C_1 = \sqrt{A_1B^2 - BC_1^2} = \sqrt{25-21} = 2$. Так как $AC = A_1C_1$, то из прямоугольного треугольника ABC следует, что $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

3. Пусть $H \in AB$ так, что $AB \perp$ пл. CC_1H, тогда $CH \perp AB$ и $C_1H \perp AB$. Опустим из точки C перпендикуляр CE на прямую C_1H. Так как $AB \perp CE$ (в силу того, что $AB \perp$ пл. CC_1H) и $CE \perp C_1H$, то $CE \perp$ пл. ABC_1. Следовательно, угол между плоскостью AC_1B и прямой CC_1 равен углу CC_1H.

4. Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2}AB \cdot CH$, то $CH = \frac{BC \cdot AC}{AB} = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника C_1CH находим $\operatorname{tg}\angle HC_1C = \frac{CH}{CC_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому $\angle HC_1C = 30°$.

Ответ: 30.

927. Проведем из точки O перпендикуляр OK на сторону AC (см. рис. 148). Так как треугольники ABC и AOC имеют общее основание AC, то отношение площадей этих треугольников равно отношению их высот, то есть, $S_{OAC} : S_{ABC} = OK : BK$.

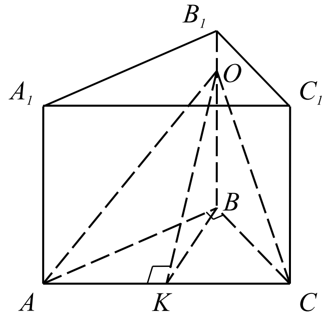


Рис. 148.

Найдём BK. Так как по условию треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный, то по теореме Пифагора: $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Отсюда $2AB^2 = AC^2$, $AB = \sqrt{\frac{AC^2}{2}} = \sqrt{\frac{10^2}{2}} = 5\sqrt{2}$. Из треугольника ABK по теореме Пифагора $BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{50 - 25} = 5$.

Найдём высоту OK. Так как, по условию, точка O делит B_1B в отношении $1 : 3$, то $OB = \frac{3}{4}B_1B = \frac{3}{4} \cdot 16 = 12$. OK находим из прямоугольного треугольника OKB по теореме Пифагора: $OK = \sqrt{OB^2 + KB^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$. Получаем, $\frac{OK}{BK} = \frac{13}{5} = 2{,}6$.

Ответ: 2,6.

929. По условию задачи сделаем чертеж (см. рис. 149).
$\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\beta = 4$. (1) Проведем высоту BK в $\triangle ABC$. Искомым уг-

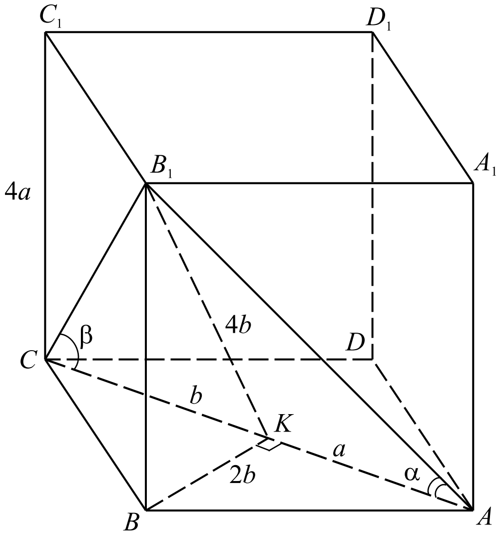


Рис. 149.

лом будет $\angle BKB_1$. Обозначим $AK = a$, $CK = b$. Из условий (1) и из прямоугольных треугольников AKB_1 и CKB_1 следует, что $B_1K = 4b$ и $B_1K = a$. То есть $4b = a$.
Высота BK прямоугольного $\triangle ABC$ $BK^2 = ab = 4b^2$. Значит $BK = 2b$.
Из прямоугольного $\triangle B_1BK$ $\cos\angle BKB_1 = \dfrac{1}{2}$, то есть $\angle BKB_1 = 60°$.

Ответ: 60.

930. По условию задачи сделаем чертеж (см. рис. 150). $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$,
$\operatorname{tg}\beta = 4$. (1)
Проведем высоту CH в $\triangle DCB$. Искомым углом будет $\angle H_1CH$. Обозначим $DH = a$, $BH = b$. Из условий (1) и из прямоугольных треугольников B_1H_1C и D_1H_1C следует, что $CH_1 = b\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{2}$ и $CH_1 =$
$= a\operatorname{tg}\beta = 4a$. Отсюда, $b = 8a$. $CH = \sqrt{ab} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}a$. Из прямоугольного треугольника H_1CH находим, что $\cos\angle H_1CH = \dfrac{CH}{CH_1} =$

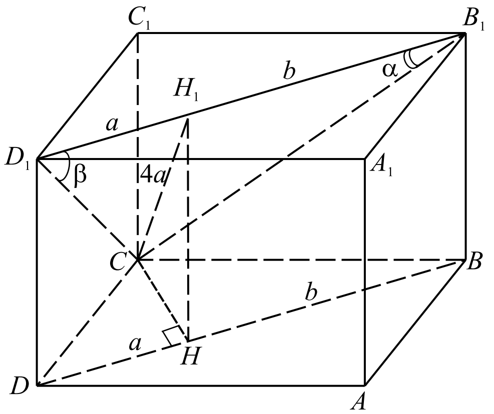


Рис. 150.

$= \dfrac{2\sqrt{2}a}{4a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Значит $\angle H_1CH = 45°$.

Ответ: 45.

931. 1. Сечение $KLPD_1$ является трапецией, так как $PL \parallel KD_1$ (см. рисунок 151).

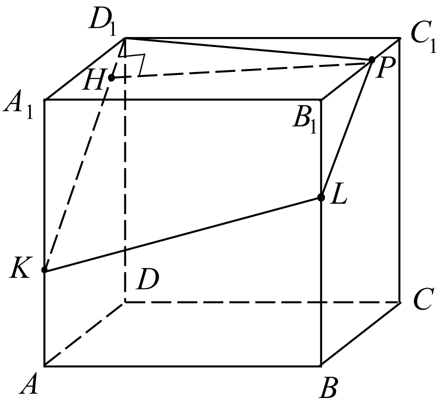


Рис. 151.

2. $\triangle KA_1D_1$ — прямоугольный $\Rightarrow KD_1 = \sqrt{A_1K^2 + A_1D_1^2} = 4\sqrt{2}$.

3. $\triangle LB_1P \sim \triangle KA_1D_1 \Rightarrow \dfrac{PL}{KD_1} = \dfrac{B_1L}{A_1K} \Rightarrow PL = \dfrac{B_1L \cdot KD_1}{A_1K} =$

$= 3\sqrt{2}$.

4. Так как $KL = D_1P$, то $KLPD_1$ — равнобедренная трапеция. Пусть $PH \perp D_1K$, тогда $D_1H = \frac{1}{2}(D_1K - PL) = \frac{1}{2}\big(4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\triangle PD_1C_1$ — прямоугольный $\Rightarrow PD_1 = \sqrt{D_1C_1^2 + PC_1^2} = \sqrt{5}$.
$\triangle PHD_1$ — прямоугольный $\Rightarrow PH = \sqrt{PD_1^2 - D_1H^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

5. $S_{KLPD_1} = \frac{1}{2}(KD_1 + PL) \cdot PH = 10{,}5$.

Ответ: 10,5.

932. 1. Сечение A_1BC разбивает призму $ABCA_1B_1C_1$ на две пирамиды AA_1BC и $A_1BB_1C_1C$ (рис. 152). Пусть V — объем призмы, V_1 — объем пирамиды AA_1BC, V_2 — объем пирамиды $A_1BB_1C_1C$. По свойству объемов $V = V_1 + V_2$. (1)

2. Проведем $AM \perp BC$, тогда $A_1M \perp BC$. Обозначим $AM = h$, $A_1M = \sqrt{100 + h^2}$. Проведем $MM_1 \parallel AA_1$, тогда $AM \perp MM_1$, значит $AM \perp BB_1C_1$, $A_1M_1 \parallel AM \Rightarrow A_1M_1 \perp BB_1C_1$, $A_1M_1 = AM = h$.

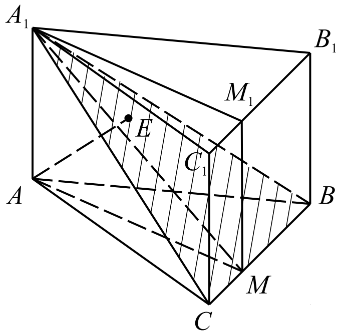


Рис. 152.

3. Найдём V, V_1, V_2. $V = S_{ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot h \cdot 10 = 80h$;

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1BC} \cdot AE = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{100 + h^2} \cdot 6 = 16 \cdot \sqrt{100 + h^2}$;

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot S_{BB_1C_1C} \cdot A_1M_1 = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 10 \cdot h = \frac{160}{3}h$. Найденные значения объемов подставим в формулу (1): $80h = 16\sqrt{100 + h^2} + \frac{160}{3}h$. Положительный корень этого уравнения $h = 7{,}5$.

4. $S_{A_1BC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot A_1M = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{100 + 56{,}25} = 100$.

Ответ: 100.

933. Так как $\sin\alpha = 0{,}6$, то $A_1M = \dfrac{12}{\sin\alpha} = 20$ (рис. 153).

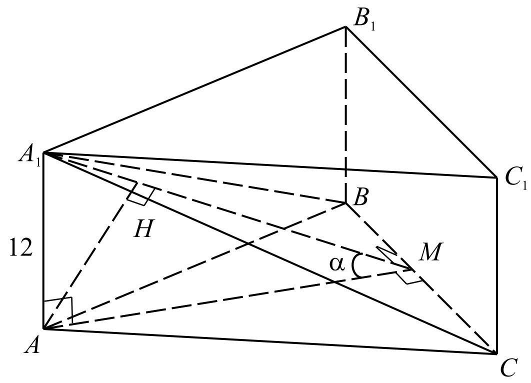


Рис. 153.

Из $\triangle AA_1M$ следует $AM = \sqrt{A_1M^2 - AA_1^2} = 16$, AH — искомое расстояние. $AH = AM\sin\alpha$, $AH = 16 \cdot \sin\alpha$, $AH = 16 \cdot 0{,}6 = 9{,}6$.

Ответ: 9,6.

934. Если в боковую грань прямой призмы можно вписать окружность, то такая грань является квадратом. Пусть сторона этого квадрата равна a. Тогда имеем: $S_{\text{пол}} = 3a^2 + 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = (3 + \dfrac{\sqrt{3}}{2})a^2 = 12 + 2\sqrt{3}$. Отсюда $a = 2$. Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине стороны квадрата: $r = \dfrac{a}{2} = 1$.

Ответ: 1.

935. $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot CC_1$. Из $\triangle C_1OC$: $CC_1 = OC$ (см. рис. 154). $CO = \dfrac{2}{3}CH$ (по свойству медиан). Из $\triangle ACH$ $CH = \sqrt{100 - 36} = 8$. $CO = \dfrac{16}{3}$, $CC_1 = \dfrac{16}{3}$. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$. $V_{ABCA_1B_1C_1} = 256$.

Ответ: 256.

936. Дано: $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма(см. рис. 155); $CC_1 = 12$,

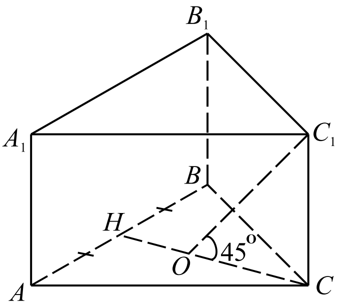


Рис. 154.

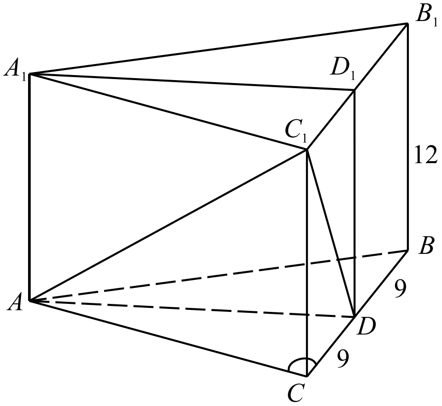


Рис. 155.

$BC = 18$,
$\operatorname{tg}\angle ACD = 0{,}4$, $AC = AB$.
Найти: тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BB_1C.
Проведем $AD \perp BC$. Тогда искомым углом будет $\angle AC_1D$. Так как $\operatorname{tg}\angle ACD = \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AD}{9}$, то $AD = 9 \cdot 0{,}4 = 3{,}6$. Для нахождения угла AC_1D найдем C_1D. Из $\triangle CC_1D$: $C_1D^2 = 144 + 81 = 225$. Значит $C_1D = 15$. $\angle C_1DA = 90°$. $\operatorname{tg}\angle AC_1D = \dfrac{AD}{C_1D} = \dfrac{3{,}6}{15} = \dfrac{1{,}2}{5} = 0{,}24$.

Ответ: 0,24.

937. Пусть CM — перпендикуляр, проведенный из точки C к плоскости BC_1D (см. рис. 156). Так как $BC = CD$ и $BC_1 = C_1D$, то высота C_1K (она же и медиана) треугольника BC_1D проходит через точку M. В

$\triangle KMC$:

$KC = \dfrac{CM}{\sin\angle MKC} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = 6\sqrt{2}$. Так как $ABCD$ — квадрат, то $KC = KD$, и из $\triangle KCD$ имеем $CD^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 144$, $CD = 12$.

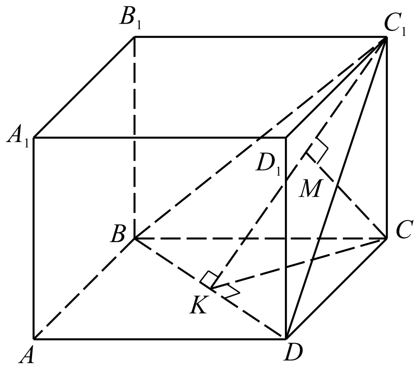


Рис. 156.

Ответ: 12.

938. Пусть CH — высота из C на DBC_1 (см. рис. 157). Так как по усло-

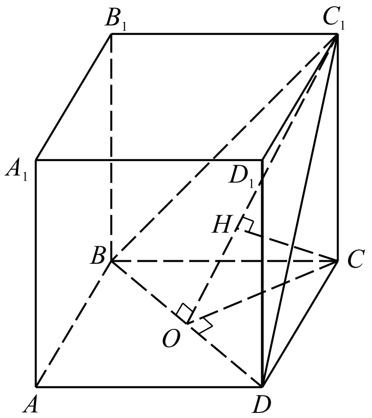


Рис. 157.

вию $\angle HOC = 45^\circ$, то $OC = \dfrac{CH}{\sin 45^\circ} = \dfrac{4\cdot 2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$. $\triangle COC_1$ — равнобедренный и $OC = CC_1$, поэтому $CC_1 = 4\sqrt{2}$. $CD = OC \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 8$. Vпризмы $= 64 \cdot 4\sqrt{2}$;

$S_{\text{бок. пов.}} = 32 \cdot 4\sqrt{2}$; $\dfrac{V\text{призмы}}{S_{\text{бок. пов.}}} = \dfrac{64 \cdot 4\sqrt{2}}{32 \cdot 4\sqrt{2}} = 2$.

Ответ: 2.

940. 1. $\triangle ABC, \angle C = 90°$, $AC = BC$ (см. рис. 158).

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{24}{9} = \dfrac{4}{3}$.

2. $AA_1 = \dfrac{V_{ABCA_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \dfrac{8 \cdot 3}{4} = 6$.

3. $\dfrac{AK}{AA_1} = \dfrac{1}{3}, AK = \dfrac{1}{3}AA_1, HD = AK = 2\,(HD||AA_1,\ CD \perp AB)$.

4. $CD = \dfrac{AC\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

5. $\operatorname{tg} \angle DCH = \dfrac{HD}{CD} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \angle 3 \Rightarrow \angle DCH = 60°$.

6. $S_{CKF} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos \angle DCH} = \dfrac{4 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \dfrac{8}{3}$.

7. $3S_{CKF} = 8$.

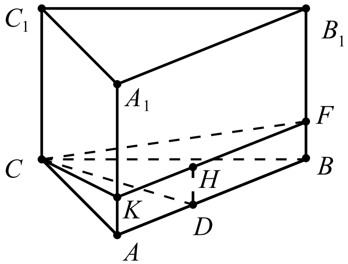


Рис. 158.

Ответ: 8.

941. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. По свойству высоты, проведённой из вершины прямого угла, имеем:

$CD^2 = AD \cdot BD$, $CD^2 = 0{,}9 \cdot 2{,}5$, $CD = 1{,}5$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot CD \cdot AB$,

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 1{,}5(0{,}9 + 2{,}5) = 2{,}55$. $CC_1 = \dfrac{V_{ABCA_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \dfrac{10{,}2}{2{,}55} = 4$.

$S_{CC_1D_1D} = CC_1 \cdot CD = 4 \cdot 1{,}5 = 6.$

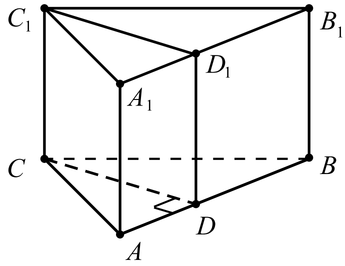


Рис. 159.

Ответ: 6.

942. Пусть ребро куба равно x (см. рис. 160). Точки N и M — середины

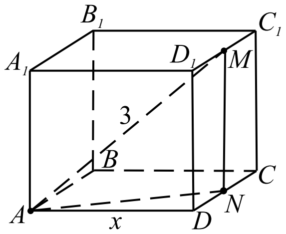


Рис. 160.

ребер DC И D_1C_1 соответственно. Тогда $AN^2 + MN^2 = AM^2$,
$\left(x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) + x^2 = 9,\ 2x^2 + \frac{x^2}{4} = 9,\ \frac{9x^2}{4} = 9,\ x = 2.$
$S = 6 \cdot x^2 = 6 \cdot 4 = 24.$

Ответ: 24.

943. По условию точки A, B и C — середины попарно скрещивающихся ребер куба. Зная это, постараемся установить вид $\triangle ABC$, для чего выполним рисунок и укажем на нем соответствующие длины сторон, применяя теорему Пифагора (см. рис. 161).

Делаем вывод: если ребро куба обозначить через a, то $AB = BC = AC = a\sqrt{1{,}5}$, следовательно, $\triangle ABC$ — равносторонний. Расстояние от точки A до прямой BC равно длине высоты AK.

Зная, что высота равностороннего треугольника h находится по формуле $h = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, где b — длина стороны, имеем $AK = \frac{a\sqrt{1{,}5}\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

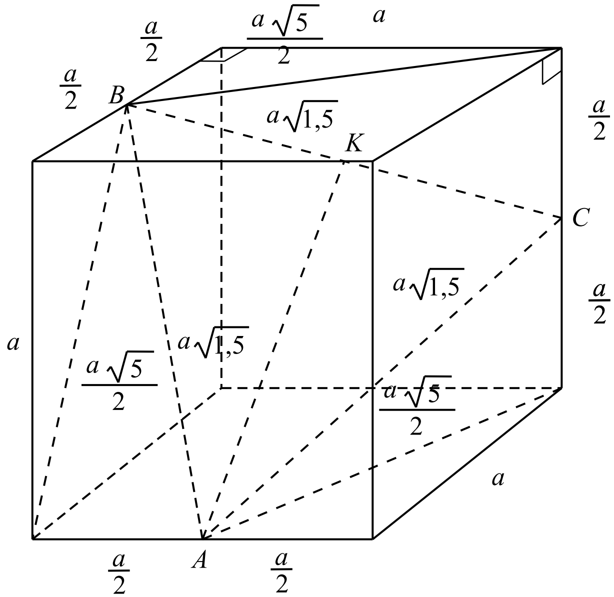


Рис. 161.

$a = 2\sqrt{2}$, $AK = \dfrac{3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{4} = 3.$

Ответ: 3.

944. Сделаем рисунок по условию задачи (см. рис. 162).

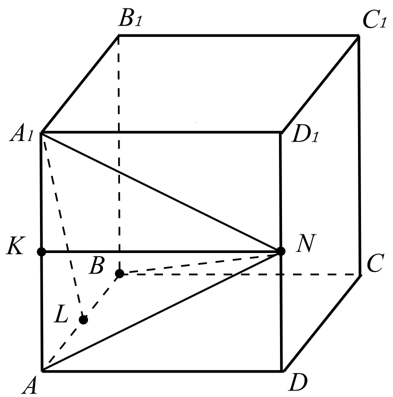


Рис. 162.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $AB = 6$, $AL = LB$, $DN = ND_1$.
Найти: V_{AA_1LN}.
Решение. 1) $A_1N = AN$ (так как $A_1D_1 = AD$, $D_1N = DN$, $\angle A_1D_1N = \angle ADN$), следовательно, $\triangle A_1AN$ — равнобедренный.

$S_{A_1AN} = \dfrac{1}{2}AA_1 \cdot NK = \dfrac{1}{2}AA_1 \cdot AD = \dfrac{1}{2}AB^2 = 18.$

2) Так как $AB \perp AA_1D$ и вершина L пирамиды AA_1LN лежит на прямой AB, а основание A_1AN пирамиды лежит в плоскости AA_1D, то $LA \perp A_1AN$. То есть LA — высота пирамиды AA_1LN, проведённая к её основанию A_1AN.

3) $LA = \dfrac{1}{2}AB = 3.$

4) $V_{AA_1LN} = \dfrac{1}{3}LA \cdot S_{A_1AN} = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot 18 = 18.$

Ответ: 18.

945. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб; $V_\text{К} = 18$;
$$\frac{AL}{LB} = \frac{BK}{KC} = \frac{CM}{MD} = \frac{DN}{NA} = \frac{A_1L_1}{L_1B_1} = \frac{B_1K_1}{K_1C_1} = \frac{C_1M_1}{M_1D_1} = \frac{D_1N_1}{N_1A_1} = \frac{1}{2}.$$
Найти: $V_{LKMNL_1K_1M_1N_1}$.
Решение. 1) Покажем, что каждое из оснований многогранника $LKMNL_1K_1M_1N_1$ является квадратом (см. рис. 163). Рассмотрим грань $ABCD$ куба (см. рис. 164).

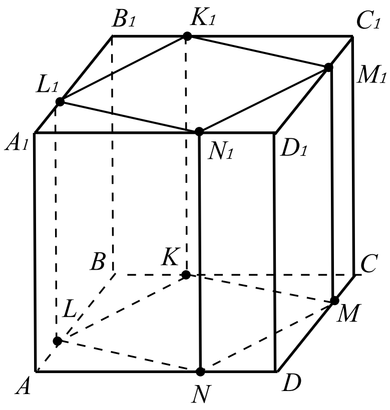


Рис. 163.

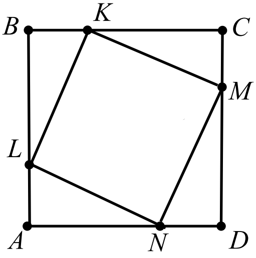


Рис. 164.

Пусть $AB = a$. Так как $AL = ND = MC = KB = \frac{a}{3}$, $BL = AN =$

$= DM = CK = \frac{2a}{3}$ и $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$, то

$\triangle ALN = \triangle DNM = \triangle CMK = \triangle BKL$;

$LN = NM = MK = LK = \sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Из $\triangle LAN$ имеем: $\angle NLA + \angle LNA = 90^\circ \Rightarrow$
$\angle KLN = 180^\circ - \angle BLK - \angle NLA = 180^\circ - \angle ANL - \angle NLA =$
$= 180^\circ - (\angle ANL + \angle NLA) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Так же можно показать, что $\angle LNM = \angle NMK = \angle MKL = 90^\circ$.

Значит, $LKMN$ — квадрат со стороной $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Аналогично получаем, $L_1K_1M_1N_1$ — квадрат со стороной $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

2) Так как $AL : LB = A_1L_1 : L_1B_1$, то $LL_1 \parallel AA_1$ и $LL_1 = a$.

Так как $AA_1B \perp ABC$ и LL_1 лежит в плоскости AA_1B, $LL_1 \perp AB$, а так как основание многогранника $LKMN$ лежит в плоскости ABC, то $LL_1 \parallel LKMN$.

Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что каждая из граней LL_1, NN_1, MM_1 и KK_1 перпендикулярна обеим основаниям многогранника и равна a.

Таким образом, $LKMNL_1K_1M_1N_1$ — прямоугольный параллелепипед (п. п.).

3) $V_{\text{п. п.}} = LL_1 \cdot S_{LKMN} = a \cdot \left(\frac{a\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{5a^3}{9}$.

Объём данного куба $V_k = a^3 = 18$.

Следовательно, $V_{\text{п. п.}} = \dfrac{5a^3}{9} = \dfrac{5 \cdot 18}{9} = 10.$

Ответ: 10.

946. Проведем $CK \perp AB$ и $OE \perp CK$ (см. рис. 165).

План решения: 1. Докажем, что OE — расстояние от точки O до плоско-

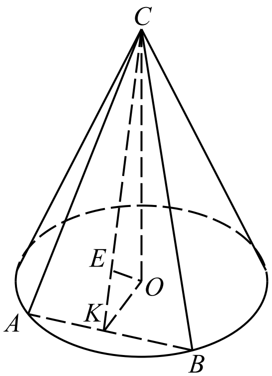


Рис. 165.

сти ABC.

2. Найдём стороны $\triangle COK$.

3. Найдём OE.

Решение: 1. $AB \perp CK$, $AB \perp OK$, значит $AB \perp COK \Rightarrow AB \perp OE$. Тогда учитывая, что $OE \perp CK$, получаем $OE \perp ABC$ по признаку перпендикулярности прямой и и плоскости. OE — искомое расстояние от точки O до плоскости ABC.

2. а) В $\triangle ABC$ $AC = BC$ как образующие, $\angle ACB = 60^\circ$ по условию $\Rightarrow$ $\triangle ABC$ равносторонний, CK — высота, $CK = \dfrac{25 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 2} = 12{,}5.$

б) В прямоугольном $\triangle COK$ $OK = \sqrt{CK^2 - OC^2} = 10.$

3. $CK \cdot OE = OC \cdot OK,\ OE = \dfrac{OC \cdot OK}{CK} = \dfrac{7{,}5 \cdot 10}{12{,}5} = 6.$

Ответ: 6.

947. Дано: конус с центром основания O и вершиной S (см. рисунок 166), $SO = 15$, $OA = OB = 25$, расстояние от точки O до плоскости SAB равно 12.

Найти: AB.

План решения:

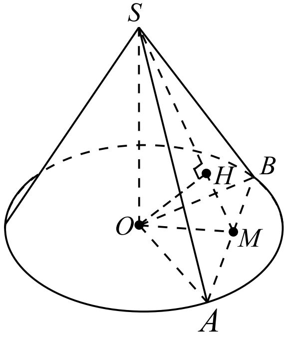


Рис. 166.

1. Опустим перпендикуляр OH на плоскость SAB и отметим середину M отрезка AB.

2. Из треугольника SOM найдем OM.

3. Из треугольника AOM найдем AM и AB.

1. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость SAB. Рассмотрим точку M, являющуюся серединой отрезка AB. Тогда $OM \perp AB$ и $SM \perp AB$ в силу равнобедренности треугольников OAB и SAB. Значит, $AB \perp$ пл. OSM. Поэтому плоскость OSM проходит через точку O перпендикулярная плоскости SAB. Следовательно, точка H лежит на отрезке SM.

2. Из прямоугольных треугольников SOH и SOM находим

$\sin\angle OSH = \dfrac{OH}{OS} = \dfrac{4}{5}$, $\cos\angle OSH = \dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\angle OSH = \dfrac{4}{3}$,
$OM = SO \cdot \operatorname{tg}\angle OSH = 20$.

3. В силу теоремы Пифагора из треугольника OAM получаем, что $AM = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$. Значит, $AB = 2AM = 30$.

Ответ: 30.

949. $S_{\text{б.п.}} = \pi rl$, где r — радиус основания конуса, l — его образующая. Так как $r = 3$ и $S_{\text{б.п.}} = 15\pi$, то $l = \dfrac{15\pi}{3\pi} = 5$. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник с основанием $2r$ и боковой стороной l (см. рис. 167). Площадь осевого сечения равна

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot 2r = \sqrt{l^2 - r^2} \cdot r = 4 \cdot 3 = 12.$$

Ответ: 12.

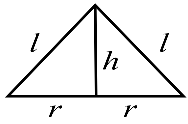


Рис. 167.

950. Объём конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус основания конуса, h — его высота. Так как $h = 12$ и $V = 100\pi$, то $r = 5$. Пусть l — образующая данного конуса, тогда $l = \sqrt{r^2 + h^2} = 13$.
$\frac{S_{\text{б.п.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{\pi r l}{\pi r^2} = \frac{l}{r} = \frac{13}{5} = 2{,}6$.

Ответ: 2,6.

951. Дано: цилиндр, OB_1— радиус основания, $OB_1 = 6$, BC — хорда, $AB = AC = 12$, $\triangle AB_1C_1$ — проекция $\triangle ABC$ на основание, $\triangle AB_1C_1$ — правильный, BMM_1B_1 — осевое сечение.

Найти: $S_{BMM_1B_1}$.

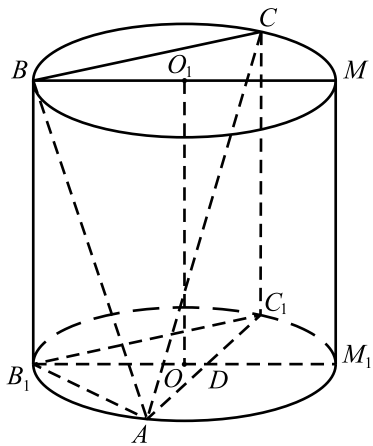


Рис. 168.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 168).

Пусть a — длина стороны $\triangle ABC$, тогда высота $B_1D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, а радиус основания цилиндра $B_1O = \frac{2}{3} \cdot B_1D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. По условию $B_1O = 6$, тогда

$\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = 6$, $a = 6\sqrt{3}$. $\triangle BB_1A$: $BB_1 = \sqrt{BA^2 - AB_1^2} =$

$= \sqrt{12^2 - \left(6\sqrt{3}\right)^2} = 6$. $S_{B_1BCM_1} = BB_1 \cdot BM = 6 \cdot 12 = 72$.

Ответ: 72.

952. Проведем $AH \perp BC$ и $HH_1 \parallel AA_1$ (см. рис. 169).

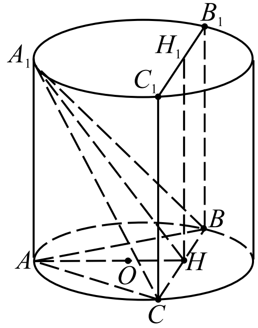


Рис. 169.

1. $AH \perp BC \Rightarrow A_1H \perp BC$ по теореме о трёх перпендикулярах. $AA_1 \perp ABC \Rightarrow AA_1 \perp BC$, $HH_1 \parallel AA_1 \Rightarrow HH_1 \perp BC$, тогда $\angle A_1HH_1$ – линейный угол между плоскостью A_1BC и плоскостью B_1BC.

$\angle AHH_1 = \angle AHA_1 + \angle A_1HH_1$, $\angle AHH_1 = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{ctg} \angle A_1HH_1 = \operatorname{tg} \angle AHA_1$.

2. По условию $\angle BAC$ острый и $\triangle ABC$ равнобедренный. $\Rightarrow$ AH — медиана к стороне BC и биссектриса $\angle BAC \Rightarrow O \in AH$, где точка O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, тогда $AH = AO + OH$.

В $\triangle BOH$ $OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} =$

$= \sqrt{(26-10)(26+10)} = \sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24$, $AH = 26 + 24 = 50$.

3. В прямоугольном $\triangle AHA_1$ $\operatorname{tg} \angle AHA_1 = \dfrac{AA_1}{AH} = \dfrac{80}{50} = 1{,}6$.

Ответ: 1,6.

953. 1. Пусть $AB = a = AC$, $AM = b$, R — радиус основания (см. рисунок 170). Тогда $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = 10b$ или $S_{ABC} = \dfrac{a^2 \cdot BC}{4R} = \dfrac{5}{26}a^2$.

Из $\triangle ABM \Rightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2$. Получим систему $\begin{cases} 10b = \dfrac{5}{26}a^2, \\ b^2 + 100 = a^2. \end{cases}$

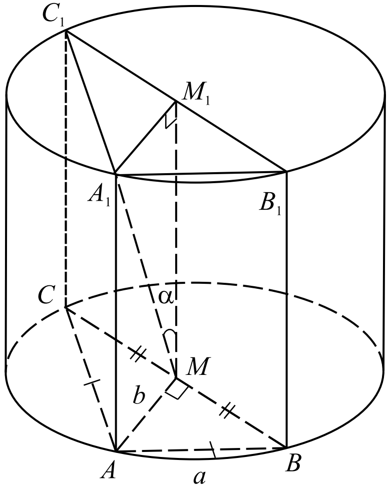


Рис. 170.

Она имеет два положительных решения $b_1 = 50$, $a_1 = \sqrt{52 \cdot 50}$ и $b_2 = 2$, $a_2 = \sqrt{52 \cdot 2}$. Так как по условию $\triangle ABC$ — тупоугольный, то $a < BC = 20$. Значит $AM = 2$.

2. Из $\triangle MM_1A_1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{A_1M_1}{MM_1} = \dfrac{2}{40} = 0{,}05$.

Ответ: 0,05.

954. 1) Четырехугольник $ADBC$ является прямоугольником, так как его диагонали AB и CD равны и точкой пересечения O делятся пополам. Следовательно, угол между прямыми A_1C и BD равен углу $\angle A_1CA$ (см. рис. 171).

2) Угол $\angle A_1CA$ найдем из прямоугольного треугольника AA_1C. Для этого вычислим сначала сторону DB. $\sin\angle BCD = \dfrac{DB}{DC}$,

$DB = DC \cdot \sin\angle BCD = 2\sqrt{30} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{10}} = 6\sqrt{3}$. Поскольку $DB = AC$, то имеем: $\operatorname{tg}\angle A_1CA = \dfrac{AA_1}{AC} = \dfrac{6}{6\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Так как $0 < \angle A_1CA < 90°$, получаем $\angle A_1CA = 30°$.

Ответ: 30.

955. 1) Четырехугольник $ADBC$ является прямоугольником, так как его диагонали AB и CD равны и точкой пересечения O делятся пополам.

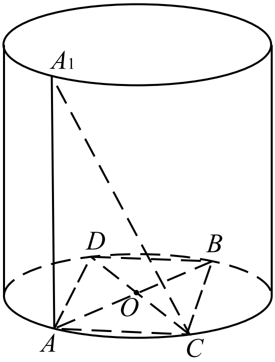


Рис. 171.

Следовательно, угол между прямыми A_1D и BC равен углу $\angle A_1DA$ (см. рис. 172).

2) Угол $\angle A_1DA$ найдем из прямоугольного треугольника AA_1D.

$\sin\angle BCD = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\angle BCD = \sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (так как $\angle BCD$ — острый).

Так как $\cos\angle BCD = \dfrac{BC}{DC}$, то $BC = DC\cdot\cos\angle BCD = 12\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$
$= 8\sqrt{3}$, а поскольку $BC = AD$, имеем: $\operatorname{tg}\angle A_1DA = \dfrac{AA_1}{AD} = \dfrac{8}{8\sqrt{3}} =$
$= \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Так как $0 < \angle A_1DA < 90^\circ$, то $\angle A_1DA = 30^\circ$.

Ответ: 30.

956. Дано: AB, CD — диаметры; $OA = 5$; $AA_1 = 4$.
Найти: тангенс угла между A_1C и BD (см. рис. 173).
$DB \parallel AC$, поэтому искомым углом будет $\angle A_1CA$. Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора $AC = 8$. $\operatorname{tg}\angle A_1CA = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

957. $AK = A_1K = \frac{1}{2}AA_1 = 6$; $CL = \frac{1}{3}C_1L = \frac{1}{4}CC_1 = 3$ (см. рис. 174); $AC = \sqrt{AO^2+OC^2} = 4$; $\angle LCA = 90^\circ \Rightarrow AL = \sqrt{AC^2+LC^2} =$
$\sqrt{16+9} = 5$. Опустим перпендикуляр KK_1 на CC_1. $\triangle KK_1L = \triangle ACL$, так как $KK_1 = AC$, $K_1L = LC$, $\angle KK_1L = \angle LCA$, значит $KL = AL = 5$.

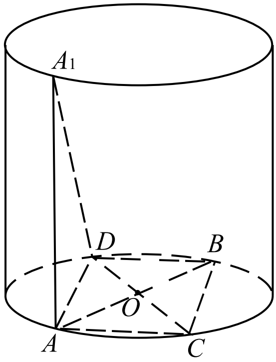


Рис. 172.

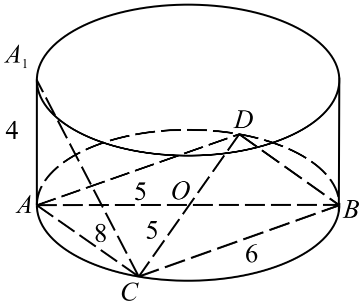


Рис. 173.

По теореме косинусов из $\triangle ALK$

$AK^2 = KL^2 + AL^2 - 2KL \cdot AL \cdot \cos\alpha$; $36 = 50 - 50\cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{7}{25}$;

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{24}{25}$.

Ответ: 0,96.

958. $AM = A_1A - A_1M = 18$; $\dfrac{C_1N}{CN} = \dfrac{5}{3}$; $C_1N = \dfrac{5}{3}CN$. $CC_1 = C_1N + CN = \dfrac{8}{3}CN = 24$, отсюда $CN = \dfrac{24}{8} \cdot 3 = 9$; $C_1N + 24 - 9 = 15$. $AC = \sqrt{AO^2 + OC^2} = 12$; $\angle NCA = 90°$ (см. рис. 175) $\Rightarrow AN = \sqrt{AC^2 + NC^2} = 15$. Опустим перпендикуляр из N на AM в точку N_1. $\triangle ANC = \triangle ANN_1$ (AN — общая, $\angle ACN = \angle AN_1N$, $\angle ANC = \angle NAN_1$), значит $AN_1 = NC = 9$.

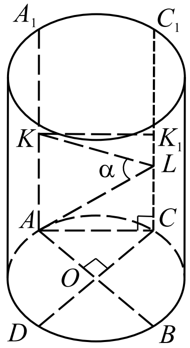


Рис. 174.

$N_1M = AM - AN_1 = 9$, $\Rightarrow MN = \sqrt{MN_1{}^2 + NN_1{}^2} = 15$.По теореме косинусов из $\triangle AMN$ $AM^2 = AN^2 + NM^2 - 2AN \cdot MN \cdot \cos\alpha$; $324 = 450 - 450\cos\alpha$, $\cos\alpha = 0{,}28$.

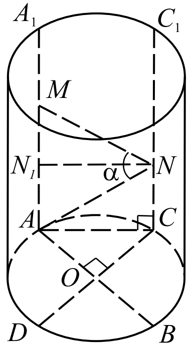


Рис. 175.

Ответ: 0,28.

960. Проведем высоты оснований призмы AD и A_1D_1 (рис. 176).

Точки E и E_1 — центры оснований. $EE_1 \parallel AA_1$, $AA_1 \perp$ пл. $ABC \Rightarrow EE_1 \perp$ пл. ABC. Точка O — середина EE_1. Так как расстояния от O до всех вершин призмы равны, то O — центр описанной около призмы сферы. Зная объем призмы и что $AA_1 = 2AC$, найдем AC. Обозначим $AC = a$. $V_{\text{пр}} = S_{ABC} \cdot AA_1$, $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $AA_1 = 2a$,

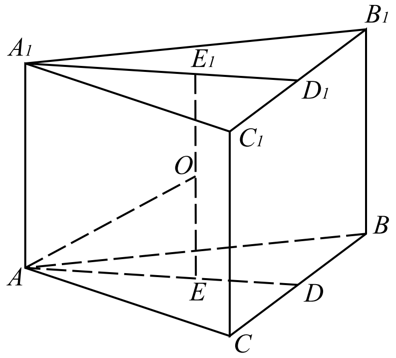


Рис. 176.

$V_{\text{пр}} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{27}{\pi}$, $a^3 = \dfrac{54}{\pi\sqrt{3}}$, $a = \sqrt[3]{\dfrac{54}{\pi\sqrt{3}}}$.

$\triangle AEO$: $AE = \dfrac{2}{3}AD$, $AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AE = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $OE = \dfrac{1}{2}EE_1$,

$EE_1 = AA_1$, $AA_1 = 2a \Rightarrow OE = a$.

$AO = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + a^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\dfrac{54}{\pi\sqrt{3}}}$.

Найдём искомый объем. $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $R = AO$, $V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{\dfrac{54}{\pi\sqrt{3}}}\right)^3 =$

$= \dfrac{4\cdot\pi\cdot 8\cdot 54}{3\cdot 3\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\sqrt{3}} = 64$.

Ответ: 64.

961. Дано: $SABC$— пирамида, $\triangle ABC$ — правильный, $AB = 12\sqrt{15}$, $\triangle BSC$ — правильный, пл. $BSC \perp$ пл. ABC, около пирамиды описана сфера.

Найти: радиус сферы R.

Решение. По условию пл. $BSC \perp$ пл. ABC (см. рис. 177), $\triangle ABC$ и $\triangle BSC$ — правильные, высоты AD и DS взаимно перпендикулярны. Точка E — центр $\triangle ABC$, точка K — центр $\triangle BSC$, $OE \parallel SD$, $OK \parallel AD$, значит, $OA = OB = OC = OS = R$, точка O — центр сферы, описанной около пирамиды, радиуса R. $\triangle ABC = \triangle BSC$, $AD = \dfrac{12\sqrt{15}\cdot\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{15}$,

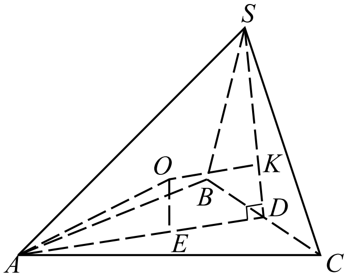


Рис. 177.

$AE = \frac{2}{3}AD$, $AE = \frac{2}{3} \cdot 18\sqrt{15} = 12\sqrt{15}$. $OE = KD = \frac{1}{3}SD$, $SD = AD$,

$SD = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{15} = 6\sqrt{15}$. $\triangle AOE$: $AO = \sqrt{AE^2 + OE^2} =$

$= \sqrt{\left(12\sqrt{15}\right)^2 + \left(6\sqrt{15}\right)^2} = \sqrt{900} = 30.$

Ответ: 30.

962. Дано: $SABC$— правильная пирамида, $\angle SAO = 45°$, $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ — призма; вершины A_1, B_1, C_1, лежат на боковых ребрах пирамиды; вершины A_2, B_2, C_2, лежат в пл. ABC; $A_1B_1B_2A_2$, $A_1C_1C_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$ — квадраты; около пирамиды описана сфера.

Найти: радиус сферы R.

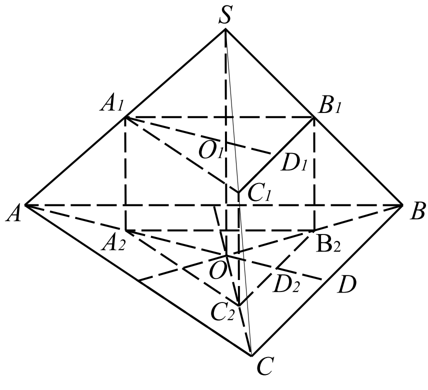


Рис. 178.

Решение. Пирамида $SABC$— правильная, SO — высота (см. рис. 178). Призма вписана в пирамиду так, что $A_1A_2 \perp$ пл. ABC, значит, $A_2 \in AD$, аналогично $C_2 \in CO$, $B_2 \in BO$, где AD — высота основания пирамиды, A_2D_2 — высота нижнего основания призмы, A_1D_1 — высота верхнего основания призмы, $A_1D_1 \parallel A_2D_2$. $\triangle AOS \sim \triangle A_1O_1S$ ($\angle S$ — общий, $\angle AOS = \angle A_1O_1S$). $\dfrac{AO}{A_1O_1} = \dfrac{SO}{SO_1}$. Найдём длины отрезков, входящих в пропорцию. Пусть a — длина ребра призмы, тогда $A_1D_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$A_1O_1 = \dfrac{2}{3}A_1D_1$,

$A_1O_1 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $SO_1 = SO - a$. По условию $\angle SAO = 45^\circ$, значит, $SO =$ $= AO = BO = CO = R$, где R — радиус сферы, описанной около пирамиды. Пропорция примет вид: $\dfrac{R\cdot\sqrt{3}}{a} = \dfrac{R}{R-a}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{a} = \dfrac{1}{R-a}$,

$R\sqrt{3} - a\sqrt{3} = a$, $R = \dfrac{a\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}}$.

По условию $a = 3 - \sqrt{3}$, $R = \dfrac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}} = 2$.

Ответ: 2.

963. Дано: $SABCD$— правильная пирамида, $\angle SAO = 45^\circ$, $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — куб; вершины A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на боковых ребрах пирамиды; вершины A_2, B_2, C_2, D_2 лежат в пл. $ABCD$.

Найти: V куба.

Решение. . Пирамида $SABCD$ — правильная, SO — высота (см. рис. 179).

1. Обозначим $AD = a$, $A_1D_1 = x$.

2. $\triangle AOS$: $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. $\dfrac{SO}{AO} = \operatorname{tg}\angle A$, $SO = AO\cdot\operatorname{tg}\angle A$,

$SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{tg}60^\circ = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

3. $V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SO$, $\dfrac{1}{3}a^2\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = 11 + \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$, $a^3 = \dfrac{\left(22+9\sqrt{6}\right)\cdot 6}{2\sqrt{6}} =$ $= \dfrac{\sqrt{6}\left(22+9\sqrt{6}\right)}{2}$. $\triangle AOS \sim \triangle A_1O_1S$ ($\angle S$ — общий, $\angle AOS = \angle A_1O_1S$).

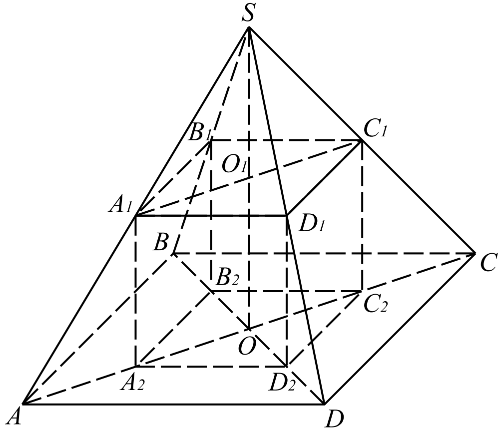


Рис. 179.

$$\frac{AO}{A_1O_1} = \frac{OS}{O_1S}\ \frac{a\sqrt{2}\cdot 2}{2\cdot x\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\left(\frac{a\sqrt{6}}{2} - x\right)},\ \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{6}}{a\sqrt{6} - 2x},$$

$$a\sqrt{6} - 2x = x\sqrt{6},\ x = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2}.$$

5. $V_{\text{к.}} = x^3$, $V_{\text{к.}} = \left(\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2}\right)^3 = \frac{a^3\cdot 6\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}+2\right)^3} =$

$$= \frac{\left(22+9\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{6}\cdot 6\sqrt{6}}{2\left(6\sqrt{6}+36+12\sqrt{6}+8\right)} = \frac{36\left(22+9\sqrt{6}\right)}{2\left(18\sqrt{6}+44\right)} = 9.$$

Ответ: 9.

964. Дано: в конус вписана правильная пирамида $SABCDEF$, $AB = \sqrt{\sqrt{3}+1}$, $V_{\text{к.}} = 4+2\sqrt{3}$.

Найти: $\angle ASF$.

Решение. По условию в конус вписана правильная пирамида, SO — высота, $SO = h$, $AF = OF = R$ (см. рис. 180).

1. $V_{\text{к.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, $h = \frac{3V}{\pi R^2}$, согласно условию $\pi = 3$, $h = \frac{V}{R^2}$, $h = \frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

2. $\triangle SOF$: $SF^2 = OF^2 + SO^2$, $SF^2 = \left(\sqrt{3}+1\right) + \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 =$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^3 + \left(4+2\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1+16+16\sqrt{3}+12}{3+2\sqrt{3}+1} =$$

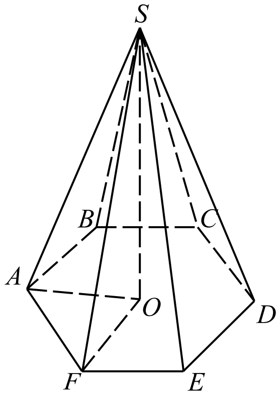


Рис. 180.

$$= \frac{22\sqrt{3}+38}{4+2\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}+19}{2+\sqrt{3}}.$$

Рассмотрим $\triangle ASF$. По теореме косинусов: $AF^2 = AS^2+FS^2-2\cdot AS\cdot FS\cdot\cos\angle S$

$$\cos\angle S = \frac{\dfrac{2\left(11\sqrt{3}+19\right)}{2+\sqrt{3}} - \left(\sqrt{3}+1\right)}{\dfrac{2\left(11\sqrt{3}+19\right)}{2+\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\left(22\sqrt{3}+39\right)-\left(2\sqrt{3}+2+3+\sqrt{3}\right)}{2\left(11\sqrt{3}+19\right)} = \frac{22\sqrt{3}+38-3\sqrt{3}-5}{2\left(11\sqrt{3}+19\right)} =$$

$$= \frac{19\sqrt{3}+33}{2\left(11\sqrt{3}+19\right)} = \frac{\sqrt{3}\left(11\sqrt{3}+19\right)}{2\left(11\sqrt{3}+19\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\angle S = \frac{\sqrt{3}}{2}. \angle ASF = 30^\circ.$$

Ответ: 30°.

965. Дано: $SABC$ — правильный тетраэдр, сфера вписана в тетраэдр, $R_{\text{сф.}} = \sqrt{6}$.

Найти: AC.

Решение. По условию тетраэдр правильный, SO —высота (см. рис. 181). Найдём SO. Пусть a — длина стороны тетраэдра. Проведем апофему SD.

$\triangle SOD$: $SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OD = \dfrac{1}{3}AD$, $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} =$

$= \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Сфера вписана в тетраэдр, EK — радиус сферы, значит, $EK \perp SD$. $\triangle SOD \sim \triangle SKE$ ($\angle S$ —

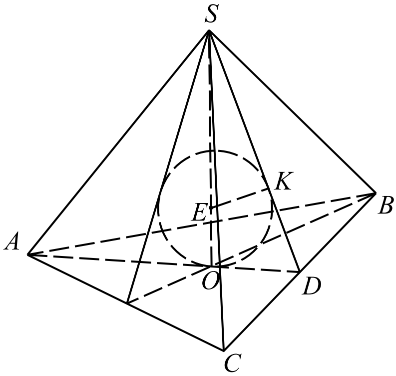


Рис. 181.

общий, $\angle SKE = \angle SOD$). $\dfrac{OD}{EK} = \dfrac{SD}{SE}$, $\dfrac{a\sqrt{3}}{6\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\cdot\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}-\sqrt{6}\right)}$,

$3\sqrt{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} - \sqrt{6}$, $a = 12$. $AC = 12$.

Ответ: 12.

966. Пусть M_1, N_1 — проекции точек M и N на нижнее основание цилиндра (см. рис. 182). Так как MN и PQ лежат в параллельных плоскостях,

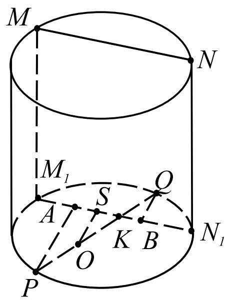


Рис. 182.

то расстояние между ними равно расстоянию между этими плоскостями, то есть высоте цилиндра $h = \sqrt{15}$. Пусть точка O — центр нижнего основания цилиндра, K — точка пересечения M_1N_1 и PQ. $PQ = 4$ как диаметр основания. Так как $\dfrac{PK}{KQ} = \dfrac{3}{1}$, то $PK = 3$, $KQ = 1 = OK$. Найдём

M_1N_1. Опустим перпендикуляр OS на M_1N_1. Из $\triangle OSK$:

$OS = OK \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$. $ON_1 = 2$ как радиус основания $\Rightarrow$ по теореме Пифагора $SN_1 = \sqrt{ON_1{}^2 - OS^2} = \sqrt{3{,}75}$. $M_1S = SN \Rightarrow$
$M_1N_1 = 2NS = \sqrt{15}$.

Пусть AP и QB — перпендикуляры к M_1N_1. Так как пл. $MNN_1 \perp$ пл.PM_1Q, то AP и QP также перпендикулярны к пл. M_1MN $\Rightarrow AP$ и QB — высоты пирамид $MNPK$ и $MNQK$ соответственно, проведенные к общему основанию MNK. Из $\triangle APK$: $AP = PK{\cdot}\sin 30^\circ = 1{,}5$. Из $\triangle QBK$: $QB = KQ \cdot \sin 30^\circ = 0{,}5$. Объем $MNPQ$ равен сумме объемов $MNPK$ и $MNQK$, то есть

$$V_{MNPQ} = V_{MNQK} + V_{MNPK} = \frac{1}{3}S_{MNK} \cdot QB + \frac{1}{3}S_{MNK} \cdot AP =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}h \cdot MN(QB + AP) = \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot 2 = 5.$$

Ответ: 5.

967. Найдём отношение $\dfrac{V_{\text{ц}}}{V_{\text{к}}} = \dfrac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = 3$,

$V_{\text{ц}} = 3V_{\text{к}},\ V_{\text{ц}} = 3 \cdot 5 = 15\,(\text{м}^3)$. (см. рис. 183.)

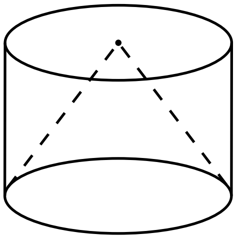


Рис. 183.

Ответ: 15.

968. Из условия следует, что радиусы оснований цилиндра и конуса совпадают. Обозначим r — радиус основания конуса, l - его образующая.

$S_{\text{п.п.ц}} = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot 10 = 2\pi(r^2 + 10r)$, $S_{\text{п.п.к}} = \pi r^2 + \pi r l$.
$S_{\text{п.п.ц}} = 2 \cdot S_{\text{п.п.к}}$, $2\pi r(r + 10) = 2\pi r(r + l)$, $r + 10 = r + l$, $l = 10$.

Ответ: 10.

969. Так как объём конуса равен объёму цилиндра, то $\dfrac{1}{3}S_{\text{осн.кон.}} \cdot h_{\text{кон.}} =$

$= S_{\text{осн.цил.}} \cdot h_{\text{цил.}}$, где $S_{\text{осн.кон.}}$, $S_{\text{осн.цил.}}$, $h_{\text{кон.}}$ и $h_{\text{цил.}}$ — площади оснований и высоты конуса и цилиндра соответственно. Тогда $S_{\text{осн.кон.}} =$
$= 3S_{\text{осн.цил.}} \cdot \dfrac{h_{\text{цил.}}}{h_{\text{кон.}}} = 3 \cdot 15 \cdot \dfrac{1}{2} = 22,5.$

Ответ: 22,5.

970. Так как радиус вписанной сферы равен радиусу основания цилиндра, то $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2 = 4S_{\text{осн}} = 4 \cdot 24 = 96$, где R, $S_{\text{сф}}$ и $S_{\text{осн}}$ — радиус вписанной сферы, площадь её поверхности и площадь основания цилиндра соответственно.

Ответ: 96.

971. Пусть $ABCD$ — осевое сечение цилиндра, тогда $AC = 2\sqrt{34}$,
$\dfrac{\pi \cdot AD^2}{4} = 9\pi,\ AD = 6,\ CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{4 \cdot 34 - 6^2} = 10.$

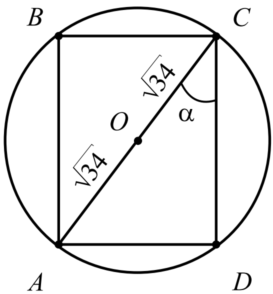


Рис. 184.

$\angle ACD = \alpha$ — угол между образующей цилиндра и диагональю его осевого сечения. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{6}{10}$.

Ответ: 0,6.

972. Пусть $ABCD$ — осевое сечение цилиндра, тогда $\dfrac{\pi \cdot AD^2}{4} = 4\pi$, $AD = 4$. $\angle ACD = \alpha$ — угол между образующей цилиндра и диагональю его осевого сечения. $AC = \dfrac{AD}{\sin\alpha} = \dfrac{4}{0{,}2} = 20 = 2r$, где r — радиус шара, $r = 10$. $S_{\text{пов.}} = 4\pi r^2 = 400\pi$; $\dfrac{S_{\text{пов.}}}{S_{\text{осн.}}} = \dfrac{400\pi}{4\pi} = 100.$

Ответ: 100.

973. Рассмотрим правильный тетраэдр $DABC$ (см. рис. 186).

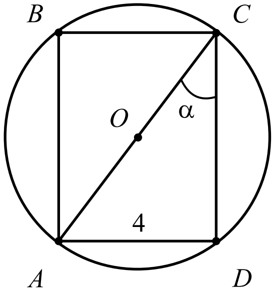


Рис. 185.

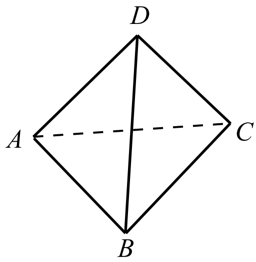


Рис. 186.

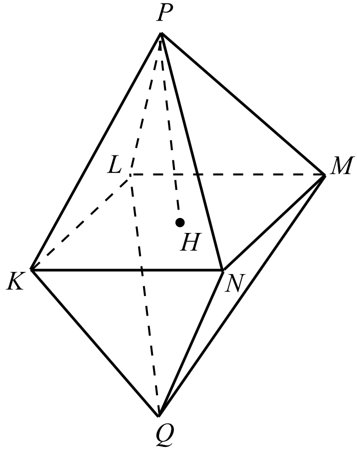


Рис. 187.

Пусть $AB = a$, тогда $BC = AC = DA = DB = DC = a$. $\triangle ABC$ — правильный, его площадь равна $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, тогда площадь поверхности тетраэдра равна
$S_{\text{п.п.}} = S_{ABC} + S_{ADB} + S_{ADC} + S_{BDC} = 4S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$. По условию $S_{\text{п.п.}} = 18$ см^2, $a^2\sqrt{3} = 18$.

Из условия следует, что каждое ребро октаэдра является средней линией грани тетраэдра, значит все рёбра октаэдра равны между собой и равны $\dfrac{a}{2}$.

Рассмотрим правильный октаэдр (см. рис. 187).

Каждая грань октаэдра — правильный треугольник со стороной $\dfrac{a}{2}$, его площадь равна $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$. У октаэдра 8 граней, поэтому площадь его поверхности равна $S = 8 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$.

Ответ: 9.

974. Объём конуса равен $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус его основания, h — высота, а образующая l вычисляется по формуле $l = \sqrt{h^2 + r^2}$.

По условию $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$, $h_2 = 2h_1$, $l_2 = 2l_1$. Так как в любом конусе выполняется
$l^2 = h^2 + r^2$, то $r_2^2 = l_2^2 - h_2^2 = (2l_1)^2 - (2h_1)^2 = 4(l_1^2 - h_1^2) = 4r_1^2$, $r_2 = 2r_1$.

Тогда имеем:
$V_2 = \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \dfrac{1}{3}\pi (2r_1)^2 2h_1 = 8\dfrac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = 8V_1 = 8 \cdot 6 = 48$.

Ответ: 48.

975. В качестве основания параллелепипеда выберем грань, содержащую одно из оснований цилиндра. Так как в эту грань вписано основание цилиндра — окружность радиуса $\sqrt[3]{2}$, то эта грань является квадратом со стороной $2\sqrt[3]{2}$. Площадь основания параллелепипеда равна $(2\sqrt[3]{2})^2$. Высота параллелепипеда равна высоте цилиндра, то есть равна $\sqrt[3]{2}$. Таким образом, объём параллелепипеда равен $(2\sqrt[3]{2})^2 \cdot \sqrt[3]{2} = 8$.

Ответ: 8.

976. ОДЗ: $y > -1$, $y \neq 0$.

$$\begin{cases} -\log_2 \dfrac{y}{x} + \log_2(y+1) = \log_2 3, \\ 2^{2x+2y} \cdot 2^{2y} - 2^{y^2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2 \dfrac{(y+1)\cdot x}{y} = \log_2 3, \\ 2^{2x+4y} = 2^{y^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(y+1)\cdot x}{y} = 3, \\ 2x+4y = y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3y}{y+1}, \\ x = \dfrac{y^2-4y}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3y}{y+1}, \\ \dfrac{3y}{y+1} = \dfrac{y^2-4y}{2}. \end{cases}$$ Решим второе уравнение системы. $\dfrac{3y}{y+1} = \dfrac{y^2-4y}{2}$, $6y = y^3 - 4y^2 + y^2 - 4y$, $y^3 - 3y^2 - 10y = 0$. Так как $y \neq 0$, разделим обе части уравнения на y. $y^2 - 3y - 10 = 0$; $y_1 = 5$, $y_2 = -2$ — не удовлетворяет условию $y > -1$. Если $y = 5$, то $x = \dfrac{5}{2}$.

Проверка:
Первое уравнение. $\log_{0,5} 2 + \log_2(5+1) = -\log_2 2 + \log_2 6 =$
$= \log_2 3$, $\log_2 3 = \log_2 3$.
Второе уравнение. $4^{7,5} \cdot 4^5 - 2^{25} = 2^{25} - 2^{25} = 0$, $0 = 0$.

Ответ: $\left(\dfrac{5}{2}; 5\right)$.

978. ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} y \cdot y^{\log_y x^2} - 4y^2 - 3y = 0, \\ \log_x(xy) = \log_y x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} yx^2 - 4y^2 - 3y = 0, \\ 1 + \log_x y = 2\log_y x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(x^2 - 4y - 3) = 0, \\ 1 + \dfrac{1}{\log_y x} = 2\log_y x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 4y - 3 = 0 \quad (*), \\ \log_y x + 1 = 2\log_y^2 x. \end{cases}$$

Решим второе уравнение. $\log_y x + 1 = 2\log_y^2 x$, $2\log_y^2 x - \log_y x - 1 = 0$.

Пусть $\log_y x = t$, $2t^2 - t - 1 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = -\dfrac{1}{2}$.

1) $\log_y x = 1$, $x = y$. Подставим $x = y$ в уравнение $(*)$. $y^2 - 4y - 3 = 0$, $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+3}$; $y_1 = 2 + \sqrt{7}$, $y_2 = 2 - \sqrt{7}$ — не удовлетворяет условию $y > 0$. $x = 2 + \sqrt{7}$, $y = 2 + \sqrt{7}$.

2) $\log_y x = -\dfrac{1}{2}$. $x = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, подставим в уравнение $(*)$. $\dfrac{1}{y} - 4y - 3 = 0$,

$1 - 4y^2 - 3y = 0,\ 4y^2 + 3y - 1 = 0;\ y_1 = -1,\ y_2 = \frac{1}{4}.\ y = -1$ не удовлетворяет условию $y > 0$. Если $y = \frac{1}{4}$, то $x = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$, $x = 2$. В области допустимых значений проведены равносильные преобразования. $(2+\sqrt{7}; 2+\sqrt{7})$; $\left(2; \frac{1}{4}\right)$ — решения системы.

Ответ: $(2+\sqrt{7}; 2+\sqrt{7})$; $\left(2; \frac{1}{4}\right)$.

979. Так как $\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x}$, то $\sqrt{25 + 9\log_{11} x} = 3\log_{11}\left(11 \cdot 11^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)$,
$\sqrt{25 + 9\log_{11} x} = 3\log_{11}\left(11^{\frac{5}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)$,
$\sqrt{25 + 9\log_{11} x} = 3\log_{11} 11^{\frac{5}{3}} + 3\log_{11} x^{\frac{1}{3}}$,
$\sqrt{25 + 9\log_{11} x} = 5 + \log_{11} x,\ \log_{11} x = t$, тогда $\sqrt{25+9t} = 5 + t$,
$25 + 9t = 25 + 10t + t^2,\ t^2 + t = 0,\ t(t+1) = 0,\ t = 0$ или $t + 1 = 0$,
$t = -1$. $\log_{11} x = 0$ или $\log_{11} x = -1,\ x = 1$ или $x = \frac{1}{11}$.
Проверка:
1) $x = 1$ не является корнем исходного уравнения, так как в данном уравнении $x = 1$ является основанием логарифма.
2) $x = \frac{1}{11}$; $\sqrt{25 + \frac{9}{\log_{\frac{1}{11}} 11}} = \sqrt{25-9} = 4.\ 3\log_{11}\left(11\sqrt[3]{121 \cdot \frac{1}{11}}\right) =$
$= 3\log_{11}\left(11 \cdot 11^{\frac{1}{3}}\right) = 3\log_{11} 11^{\frac{4}{3}} = 4,\ \ 4 = 4.\ \ x = \frac{1}{11}$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{11}$.

980. Преобразуем выражения, стоящие под знаком логарифма.
1) $x - 10 + \frac{30}{x+1} = \frac{x^2 + x - 10x - 10 + 30}{x+1} = \frac{x^2 - 9x + 20}{x+1} =$
$= \frac{(x-5)(x-4)}{x+1}$.
2) $\frac{6}{x-5} - \frac{5}{x-4} = \frac{6x - 24 - 5x + 25}{(x-5)(x-4)} = \frac{x+1}{(x-5)(x-4)} =$

$= \left(\dfrac{(x-5)(x-4)}{x+1}\right)^{-1}$. Обозначим $\dfrac{(x-5)(x-4)}{x+1} = t$, получим
$8\log_2 t = \log_2 t^{-1} + 9,\ 8\log_2 t = -\log_2 t + 9,\ \log_2 t = 1, t = 2.$
$\dfrac{(x-5)(x-4)}{x+1} = 2, x \neq -1,\ x^2 - 9x + 20 = 2x + 2,\ x^2 - 11x + 18 = 0,$
$x_1 = 2, x_2 = 9.$
Проведённые преобразования не приводят к потере корней.
Проверка:

1) $x = 2;\ 8\log_2(2-10+10) = 8,\ \log_2\left(-2 + 2\cdot\dfrac{1}{2}\right) + 9 = -1 + 9 = 8,$
$8 = 8$. $x = 2$ — корень исходного уравнения.

2) $x = 9; 8\log_2(9 - 10 + 3 = 8\log_2 2 = 8,\ \log_2\left(\dfrac{3}{2} - 1\right) + 9 = -1 + 9 = 8,$
$8 = 8$. $x = 9$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 2; 9.

982. Преобразуем выражения, стоящие под знаком логарифма.

1) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{2x+4-x+1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{x+5}{(x-1)(x+2)} =$
$= \left(\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+5}\right)^{-1}.$

2) $x - 4 + \dfrac{18}{x+5} = \dfrac{x^2+5x-4x-20+18}{x+5} = \dfrac{x^2+x-2}{x+5} =$
$= \dfrac{(x-1)(x+2)}{x+5}$. Обозначим $\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+5} = t$, тогда
$\log_2 t^{-1} + 4 = 3\log_2 t,\quad -\log_2 t + 4 = 3\log_2 t,\ 4 = 4\log_2 t,\ \log_2 t = 1,$
$t = 2.\ \dfrac{(x-1)(x+2)}{x+5} = 2,\ x \neq -5,\ (x-1)(x+2) = 2(x+5),$
$x^2 + 2x - x - 2 = 2x + 10,\ x^2 - x - 12 = 0,\ x_1 = 4,\ x_2 = -3.$
Проведённые преобразования не приводят к потере корней.
Проверка:

1) $x = 4;\ \log_2\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6}\right) + 4 = \log_2\dfrac{1}{2} + 4 = -1 + 4 = 3,\ 3 = 3$. $x = 4$ — корень исходного уравнения.

2) $x = -3; \log_2\left(\dfrac{2}{-3-1} - \dfrac{1}{-3+2}\right) + 4 = \log_2\left(-\dfrac{1}{2} + 1\right) + 4 = \log_2\dfrac{1}{2} + 4 =$
$= -1 + 4 = 3,\ \ 3 = 3.\ x = -3$ — корень исходного уравнения.

Ответ: -3; 4.

984. ОДЗ: $x > 0$. Рассмотрим второе уравнение системы.
$x^{y+1} - 3^{12} \cdot x = 0$, $x(x^y - 3^{12}) = 0$. Так как $x \neq 0$, то $x^y - 3^{12} = 0$, $x^y = 3^{12}$.
Подставим $x^y = 3^{12}$ в первое уравнение. $y^2 - \log_3 3^{12} = y$, $y^2 - y - 12 = 0$, $y_1 = 4$; $y_2 = -3$.
1) Если $y = 4$, то $x^4 = 3^{12}$; $x^4 = 27^4$; $x = \pm 27$. Так как $x > 0$, то $(27; 4)$ — решение системы.
2) Если $y = -3$, то $x^{-3} = 3^{12}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)^3 = 81^3$, $\dfrac{1}{x} = 81$, $x = \dfrac{1}{81}$. $\left(\dfrac{1}{81}; -3\right)$ — решение системы. Проверка показывает, что обе пары являются решениями системы.

Ответ: $(27; 4)$; $\left(\dfrac{1}{81}; -3\right)$.

985. $\begin{cases} 4^{(x-y)^2+x} = 4^{x+1}, \\ 5^{x+y-1} = 5^2. \end{cases}$

Если $a > 0$, $a \neq 1$, то показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$, поэтому $\begin{cases} (x-y)^2 + x = x + 1, \\ x + y - 1 = 2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 1, \\ x + y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x - y = 1, \\ x - y = -1; \end{array} \right. \\ x + y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -1, \\ x + y = 3; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2, \\ y = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

$(2; 1)$; $(1; 2)$ — искомые решения системы.

Ответ: $(2; 1)$, $(1; 2)$.

986. Обозначим $3^x = a$, $a > 0$; $2^{\frac{y}{2}} = b$, $b > 0$, тогда

$$\begin{cases} 3a^2 - 3b^2 = 231, \\ 2a - 2b = 14; \end{cases} \begin{cases} a^2 - b^2 = 77, \\ a - b = 7; \end{cases} \begin{cases} (a-b)(a+b) = 77, \\ a - b = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7(a+b) = 77, \\ a - b = 7; \end{cases} \begin{cases} a + b = 11, \\ a - b = 7; \end{cases} \begin{cases} a = 9, \\ b = 7. \end{cases}$$

Итак, $3^x = 9$, $3^x = 3^2$, $x = 2$, $2^{\frac{y}{2}} = 2$, $\dfrac{y}{2} = 1$, $y = 2$.

Преобразования равносильны. $(2; 2)$ — решение системы.

Ответ: $(2; 2)$.

987. Чтобы найти абсциссы точек пересечения графиков данных функций, достаточно решить следующее уравнение:

$\dfrac{16\cdot 12^{2x-1}-4^{2x+1}}{x^2-3x-10}=\dfrac{3^{2x-1}-1}{6-(x+1)\cdot(x-4)}$, ОДЗ: $x\neq -2$, $x\neq 5$;

$\dfrac{16\cdot 12^{2x-1}-4^{2x+1}}{x^2-3x-10}=\dfrac{3^{2x-1}-1}{10+3x-x^2}$;

$\dfrac{16\cdot 12^{2x-1}-4^{2x+1}+3^{2x-1}-1}{x^2-3x+10}=0$;

$\dfrac{4^{2x+1}\cdot 3^{2x-1}-4^{2x+1}+3^{2x-1}-1}{(x+2)\cdot(x-5)}=0$;

$4^{2x+1}\cdot 3^{2x-1}-4^{2x+1}+3^{2x-1}-1=0$;

$\left(4^{2x+1}+1\right)\cdot\left(3^{2x-1}-1\right)=0$; $\left[\begin{array}{l}4^{2x+1}+1=0,\\ 3^{2x-1}-1=0;\end{array}\right.$ $3^{2x-1}-1=0$, $3^{2x-1}=1$, $3^{2x-1}=3^0$, $2x-1=0$, $x=0{,}5$. $x=0{,}5$ удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 0,5.

989. План решения: 1. Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов. 2. Сведем уравнение к квадратному, сделав замену $t=\log_6 x$.

1. ОДЗ: $x\in(0;+\infty)$. $\log_6^2 x+6^{\log_6^2 x}-\log_6(6x^2)=x^{\log_6 x}+\log_6\left(\dfrac{x}{216}\right)$, $\log_6^2 x+\left(6^{\log_6 x}\right)^{\log_6 x}-\log_6 6-\log_6 x^2=x^{\log_6 x}+\log_6 x-\log_6 6^3$, $\log_6^2 x+x^{\log_6 x}-1-2\log_6 x=x^{\log_6 x}+\log_6 x-3$, $\log_6^2 x-3\log_6 x+2=0$.
2. Сделав замену $t=\log_6 x$, получаем уравнение $t^2-3t+2=0$, $t_1=1$, $t_2=2$. Возвращаясь к переменной x, имеем совокупность $\left[\begin{array}{l}\log_6 x=1,\\ \log_6 x=2;\end{array}\right.$ $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\in\text{ОДЗ},\\ x=36\in\text{ОДЗ};\end{array}\right.$ $\Rightarrow x_1=6$, $x_2=36$.

Ответ: $x_1=6$, $x_2=36$.

991. $\begin{cases}\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2},\\ \sin x\cdot\sin y=\dfrac{1}{4};\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\sin x+\sin y)=\dfrac{1}{2},\\ \sin x\cdot\sin y=\dfrac{1}{4};\end{cases}$

$\begin{cases}\sin x=1-\sin y,\\ (1-\sin y)\sin y=\dfrac{1}{4};\end{cases}$ $\begin{cases}\sin x=1-\sin y,\\ 2(\sin y-\dfrac{1}{2})^2=0;\end{cases}$

$\begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2},\\ \sin y=\dfrac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in Z,\\ y=(-1)^m\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi m,\ \ m\in Z.\end{cases}$

Все преобразования были равносильными.

Ответ: $\left((-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n; (-1)^m\cdot\frac{\pi}{6}+\pi m\right),\ \ n,m\in Z.$

992. $\begin{cases}\cos x+\cos y=1,\\ 4\cos x\cos y=1;\end{cases}\quad \begin{cases}\cos x=1-\cos y,\\ 4(1-\cos y)\cos y=1.\end{cases}$

Решим второе уравнение последней системы: $4(1-\cos y)\cos y=1$, $4\cos y-4\cos^2 y=1,\ \ 4\cos^2 y-4\cos y+1=0,\ \ (2\cos y-1)^2=0$ $\Rightarrow \cos y=\frac{1}{2},\ \cos x=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

Итак, $\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2},\\ \cos y=\frac{1}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z,\\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z,\\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z,\\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

$\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ \ k,n\in Z$ — решение исходной системы.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right), k,n\in Z.$

993.Сделаем замену переменной $t=-\frac{\pi}{4}\sin^2 x, t\in\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$.

$3\operatorname{tg}^2 t+2\operatorname{tg} t-1=0$, это квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} t$ имеет два корня -1 и $\frac{1}{3}$. Но при указанном промежутке изменения t, тангенс изменяется на промежутке $[-1;0]$. Так что корень $\operatorname{tg} t=\frac{1}{3}$ — посторонний.

$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\sin^2 x\right)=-1;\ -\frac{\pi}{4}\sin^2 x=-\frac{\pi}{4};\ \sin^2 x=1;\ \cos^2 x=0;\ \cos x=0,$

то есть $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

995. $\frac{3\sin^2 x - 6\sin x + 3}{\sin^2 x + 2\sin x + 1} + \frac{2 - 2\sin x}{\sin x + 1} = 1;$

$3\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)^2 - 2\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} - 1 = 0$, сделаем замену $t = \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1};$

$3t^2 - 2t - 1 = 0$, имеем два корня 1 и $-\frac{1}{3}$.

В случае $t = 1$ приходим к неверному равенству $\sin x - 1 = \sin x + 1$,

в случае $t = -\frac{1}{3}$ получаем $-3\sin x + 3 = \sin x + 1;$

$\sin x = \frac{1}{2}, x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Область

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

997. ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} \sin x \neq 0; \\ \cos x \neq 0; \end{array}\right. \Rightarrow x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

$\frac{\sin^2 2x}{\operatorname{tg} x} + \sin 2x = 3\cos x \sin 2x; \sin 2x\big(2\cos^2 x - 3\cos x + 1\big) = 0.$

1. $\sin 2x = 0$ — корни не входят в ОДЗ.

2. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0;$

а) $\cos x = 1$ — корни не входят в ОДЗ.

б) $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

998. $5\sin 6x - 5\cos 6x - 2\sin 12x + 4 = 0;$

$(5\sin 6x - 5\cos 6x) + 2(1 - \sin 12x) + 2 = 0;$

$5(\sin 6x - \cos 6x) + 2\big(\sin^2 6x + \cos^2 6x - 2\sin 6x \cos 6x\big) + 2 = 0;$

$2(\sin 6x - \cos 6x)^2 + 5(\sin 6x - \cos 6x) + 2 = 0$. Замена $\sin 6x - \cos 6x = t$, где $-\sqrt{2} \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$, приводит уравнение к виду $2t^2 + 5t + 2 = 0$; $t_1 = -2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Преобразуем разность $\sin 6x - \cos 6x$ в произведение:

$t = \sin 6x - \cos 6x = 2\sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right)$, $-2 \notin \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Имеем: $\sqrt{2}\sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$, $\sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $6x - \frac{\pi}{4} =$
$= (-1)^{k+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{(-1)^{k+1}}{6}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in Z$.

Ответ: $\frac{(-1)^{k+1}}{6}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in Z$.

999. ОДЗ: $x \neq \pi k$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $k, n \in Z$. $\frac{\cos x - 1}{\cos x} + 2\cos x = 0$;
$2\cos^2 x + \cos x - 1 =$
$= 0$; $\cos x = t$; $-1 \leqslant t \leqslant 1$; $2t^2 + t - 1 = 0$; $t_1 = -1$, решения $\cos x = -1$ — не принадлежат ОДЗ. $t_2 = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in Z$.

1001. ОДЗ: $x \neq \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$.

Учитывая, что $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, получаем уравнение
$4\sin^2 x + 3\cos^2 x = 1 - 2\cos x$, которое сводится к уравнению
$\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0$. Производим замену $\cos x = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = -1$, $t_2 = 3$, из которых только первый удовлетворяет условию $-1 \leqslant t_1 \leqslant 1$. Из равенства $\cos x = -1$ следует $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, однако эти значения x не являются допустимыми для данного исходного уравнения, поэтому исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет корней.

1004. 1) Пусть $t = x^2 + x$, тогда исходное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{4t + 15} = \frac{1}{5}, t \neq 0, t \neq -\frac{15}{4}.$$

$5(4t + 15 - 2t) = t(4t + 15)$;
$10t + 75 - 4t^2 - 15t = 0$;
$4t^2 + 5t - 75 = 0$; $t_1 = -5$, $t_2 = 3{,}75$. Оба значения удовлетворяют ОДЗ.

2) Тогда $x^2 + x = -5$ либо $x^2 + x = 3{,}75$. Первое из этих уравнений не

имеет решений. Из второго уравнения находим: $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 1{,}5$.

Ответ: $-2{,}5; 1{,}5$.

1007. Сделаем замену $t = \sqrt{2x+3},\ t \geqslant 0 \Rightarrow t^2 = 2x+3,\ x = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{3}{2}$.

$$\sqrt{\frac{t^2}{2} - \frac{3}{2} + 2 + t} + \sqrt{\frac{t^2}{2} + \frac{9}{2} + 3t} = 11\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 1)} + \sqrt{\frac{1}{2}(t^2 + 6t + 9)} = 11\sqrt{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(t+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(t+3)^2} = 11\sqrt{2},\ \sqrt{(t+1)^2} + \sqrt{(t+3)^2} = 22,$$

$|t+1| + |t+3| = 22.\ t \geqslant 0 \Rightarrow t+1 > 0,\ t+3 > 0;\ t+1+t+3 = 22,$ $2t = 18,\ t = 9.\ \sqrt{2x+3} = 9,\ 2x+3 = 81,\ 2x = 78,\ x = 39.$
Проверка: $\sqrt{41+9} + \sqrt{45+27} = \sqrt{50} + \sqrt{72} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$, $11\sqrt{2} = 11\sqrt{2},\ x = 39.$

Ответ: 39.

1008. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + \sqrt{3x-y+1} = x+y+1, \\ 3y^2 + 1{,}5x^2 = 2y; \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + \sqrt{3x-y+1} = x+y+1, \\ 2y^2 + x^2 = \dfrac{4y}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4y}{3} + \sqrt{3x-y+1} = x+y+1, \\ 2y^2 + x^2 = \dfrac{4y}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y + 3\sqrt{3x-y+1} = 3x+3y+3, \\ 2y^2 + x^2 = \dfrac{4y}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\sqrt{3x-y+1} = 3x-y+1+2, \\ 2y^2 + x^2 = \dfrac{4y}{3}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы: $3\sqrt{3x-y+1} = 3x-y+1+2$. Обозначим $\sqrt{3x-y+1} = t,\ t \geqslant 0.\ 3t = t^2+2,\ t^2 - 3t + 2 = 0;\ t_1 = 1,$ $t_2 = 2$.

1) Если $t = 1$, тогда $\begin{cases} \sqrt{3x-y+1} = 1, \\ 2y^2 + x^2 = \dfrac{4y}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-y+1 = 1, \\ 2y^2 + x^2 = \dfrac{4y}{3}; \end{cases}$

$$\begin{cases} y=3x, \\ 2\cdot 9x^2+x^2=4x; \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x, \\ 19x^2-4x=0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} y=3x, \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\dfrac{4}{19}; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{4}{19}, \\ y=\dfrac{12}{19}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Полученные пары чисел подставим в исходную систему и убедимся, что $(0;0)$, $\left(\frac{4}{19};\frac{12}{19}\right)$ — решения системы.

2) Если $t=2$, тогда $\begin{cases} \sqrt{3x-y+1}=2, \\ 2y^2+x^2=\dfrac{4y}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-y+1=4, \\ 2y^2+x^2=\dfrac{4y}{3}; \end{cases}$

$$\begin{cases} y=3x-3, \\ 2(x-3)^2+x^2=\dfrac{4\cdot 3\cdot (x-1)}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x-3, \\ 3x^2-16x+22=0. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы не имеет корней, так как $D<0$.

Ответ: $(0;0)$, $\left(\frac{4}{19};\frac{12}{19}\right)$.

1009. $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+1+8+6\sqrt{x-1}}=17$. $\sqrt{x-1}=t$, $t\geqslant 0\Rightarrow t^2=x-1$, $x=t^2+1$. $\sqrt{t^2+1+3+4t}+\sqrt{t^2+1+8+61}=17$, $\sqrt{(t+2)^2}+\sqrt{(t+3)^2}=17$, $|t+2|+|t+3|=17$. Так как $t\geqslant 0$, то $t+2>0$, $t+3>0$; $t+2+t+3=17$, $2t=12$, $t=6$. $\sqrt{x-1}=6$, $x-1=36$, $x=37$. Проверка: $\sqrt{37+3+24}+\sqrt{37+8+36}=\sqrt{64}+\sqrt{81}=8+9=17$, $17=17$, $x=37$.

Ответ: 37.

1010. $\sqrt{x+9+5\sqrt{2x-7}}+\sqrt{x+1+3\sqrt{2x-7}}=5\sqrt{2}$.

$t=\sqrt{2x-7}$, $t\geqslant 0\Rightarrow t^2=2x-7$, $x=\frac{t^2}{2}+\frac{7}{2}$.

$$\sqrt{\frac{t^2}{2}+\frac{7}{2}+9+5t}+\sqrt{\frac{t^2}{2}+\frac{7}{2}+1+3t}=5\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{(}{t}^{2}2)+5t+\frac{25}{2}}+\sqrt{\frac{t^2}{2}+\frac{9}{2}+3t}=5\sqrt{2},$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(t^2+10t+25)}+\sqrt{\frac{1}{2}(t^2+6t+9)}=5\sqrt{2},$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(t+5)^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(t+3)^2}=5\sqrt{2}$, $|t+5|+|t+3|=10$. $t\geqslant 0\Rightarrow$

$t+5>0,\ t+3>0;\ t+5+t+3=10,\ 2t+8=10,\ t=1.\ \sqrt{2x-7}=1,$ $2x-7=1,\ x=4.$
Проверка: $\sqrt{13+5}+\sqrt{5+3}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2},\ 5\sqrt{2}=5\sqrt{2}\Rightarrow x=4$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x=4$.

1011. $y=\sqrt[3]{(7+x)^2}$ и $y=\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}-\sqrt[3]{(2-x)^2}$.
$$\sqrt[3]{(7+x)^2}=\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}-\sqrt[3]{(2-x)^2}. \qquad (1)$$
$x=2$ не является корнем уравнения $\left(\sqrt[3]{81}\neq 0\right)$. Разделив обе части уравнения (1) на $\sqrt[3]{(2-x)^2}$, получим равносильное уравнение:
$\left(\sqrt[3]{\dfrac{7+x}{2-x}}\right)^2=\sqrt[3]{\dfrac{7+x}{2-x}}-1$. Пусть $\sqrt[3]{\dfrac{7+x}{2-x}}=t$, тогда $t^2-t+1=0$.
$D<0$, поэтому уравнение корней не имеет, уравнение (1) тоже не будет иметь корней. Следовательно, графики данных функций не имеют точек пересечения.

Ответ: точек пересечения нет.

1012. *Решение.* ОДЗ: $x,y\in R$. Перепишем систему в виде:
$$\begin{cases}\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{y+1}=3,\\ \sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)(y+1)}+\sqrt[3]{(y+1)^2}=3.\end{cases}$$
$\sqrt[3]{x-1}=t,\ \sqrt[3]{y+1}=h.$
$$\begin{cases}t+h=3,\\ t^2-th+h^2=3;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+h=3,\\ (t+h)\left(t^2-th+h^2\right)=9;\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}t+h=3,\\ t^3+h^3=9.\end{cases}$$
Из первого уравнения $t=3-h$. Подставляем $t=3-h$ во второе уравнение.

$(3-h)^3+h^3=9,\quad 27-27h+9h^2-h^3+h^3=9,$

$9h^2-27h+18=0,\quad h^2-3h+2=0,\quad h_1=1,\ \ h_2=2.$

$t_1=3-1=2, t_2=3-2=1.$

1) $h_1=1, t_1=2.$ $\begin{cases}\sqrt[3]{x-1}=2,\\ \sqrt[3]{y+1}=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x-1=8,\\ y+1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=9,\\ y_1=0;\end{cases}$

2) $h_1=2, t_1=1.$ $\begin{cases}\sqrt[3]{x-1}=1,\\ \sqrt[3]{y+1}=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x-1=1,\\ y+1=8;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=7;\end{cases}$

Все преобразования были равносильными $\Rightarrow$ проверка не обязательна.

Ответ: $(9;0),\ (2;7)$.

1014.*Решение.* ОДЗ: $\begin{cases}x-3\geqslant 0,\\ x+5\geqslant 5;\end{cases}\Rightarrow x\geqslant 3$. Возведем в квадрат обе

части уравнения:
$x+5-2\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{x-3}+x-3=|2x-4|$, $x+1-\sqrt{(x+5)(x-3)}=|x-2|$.

Так как, учитывая ОДЗ, $x\geqslant 3$, то:
$x+1-\sqrt{(x+5)(x-3)}=x-2$;
$3=\sqrt{(x+5)(x-3)}$;
$9=(x+5)(x-3)$;
$9=x^2+2x-15$; $x_1=-6$, $x_2=4$. $x_1=-6$ — не входит в ОДЗ, значит $x_2=4$ — единственный корень уравнения.

Ответ: $x=4$.

1018. $\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=2\sqrt{(\cos 4x-1)^2}$;

$\dfrac{4}{\sin^2 2x}=2\sqrt{(-2\sin^2 2x)^2}$; $\dfrac{4}{\sin^2 2x}=4\sin^2 2x$; $\sin^4 2x=1$; $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

1019.Так как по определению квадратного корня он не отрицателен, то правая часть уравнения также должна быть неотрицательна, то есть $\operatorname{tg}(\ln(1-x^2))-1\geqslant 0$. С другой стороны, выражение под корнем должно быть неотрицательным, то есть $1-\operatorname{tg}(\ln(1-x^2))\geqslant 0$. Из этих неравенств $\Rightarrow$ исходное уравнение равносильно уравнению

$\operatorname{tg}(\ln(1-x^2))=1\Leftrightarrow \ln(1-x^2)=\dfrac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z\Leftrightarrow$

$1-x^2=e^{\pi\cdot(1+4k)/4}$,
$x^2=1-e^{\pi\cdot(1+4k)/4}$, $k\in Z$. При $k\geqslant 0$, $1-e^{\pi\cdot(1+4k)/4}<0$, уравнение $x^2=1-e^{\pi\cdot(1+4k)/4}$ не имеет корней; при $k<0$, $x=\pm\sqrt{1-e^{\pi\cdot(1+4k)/4}}$.

Ответ: $\pm\sqrt{1-e^{\pi\cdot(1+4k)/4}}$, где $k\in Z$,$k<0$.

1020. Найдём область допустимых значений переменной x: $2x-x^2\geqslant 0$, $x(x-2)\leqslant 0$, $x\in[0;2]$. При $0\leqslant x\leqslant 2$ имеем: $-1\leqslant x-1\leqslant 1$, $|x-1|\leqslant 1$, $\ln|x-1|\leqslant 0$. Но квадратный корень в левой части уравнения неотрицателен, по определению, поэтому равенство левой и правой части уравнения может достигаться лишь при $\ln|x-1|=0$, $x_1=0$, $x_2=2$ (проверка показывает, что $x_1=0, x_2=2$ являются корнями).

Ответ: $0;2$.

1021. Рассмотрим два случая.

1) $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geqslant 0$,

$\sin 6x = 2\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-1$, $\sin 6x = 2(\sin 3x+\cos 3x)-1$,

$\sin 6x + 1 = 2(\sin 3x + \cos 3x)$, $(\sin 3x+\cos 3x)^2 - 2(\sin 3x+\cos 3x) = 0$,

$(\sin 3x+\cos 3x)(\sin 3x+\cos 3x-2)=0$, $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 3x+\cos 3x=0,\\ \sin 3x+\cos 3x-2=0,\end{array}\right.\\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0;\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} 3x=-1,\\ \sin 3x+\cos 3x=2,\end{array}\right.\\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}3x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z,\\ \text{корней нет},\end{array}\right.\\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0;\end{cases}$

$\begin{cases}3x+\frac{\pi}{4}=\pi n, n\in Z,\\ \sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0;\end{cases}$ $3x+\frac{\pi}{4}=\pi n, n\in Z$; $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z.$

2) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)<0$,

$\sin 6x+1=-2(\sin 3x+\cos 3x)$, $(\sin 3x+\cos 3x)(\sin 3x+\cos 3x+2)=0$,

$\begin{cases}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)<0,\\ \left[\begin{array}{l}\sin 3x+\cos 3x=0,\\ \sin 3x+\cos 3x+2=0;\end{array}\right.\end{cases}$ система не имеет решений.

Ответ: $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z.$

1022. $\sin 10x = \sqrt{3}\left|\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\right|-1.$

Рассмотрим 2 случая:

1. $\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0$, $\sin 10x+1=\sqrt{3}\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$,

$(\sin 5x+\cos 5x)^2-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\sin 5x+\cos 5x)=0.$

$(\sin 5x+\cos 5x)(\sin 5x+\cos 5x-\sqrt{1{,}5})=0.$

а) $\begin{cases}\sin 5x+\cos 5x=0,\\ \cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}\operatorname{tg} 5x=-1,\ (\cos 5x\neq 0),\\ \cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 0;\end{cases}$

$$\begin{cases} 5x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0; \end{cases}$$

$5x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z,\ x = -\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi k}{5}, k \in Z.$

б) $\begin{cases} \sin 5x + \cos 5x - \sqrt{1{,}5} = 0, \\ \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \sqrt{1{,}5} = 0, \\ \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0; \end{cases} \quad 5x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z,$$

$x = \dfrac{\pi}{20} \pm \dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2\pi k}{5}, k \in Z.$

2. $\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0,\ \sin 10x + 1 = -\sqrt{3}\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right),$
$\left(\sin 5x + \cos 5x\right)\left(\sin 5x + \cos 5x + \sqrt{1{,}5}\right) = 0.$

а) $\begin{cases} \sin 5x + \cos 5x = 0, \\ \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0; \end{cases}$ — решений нет;

б) $\begin{cases} \sin 5x + \cos 5x + \sqrt{1{,}5} = 0, \\ \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2}\cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sqrt{1{,}5} = 0, \\ \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right) < 0; \end{cases} \quad 5x - \dfrac{\pi}{4} = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

$x = \dfrac{\pi}{20} \pm \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{5}, k \in Z.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi k}{5}, \dfrac{\pi}{20} \pm \dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2\pi k}{5}, \dfrac{\pi}{20} \pm \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi k}{5}, k \in Z.$

1023. $\sqrt{(2\cos 2x - 5)^2} + |3\cos 2x - 4| = 9;$
$|2\cos 2x - 5| + |3\cos 2x - 4| = 9.$

Так как $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$, то $2\cos 2x - 5 < 0$ и $3\cos 2x - 4 < 0$, значит $(5-2\cos 2x)+(4-3\cos 2x) = 9$; $9-5\cos 2x = 9$; $5\cos 2x = 0$; $\cos 2x = 0$; $2x = \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. Выберем значения $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: $n = -2$; $x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; $n = -1$; $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; $n = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; $n = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; $n = 2$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$.

1024. $|7^x - 14| + \sqrt{(7^x - 5)(7^x + 49)} = 14 - 7^x$.
1) Если $14 - 7^x < 0$, то уравнение не имеет корней, так как левая часть неотрицательна.
2) Если $14 - 7^x > 0$, то $14 - 7^x + \sqrt{(7^x - 5)(7^x + 49)} = 14 - 7^x$, $\sqrt{(7^x - 5)(7^x + 49)} = 0$, $(7^x - 5)(7^x + 49) = 0$, так как $7^x + 49 > 0$ при всех $x \in R$, то $7^x = 5$, $x = \log_7 5$. Проверка показала, что $x = \log_7 5$ — корень данного уравнения.

Ответ: $\log_7 5$.

1025. $\sqrt{(3^x - 9)^2} + \sqrt{(3^x + 9)(3^x - 5)} = 9 - 3^x$;
$|3^x - 9| + \sqrt{(3^x + 9)(3^x - 5)} = 9 - 3^x$.
1) Пусть $9-3^x < 0$, тогда уравнение не имеет корней, так как правая часть принимает отрицательные значения.
2) Пусть $9 - 3^x \geqslant 0$, тогда $9 - 3^x + \sqrt{(3^x + 9)(3^x - 5)} = 9 - 3^x$, $\sqrt{(3^x + 9)(3^x - 5)} = 0$, $(3^x+9)(3^x-5) = 0$, так как $3^x+9 > 0$ при любых $x \in R$, то $3^x-5 = 0$, $3^x = 5$, $x = \log_3 5$. Проверка показала, что $x = \log_3 5$ является корнем данного уравнения.

Ответ: $\log_3 5$.

1027. Поскольку $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geqslant 1$, то $\log_4(x^2 - 2x + 2) \geqslant 0$. А поскольку $\frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} < 1$, то $\log_{0,4} \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$. Следовательно, данное уравнение не имеет решений, так как его левая часть положительна при всех значения x.

Ответ: решений нет.

1028. Решение задачи сводится к решению уравнения
$\sqrt{(2 - 2^x)^2} + \log_x x + 2^{2x} - 8 = 0$, $|2 - 2^x| + \log_x x + 2^{2x} - 8 = 0$. ОДЗ:

$x > 0, x \neq 1$.
$|2-2^x| + 1 + 2^{2x} - 8 = 0, 2^{2x} + |2-2^x| - 7 = 0$.
1. $0 < x < 1$; $|2-2^x| = 2-2^x$; $2^{2x} + 2 - 2^x - 7 = 0 \quad (1)$, $2^{2x} - 2^x - 5 = 0$.
Замена: $2^x = t$, $1 < t < 2$; $t^2 - t - 5 = 0$, $t_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{5{,}25}$.
Оба числа не удовлетворяют условию $1 < t < 2$, значит уравнение (1) не имеет корней на промежутке $0 < x < 1$.
2. $x > 1$; $|2-2^x| = 2^x - 2$; $2^{2x} + 2^x - 2 - 7 = 0 \quad (2)$, $2^{2x} + 2^x - 9 = 0$.
Замена: $2^x = t$, $t > 2$; $t^2 + t - 9 = 0$, $t_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$;
$t = \dfrac{-1-\sqrt{37}}{2}$ не удовлетворяет условию $t > 2$, $t = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}$.
Вернёмся к замене: $2^x = \dfrac{-1+\sqrt{37}}{2}$, $2^{x+1} = \sqrt{37} - 1$,
$x+1 = \log_2\left(\sqrt{37}-1\right)$, $x = \log_2\left(\sqrt{37}-1\right) - 1$ является корнем уравнения (2) на промежутке $x > 1$.

Ответ: $\log_2\left(\sqrt{37}-1\right) - 1$.

1030. Рассмотрим первое уравнение системы: $5^{3x+4y} - 25^{2x-3y} = 0$, $5^{3x+4y} == 5^{4x-6y}$, $3x + 4y = 4x - 6y$, $x = 10y$. Итак, имеем систему

$$\begin{cases} x = 10y, \\ \sqrt{12-20y+19y} + \sqrt{10y-9y+2} = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10y, \\ \sqrt{12-y} + \sqrt{y+2} = 5. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:
$\sqrt{12-y} + \sqrt{y+2} = 5 \qquad (1)$,
$\left(\sqrt{12-y}\right)^2 = \left(5-\sqrt{y+2}\right)^2$, $12 - y = 25 - 10\sqrt{y+2} + y + 2$,
$\left(10\sqrt{y+2}\right)^2 = (2y+15)^2$, $100y + 200 = 4y^2 + 60y + 225$,
$4y^2 - 40y + 25 = 0$; $y_{1,2} = \dfrac{20 \pm \sqrt{400-100}}{4}$, $y_{1,2} = \dfrac{10 \pm 5\sqrt{3}}{2}$. Оба корня удовлетворяют уравнению (1). Тогда $x_{1,2} = 50 \pm 25\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(50 \pm 25\sqrt{3};\ \dfrac{10 \pm 5\sqrt{3}}{2}\right)$.

1031. $\left(5-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\pi \cdot 3^x\right) + 1\right) = 0$, $\dfrac{\cos\left(\pi \cdot 3^x\right) + 1}{\sqrt{5-x^2}} = 0$.

ОДЗ: $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$. $\begin{cases} \cos\left(\pi \cdot 3^x\right) + 1 = 0, \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\pi \cdot 3^x\right) = -1, \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}; \end{cases}$

$\begin{cases} \pi\cdot 3^x = \pi + \pi k,\ k \in Z, \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^x = 1 + k,\ k \in Z, \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}. \end{cases}$ Уравнение может иметь целые корни, если $1 + k$ является целой степенью числа 3.

$k = 0,\ 3^x = 1,\ 3^x = 3^0,\ x = 0,\ 0 \in \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right);$

$k = 2,\ 3^x = 3,\ 3^x = 3^1,\ x = 1,\ 1 \in \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right);$

$k = 8,\ 3^x = 9,\ 3^x = 3^2,\ x = 2,\ 2 \in \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right);$

$k = 26,\ 3^x = 27,\ 3^x = 3^3,\ x = 3,\ 3 \notin \left(-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right).$

Ответ: 0, 1, 2.

1032. $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot 3^x\right)}{\sqrt{9 - x^2}} = 0.$ ОДЗ: $-3 < x < 3.$ $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot 3^x\right) = 0, \\ -3 < x < 3; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\cdot 3^x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z, \\ -3 < x < 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^x = 1 + 2k,\ k \in Z, \\ -3 < x < 3. \end{cases}$

$k = 0,\ 3^x = 1,\ 3^x = 3^0,\ x = 0,\ 0 \in (-3; 3);$

$k = 1,\ 3^x = 3,\ 3^x = 3^1,\ x = 1,\ 1 \in (-3; 3);$

$k = 4,\ 3^x = 9,\ 3^x = 3^2,\ x = 2,\ 2 \in (-3; 3);$

$k = 13,\ 3^x = 27,\ 3^x = 3^3,\ x = 3,\ 3 \notin (-3; 3).$

Ответ: 0, 1, 2.

1033. Рассмотрим первое уравнение. $\begin{cases} 13x + 10 > 0, \\ 13x + 10 \neq 1; \end{cases}$

$4-2x-y = \sqrt{8(2 - y - 2x)},\ 4-(2x+y) = \sqrt{8\bigl(2 - (y + 2x)\bigr)}.\ 2x+y = t \Rightarrow$ $4-t = \sqrt{8(2 - t)},\ 16-8t+t^2 = 8(2-t),\ 16-8t+t^2 = 16-8t,\ t^2 = 0,\ t = 0.$ $2x+y = 0,\ y = -2x$. При $2x+y = 0$ выражения, стоящие под знаком логарифма, положительны. Итак, $\begin{cases} y = -2x, \\ \operatorname{ctg}(5y + 3x - 7)\operatorname{tg}(2 + 4x - y) = 1. \end{cases}$ Рассмотрим второе уравнение системы. Заметим, что $\operatorname{tg}(2 + 4x - y) \neq 0,$ $\operatorname{ctg}(5y + 3x - 7) \neq 0.$ $\operatorname{ctg}(-7x - 7)\operatorname{tg}(6x + 2) = 1,$

$\operatorname{tg}(6x + 2) = -\dfrac{1}{\operatorname{ctg}(7x + 7)},\ \operatorname{tg}(6x + 2) + \operatorname{tg}(7x + 7) = 0,$

$\dfrac{\sin(6x + 2 + 7x + 7)}{\cos(6x + 2)\cos(7x + 7)} = 0,\ \sin(13x + 9) = 0,\ 13x + 9 = \pi k, k \in Z,$

$13x = \pi k - 9,\ k \in Z,\ x = -\dfrac{9}{13} + \dfrac{\pi k}{13},\ k \in Z,\ y = \dfrac{18}{13} - \dfrac{2\pi k}{13},$ $k \in Z$. Найдём целые k, удовлетворяющие условию $\begin{cases} 13x + 10 > 0, \\ 13x + 10 \neq 1; \end{cases}$

$\begin{cases} -9+\pi k+10>0, \\ -9+\pi k+10\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} k>-\dfrac{1}{\pi}, \\ \pi k\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} k>-\dfrac{1}{\pi}, \\ k\neq 0; \end{cases}$ $k\geqslant 1.$

$\left(-\dfrac{9}{13}+\dfrac{\pi k}{13}; \dfrac{18}{13}-\dfrac{2\pi k}{13}\right),\ k\in Z, k\geqslant 1.$

Ответ: $\left(-\dfrac{9}{13}+\dfrac{\pi k}{13}; \dfrac{18}{13}-\dfrac{2\pi k}{13}\right),\ k\in Z, k\geqslant 1.$

1034. Преобразуем первое уравнение:
$2^{3y-x+3}(1+2)=6,\ 2^{3y-x+3}=2,\ 3y-x+3=1,\ 3y-x+2=0,\ x=3y+2.$
Преобразуем второе уравнение: $\sqrt{3y+2-8y+3}=6y+4-y+1,$
$\sqrt{5-5y}=5y+5. \quad (1)$
$5-5y=25y^2+50y+25,\ 25y^2+55y+20=0,\ 5y^2+11y+4=0;$
$y_{1,2}=\dfrac{-11\pm\sqrt{121-80}}{10}=\dfrac{-11\pm\sqrt{41}}{10},\ y_1=\dfrac{-11+\sqrt{41}}{10},$

$y_2=\dfrac{-11-\sqrt{41}}{10}$ — посторонний корень, так как правая часть уравнения

(1) при $y=\dfrac{-11-\sqrt{41}}{10}$ принимает отрицательные значения.

Если $y=\dfrac{-11+\sqrt{41}}{10}$, то $x=\dfrac{-33+3\sqrt{41}}{10}+2=\dfrac{-13+3\sqrt{41}}{10}.$

Ответ: $\left(\dfrac{-13+3\sqrt{41}}{10}; \dfrac{-11+\sqrt{41}}{10}\right).$

1035. ОДЗ: $\begin{cases} y+3\geqslant 0, \\ 5-x\leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y\geqslant -3, \\ x\leqslant 5. \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{2^{y+2x}}{2}+\dfrac{4^{y+2x}}{4}=6, \\ \sqrt{y+3}=1+\sqrt{5-x}; \end{cases}$ $\begin{cases} 2\cdot 2^{y+2x}+\left(2^{y+2x}\right)^2=24, \\ \sqrt{y+3}=1+\sqrt{5-x}. \end{cases}$ Рассмотрим
первое уравнение: $2^{y+2x}=t,\ t>0,\ 2t+t^2=24,\ t^2+2t-24=0;$
$t_1=-6$ не удовлетворяет условию $t>0,\ t_2=4.\ 2^{y+2x}=4,\ 2^{y+2x}=2^2,$
$y+2x=2$. Итак, имеем систему: $\begin{cases} y+2x=2, \\ \sqrt{y+3}=1+\sqrt{5-x}; \end{cases}$

$\begin{cases} y=2-2x, \\ \sqrt{2-2x+3}=1+\sqrt{5-x}. \end{cases}$ Решим второе уравнение системы:
$\sqrt{5-2x}=1+\sqrt{5-x},\ \left(\sqrt{5-2x}\right)^2=\left(1+\sqrt{5-x}\right)^2,$
$5-2x=1+2\sqrt{5-x}+5-x,\ -x-1=2\sqrt{5-x}, \quad (2)$
$(-x-1)^2=\left(2\sqrt{5-x}\right)^2,\ x^2+2x+1=4(5-x),\ x^2+2x+1=20-4x,$

$x^2+6x-19=0$; $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9+19}$, $x_1=-3+2\sqrt{7}$, $x_2=-3-2\sqrt{7}$. $x_1=-3+2\sqrt{7}$ не удовлетворяет уравнению (2). Если $x=-3-2\sqrt{7}$, то $y=8+4\sqrt{7}$. $\left(-3-2\sqrt{7};8+4\sqrt{7}\right)$ — решение системы.

Ответ: $\left(-3-2\sqrt{7};8+4\sqrt{7}\right)$.

1036. ОДЗ: $\begin{cases} y\geqslant 0, \\ x-2\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} y\geqslant 0, \\ x\geqslant 2. \end{cases}$

$\begin{cases} \left(3^2\right)^{3x-2y}-3^{3x-2y}-6=0, \\ \sqrt{y}-\sqrt{x-2}=1. \end{cases}$ Рассмотрим первое уравнение:

$3^{3x-2y}=t$, $t>0$, $t^2-t-6=0$; $t_1=-2$ не удовлетворяет условию $t>0$, $t_2=3$. $3^{3x-2y}=3$, $3x-2y=1$. Итак, имеем систему $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ \sqrt{y}=1+\sqrt{x-2}; \end{cases}$ $\begin{cases} y=\dfrac{3x-1}{2}, \\ \sqrt{1{,}5x-0{,}5}=1+\sqrt{x-2}. \end{cases}$ Решим второе уравнение системы:

$\sqrt{1{,}5x-0{,}5}=1+\sqrt{x-2}$, (1)

$\left(\sqrt{1{,}5x-0{,}5}\right)^2=\left(1+\sqrt{x-2}\right)^2$, $1{,}5x-0{,}5=1+2\sqrt{x-2}+x-2$, $0{,}5x+0{,}5=2\sqrt{x-2}$, $(x+1)^2=\left(4\sqrt{x-2}\right)^2$, $x^2+2x+1=16(x-2)$, $x^2-14x+33=0$, $x_1=11$, $x_2=3$. Оба числа удовлетворяют уравнению (1). Если $x=11$, то $y=\dfrac{33-1}{2}=16$. Если $x=3$, то $y=\dfrac{9-1}{2}=4$. Полученные значения x и y входят в ОДЗ. $(11;16)$ и $(3;4)$ — решения системы.

Ответ: $(3;4)$, $(11;16)$.

1037. ОДЗ: $x>0$, $y>-2$. Рассмотрим первое уравнение системы: $\lg(2+y)+2\lg 2=\lg 2x$, $\lg(8+4y)=\lg 2x$, $8+4y=2x$. Система примет вид: $\begin{cases} x=4+2y, \\ \sqrt{y^2+2}=4+2y+y-4; \end{cases}$

$\begin{cases} x=4+2y, \\ \sqrt{y^2+2}=3y. \end{cases}$ Решим второе уравнение: $\sqrt{y^2+2}=3y$, (1)

$y^2+2=9y^2$, $y^2=\dfrac{1}{4}$, $y_1=\dfrac{1}{2}$, $y_2=-\dfrac{1}{2}$. Из чисел $-\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{2}$ корнем уравнения (1) является число $\dfrac{1}{2}$. Если $y=\dfrac{1}{2}$, то $x=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)+4=5$.

$\left(5; \dfrac{1}{2}\right)$ — решение данной системы уравнений.

Ответ: $\left(5; \dfrac{1}{2}\right)$.

1039. ОДЗ: $x - 3y > 3$. Рассмотрим второе уравнение системы: $\dfrac{2^{x-3y}}{4} + \dfrac{16}{2^{x-3y}} = 5$. Замена: $2^{x-3y} = t, t > 0$. $\dfrac{t}{4} + \dfrac{16}{t} = 5$, $t^2 - 20t + 64 = 0$; $t_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64}$, $t_1 = 16$, $t_2 = 4$. Вернемся к замене: а) $2^{x-3y} = 16$, $x - 3y = 4$; б) $2^{x-3y} = 4$, $x - 3y = 2$ — не входит в ОДЗ. Система примет вид: $\begin{cases} x - 3y = 4, \\ \sqrt{7y - 4x + 2} = x - 3y - 3; \end{cases}$ $x = 4 + 3y$, $\sqrt{7y - 16 - 12y + 2} = 4 - 3$, $\sqrt{-5y - 14} = 1$, $-5y - 14 = 1$, $-5y = 15$, $y = -3$. Если $y = -3$, то $x = 4 - 3 \cdot 3 = -5$. $(-5; -3)$ — решение данной системы.

Ответ: $(-5; -3)$.

1040. Преобразуем уравнения системы:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^{3x-2y} + 2^{y-2x} = 16, \\ \sqrt{2^{x-y} + 4} + 2^{y-2x} = 2 \cdot 2^{3x-2y} + 6. \end{cases}$$

Заметим, что $x - y = (3x - 2y) + (y - 2x)$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^{3x-2y} + 2^{y-2x} = 16, \\ \sqrt{2^{3x-2y} \cdot 2^{y-2x} + 4} + 2^{y-2x} = 2 \cdot 2^{3x-2y} + 6. \end{cases}$$

Замена: $2^{3x-2y} = a$, $a > 0$, $2^{y-2x} = b$, $b > 0$. $\begin{cases} 2a + b = 16, \\ \sqrt{ab + 4} + b = 2a + 6. \end{cases}$ Выразим b из первого уравнения последней системы $b = 16 - 2a$ и подставим во второе уравнение.

$\sqrt{a(16 - 2a) + 4} + 16 - 2a = 2a + 6$, $\sqrt{a(16 - 2a) + 4} = 4a - 10$,

$\begin{cases} a(16 - 2a) + 4 = (4a - 10)^2, \\ 4a - 10 \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 16a - 2a^2 + 4 = 16a^2 - 80a + 100, \\ a \geqslant 2{,}5. \end{cases}$

Решим первое уравнение последней системы: $18a^2 - 96a + 96 = 0$, $3a^2 - 16a + 16 = 0$; $a_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{3}$, $a_1 = 4$, $a_2 = \dfrac{4}{3}$ — не удовлетворяет условию $a \geqslant 2{,}5$. Если $a = 4$, то $b = 16 - 2 \cdot 4 = 8$. Вернемся к замене: $\begin{cases} 2^{3x-2y} = 4, \\ 2^{y-2x} = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 2y = 2, \\ y - 2x = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 3 + 2x, \\ 3x - 6 - 4x = 2; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3 + 2x, \\ x = -8; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -13, \\ x = -8. \end{cases}$

Ответ: $(-8; -13)$.

1042. ОДЗ: $2 - x^2 \geqslant 0$, $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

Преобразуем правую часть уравнения:

$\log_{\sqrt{2}}\left(\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2+x^2\right)=\log_{\sqrt{2}}(2-x^2+x^2)=2$. Таким образом, уравнение имеет вид: $\dfrac{1}{27^x}-\dfrac{4}{9^x}+\dfrac{5}{3^x}-2=0$.

Пусть $\dfrac{1}{3^x}=t$, $t>0$, тогда $t^3-4t^2+5t-2=0$, $(t-1)(t^2-3t+2)$, $(t-1)^2\cdot(t-2)=0$, $t_1=1$, $t_2=2$. Вернемся к замене: 1) $3^{-x}=1$, $x=0$; 2) $3^{-x}=2$, $x=-\log_3 2$. Оба полученных решения удовлетворяют ОДЗ, значит являются корнями данного уравнения.

Ответ: $-\log_3 2$; 0.

1043. Найдём ОДЗ заданного уравнения: $4x^2-9\geqslant 0$, $x^2\geqslant\dfrac{9}{4}$. Используя метод интервалов находим $x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. Сделав преобразование в правой части и приведя подобные, перепишем исходное уравнение в виде: $125\cdot 5^{2x}-30\cdot 5^x+1=0$. Сделаем замену $t=5^x$. Тогда приходим к уравнению $125t^2-30t+1=0$. Решением этого уравнения являются значения $t_1=\dfrac{1}{25}$ и $t_2=\dfrac{1}{5}$. С учетом замены, получим: $5^{x_1}=\dfrac{1}{25}$, $x_1=-2$. И $5^{x_2}=\dfrac{1}{5}$, $x_2=-1$. В ОДЗ входит только один корень $x=-2$.

Ответ: -2.

1045. Найдём ОДЗ заданного уравнения: $1-x^2\geqslant 0$, $x^2\leqslant 1$. Используя метод интервалов находим $-1\leqslant x\leqslant 1$. Сделав преобразование в правой части и приведя подобные, перепишем исходное уравнение в виде: $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x}-65\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}+16=0$. Сделаем замену $t=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}$. Тогда приходим к уравнению $4t^2-65t+16=0$. Решением этого уравнения являются значения $t_1=\dfrac{1}{4}$ и $t_2=16$. С учетом замены, получим: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x_1}=\dfrac{1}{4}$, $x_1=1$. И $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x_2}=16$, $x_2=-2$. В ОДЗ входит только один корень $x=1$.

Ответ: 1.

1047. ОДЗ: $x\in R$.

$$\sqrt{\left(2\sin\frac{x}{3}-3\right)^2}+\sqrt{\left(2\sin\frac{x}{3}-5\right)^2}=8-2\sqrt{3},$$

$\left|2\sin\dfrac{x}{3}-3\right|+\left|2\sin\dfrac{x}{3}-5\right|=8-2\sqrt{3}\Leftrightarrow 3-2\sin\dfrac{x}{3}+5-2\sin\dfrac{x}{3}=8-2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{x}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, отсюда $\dfrac{x}{3}=(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$, $x=(-1)^n\pi+3\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $(-1)^n\pi+3\pi n, n\in Z$.

1049. Так как основание логарифма число положительное и не равное единице, то $\operatorname{ctg}x>0$, $\operatorname{ctg}x\neq 1$. По определению логарифма имеем:
$\sin 2x+\operatorname{ctg}x\sin x+1=1$, $2\sin\cos x+\cos x=0$, $\cos x(2\sin x+1)=0$;

$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=-\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\\ x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.$ При $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

$\operatorname{ctg}x=0$ и при $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$ $\operatorname{ctg}x=-\sqrt{3}$, что противоречит условию $\operatorname{ctg}x>0$. Следовательно $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$ и $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$ не являются корнями исходного уравнения. Имеем: $x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

Ответ: $\dfrac{7\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$.

1051.ОДЗ: $x>-1$. Прологарифмируем:
$\log_2(x+1)^{\log_3^2(x+1)}=\log_2 2$, $\log_2^4(x+1)=1$, $\log_2(x+1)=\pm1$; $x+1=2$, $x+1=\dfrac{1}{2}$. $x=1$, $1\in$ ОДЗ. $x=-0{,}5$; $-0{,}5\in$ ОДЗ. Меньший $x=-0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

1057. $\begin{cases} y^2+3^x=4+\sqrt{y^2-y+3},\\ x-\log_3(1-y)=0.\end{cases}$

По определению логарифма из второго уравнения имеем $3^x=1-y$. Подставим $3^x=1-y$ в первое уравнение и решим его.
$y^2-y+1=4+\sqrt{y^2-y+3}$, $(y^2-y+3)-\sqrt{y^2-y+3}-6=0$.
Обозначим $\sqrt{y^2-y+3}=t, t>0$, тогда последнее уравнение примет вид $t^2-t-6=0$, откуда $t_1=3$, $t_2=-2$, t_2 не удовлетворяет условию $t>0$. Вернёмся к замене: $\sqrt{y^2-y+3}=3$; $y^2-y+3=9$; $y^2-y-6=0$; $y_1=-2$, $y_2=3$.

1) $y = -2$, $3^x = 1 - (-2)$, $3^x = 3$, $x = 1$.
2) $y = 3$, $3^x = 1 - 3$, $3^x = -2$, решений нет.
Итак, исходная система имеет единственное решение $(1; -2)$.

Ответ: $(1; -2)$.

1058. ОДЗ. $3x^2 + x + 1 > 0$, $x \in R$.
$\log_3^2(3x^2 + x + 1) - \log_{\frac{1}{9}}(9x^2 + 3x + 3) = 18{,}5;$

$\log_3^2(3x^2 + x + 1) - \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \log_3(3(3x^2 + x + 1)) = 18{,}5;$

$2\log_3^2(3x^2 + x + 1) + \log_3(3x^2 + x + 1) + 1 = 37;$
$2\log_3^2(3x^2 + x + 1) + \log_3(3x^2 + x + 1) - 36 = 0.$

Пусть $\log_3(3x^2 + x + 1) = t$, тогда последнее уравнение примет вид $2t^2 + t - 36 = 0$, $(2t + 9)(t - 4) = 0$, откуда $t_1 = -4{,}5$, $t_2 = 4$.
Вернёмся к замене.

1) $\log_3(3x^2+x+1) = -4{,}5$; $3x^2+x+1 = 3^{-4,5}$; $3x^2+x+\left(1-\dfrac{1}{81\sqrt{3}}\right) = 0$.

$D = 1-4\cdot3\cdot\left(1-\dfrac{1}{81\sqrt{3}}\right) = \dfrac{4}{27\sqrt{3}}-11$. $\dfrac{4}{27\sqrt{3}} < 1$, значит $D < 1-11 < 0$, то есть действительных корней нет.
2) $\log_3(3x^2 + x + 1) = 4$; $3x^2 + x + 1 = 3^4$; $3x^2 + x - 80 = 0$;

$(3x + 16)(x - 5) = 0$; $x = -\dfrac{16}{3}$, $x = 5$.

Ответ: $-\dfrac{16}{3}, 5$.

1059. ОДЗ. $\begin{cases} 15 + \sqrt{x-5} > 0, \\ 15 + \sqrt{x-5} \neq 1, \\ x - 5 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 5,$

$\log_5(15 + \sqrt{x-5}) + \log_{\sqrt{x-5}+15}(25(\sqrt{x-5} + 15)) = 4;$
$\log_5(15 + \sqrt{x-5}) + \log_{\sqrt{x-5}+15} 5^2 + 1 = 4;$

$\log_5(15 + \sqrt{x-5}) + \dfrac{2}{\log_5(15 + \sqrt{x-5})} - 3 = 0.$

Пусть $\log_5(15 + \sqrt{x-5}) = t$, $t \geqslant 1 + \log_5 3$, тогда последнее уравнение примет вид $t + \dfrac{2}{t} - 3 = 0$; $t^2 - 3t + 2 = 0$, $(t - 1)(t - 2) = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. $t_1 = 1$ не удовлетворяет условию $t \geqslant 1 + \log_5 3$.
Вернёмся к замене.

$\log_5(15+\sqrt{x-5})=2$, $15+\sqrt{x-5}=25$, $\sqrt{x-5}=10$, $x=105$.

Ответ: 105.

1060. $\begin{cases} 2^{\sqrt{x^2-6x-23}}=6-\sqrt{x^2-6x-23}, \\ \log_3 x=y. \end{cases}$

ОДЗ. $\begin{cases} x>0, \\ x^2-6x-23\geqslant 0. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы.

Пусть $\sqrt{x^2-6x-23}=t$, $t\geqslant 0$, тогда уравнение примет вид $2^t=6-t$, $2^t+t-6=0$. Функция $f(t)=2^t+t-6$ определена при $t\geqslant 0$ и строго возрастает, $f(0)=-5<0$, поэтому уравнение $f(t)=0$ имеет единственное решение. Нетрудно видеть, что при $t=2$ $f(t)=0$.

Вернёмся к замене.

$\sqrt{x^2-6x-23}=2$; $x^2-6x-23=4$; $x^2-6x-27=0$; $(x-9)(x+3)=0$; $x_1=-3$; $x_2=9$. $x_1=-3$ не удовлетворяет ОДЗ.

$\begin{cases} x=9, \\ \log_3 x=y; \end{cases}$ $\begin{cases} x=9, \\ y=2 \end{cases}$

Ответ: $(9;2)$.

1061. $\begin{cases} 3^{\sqrt{x^2-7x-7}}=5-2\sqrt{x^2-7x-7}, \\ \log_2 x=y. \end{cases}$

ОДЗ. $\begin{cases} x>0, \\ x^2-7x-7\geqslant 0. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы.

Пусть $\sqrt{x^2-7x-7}=t$, $t\geqslant 0$, тогда уравнение примет вид $3^t=5-2t$, $3^t+2t-5=0$. Функция $f(t)=3^t+2t-5$ определена при $t\geqslant 0$ и строго возрастает, $f(0)=-4<0$, поэтому уравнение $f(t)=0$ имеет единственное решение. Нетрудно видеть, что при $t=1$ $f(t)=0$.

Вернёмся к замене.

$\sqrt{x^2-7x-7}=1$; $x^2-7x-7=1$; $x^2-7x-8=0$; $(x+1)(x-8)=0$; $x_1=-1$; $x_2=8$. $x_1=-1$ не удовлетворяет ОДЗ.

$\begin{cases} x=8, \\ \log_2 x=y; \end{cases}$ $\begin{cases} x=8, \\ y=3 \end{cases}$

Ответ: $(8;3)$.

1062. ОДЗ системы: $x>0$, $y>0$.

$\begin{cases} x\log_2(xy)-x^2=-10, \\ \log_2(xy)=-3; \end{cases} \Rightarrow -3x-x^2=-10;\ x_1=-5,\ x_2=2.$

Учитывая ОДЗ, получим $x = 2$.Тогда $\log_2(2y) = -3$; $y = \dfrac{1}{16}$.

Ответ: $\left(2; \dfrac{1}{16}\right)$.

1064. 1) Пусть $u = xy$, $v = x + y$, тогда $2v^2 = 2(x^2 + 2xy + y^2) =$ $= 2x^2 + 4xy + 2y^2$. Отсюда, $2x^2 + 2y^2 = 2v^2 - 4u$.
Следовательно,
$2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 = 2v^2 - 4u + u^2$.
Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 2v^2 - 4u + u^2 = 62, \\ u + v = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 11 - v, \\ 2v^2 = 4(11 - v) - (11 - v)^2 + 62; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 11 - v, \\ 3v^2 - 18v + 15 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 11 - v, \\ \left[\begin{array}{l} v = 1, \\ v = 5; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 10 \\ v = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} u = 6, \\ v = 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

2) Получаем $\begin{cases} xy = 10, \\ x + y = 1; \end{cases}$ или $\begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5. \end{cases}$

Решая первую систему, приходим к уравнению $-x^2 + x - 10 = 0$. Действительных корней нет.

Решая вторую систему, получаем $\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 2, \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 3. \end{cases}$

Ответ: $(3; 2), (2; 3)$.

1065. 1) Пусть $u = xy$, $v = x + y$. Тогда $v^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Отсюда $x^2+y^2 = v^2-2u$. Следовательно, $x^2+y^2+x^2y^2-8xy = v^2-2u+u^2-8u =$ $= v^2 + u^2 - 10u$.

Заданная система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} v^2 + u^2 - 10u = 20, \\ u + v = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 14 - v, \\ v^2 + (14 - v)^2 - 10(14 - v) = 20; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 14 - v, \\ 2(v - 3)(v - 6) = 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v = 3, \\ u = 11, \end{cases} \\ \begin{cases} v = 6, \\ u = 8. \end{cases} \end{array}\right.$$

2) Получаем $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 11, \end{cases}$ или $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8. \end{cases}$

Решая первую систему, приходим к уравнению $y^2 - 3y + 11 = 0$. Действительных корней нет.

Из второй системы находим: $x_1 = 4$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 4$.

Ответ: $(4; 2), (2; 4)$.

1066. $\begin{cases} 36^{2x+1} + 16 \cdot 4^{2x-1} = 24 \cdot 12^{2x}, \\ \sin y = -x; \end{cases}$

$\begin{cases} 36^{2x+1} + 4^{2x+1} - 2 \cdot 12^{2x+1} = 0, \\ \sin y = -x; \end{cases}$ $\begin{cases} 9^{2x+1} - 2 \cdot 3^{2x+1} + 1 = 0, \\ \sin y = -x; \end{cases}$

$\begin{cases} (3^{2x+1} - 1)^2 = 0, \\ \sin y = -x; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 1 = 0, \\ \sin y = -x; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -0{,}5, \\ y = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$

Ответ: $\left(-0{,}5; (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n\right), n \in Z.$

1067. $\begin{cases} 49^{2x-1} + 9^{2x-1} - 2 \cdot 21^{2x-1} = 0, \\ \cos y = x; \end{cases}$

$\begin{cases} \left(\dfrac{49}{9}\right)^{2x-1} - 2\left(\dfrac{7}{3}\right)^{2x-1} + 1 = 0, \\ \cos y = x; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\left(\dfrac{7}{3}\right)^{2x-1} - 1\right)^2 = 0, \\ \cos y = x; \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - 1 = 0, \\ \cos y = x; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0{,}5, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z. \end{cases}$

Ответ: $\left(0{,}5; \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z.$

1068. ОДЗ. $\begin{cases} x + 1 \neq 0, \\ x^2 + x - 2 \neq 0, \\ \dfrac{x^2 - y - 2}{x + 1} \geqslant 0. \end{cases}$

Каждое из слагаемых неотрицательно, поэтому их сумма равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из них равно нулю.

$\begin{cases} x^2 - y - 2 = 0, \\ y^2 - xy - 3y - x - 4 = 0; \end{cases}$

$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ (x^2 - 2)^2 - x(x^2 - 2) - 3(x^2 - 2) - x - 4 = 0. \end{cases}$

Решим второе уравнение системы.

$x^4 - 4x^2 + 4 - x^3 + 2x - 3x^2 + 6 - x - 4 = 0;$

$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0;$

$(x - 1)(x^3 - 7x - 6) = 0;$

$(x - 1)(x + 1)(x^2 - x - 6) = 0;$

$(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 2) = 0.$

Значение $x = -1$ не удовлетворяет условию $x + 1 \neq 0$, а значения $x = -2$ и $x = 1$ не удовлетворяют условию $x^2 + x - 2 \neq 0$. Получаем единственный корень $x = 3$, тогда $y = 3^2 - 2 = 7$.

Пара $(3; 7)$ удовлетворяет ОДЗ, значит является решением исходного уравнения.

Ответ: $(3; 7)$.

1070. Сделаем замену $a = \sqrt{-x}$, $b = \sqrt{-y}$, тогда

$$\begin{cases} 16 = (2a + b)^2, \\ 64 = (4a^2 - b^2)^2; \end{cases}$$

где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$.

$4 = (2a - b)^2$;

$2a - b = \pm 2$;

$b = 2a \pm 2$.

Подставим $b = 2a \pm 2$ в первое уравнение системы:

$16 = (4a \pm 2)^2$, отсюда $a_1 = 1{,}5$, $a_2 = 0{,}5$, следовательно $b_1 = 1$, $b_2 = 3$.

$x_1 = -(1{,}5)^2 = -2{,}25$, $x_2 = -(0{,}5)^2 = -0{,}25$;

$y_1 = -(1)^2 = -1$, $y_2 = -(3)^2 = -9$.

Ответ: $(-0{,}25; -9)$, $(-2{,}25; -1)$.

1071. Сделаем замену $a = \sqrt{-x}$, $b = \sqrt{-y}$, тогда $\begin{cases} 25 = (a + 3b)^2, \\ 25 = (a^2 - 9b^2)^2 \end{cases}$;

где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$.

$1 = (a - 3b)^2$,

$a - 3b = \pm 1$,

$a = 3b \pm 1$.

Подставим $a = 3b \pm 1$ в первое уравнение системы:

$25 = (6b \pm 1)^2$, отсюда $b_1 = 1$, $b_2 = \dfrac{2}{3}$, следовательно $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

$x_1 = -(2)^2 = -4$, $x_2 = -(3)^2 = -9$;

$y_1 = -(1)^2 = -1$, $y_2 = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = -\dfrac{4}{9}$.

Ответ: $(-4; -1)$, $\left(-9; -\dfrac{4}{9}\right)$.

1072. ОДЗ. $x(x + 4) - 1 \geqslant 0$, $x^2 + 4x - 1 \geqslant 0$.

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 2\sqrt{x(x + 4) - 1} = 9, \\ 4 \sin y \cos y = x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + 4x - 1) + 2\sqrt{x^2 + 4x - 1} - 8 = 0, \\ 2 \sin 2y = x. \end{cases}$$

Решим отдельно первое уравнение системы. Пусть $\sqrt{x^2 + 4x - 1} = t$, $t \geqslant 0$, тогда уравнение примет вид $t^2 + 2t - 8 = 0$; получаем: $t_1 = -4$, $t_2 = 2$. $t = -4$ не удовлетворяет условию $t \geqslant 0$.

Вернёмся к замене.
$\sqrt{x^2+4x-1}=2$; $x^2+4x-1=4$; $x^2+4x-5=0$; $x_1=-5, x_2=1$. Оба полученных значения x удовлетворяют ОДЗ.

Подставим найденные значения x во второе уравнение системы.
1) $2\sin 2y = -5$, $\sin 2y = -2{,}5$ — уравнение не имеет решений, так как $-1 \leqslant \sin 2y \leqslant 1$.

2) $2\sin 2y = 1$, $\sin 2y = \dfrac{1}{2}$; $2y = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$; $y = (-1)^n\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Итак, решением системы являются $\left(1; (-1)^n\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

Ответ: $\left(1; (-1)^n\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

1074. Условие задачи эквивалентно совокупности
$\left[\begin{array}{l} 3x-4<0, \\ \log_4^2 x^2 - \log_2(16x) + 2 < 0, \end{array}\right.$ Решим отдельно второе неравенство из составленной совокупности. $\log_4^2 x^2 - \log_2(16x) + 2 < 0$,
$\log_2^2 x - \log_2 16 - \log_2 x + 2 < 0$,
$\log_2^2 x - 4 - \log_2 x + 2 < 0$, $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 < 0$.

Сделаем замену $t = \log_2 x$. Тогда неравенство примет вид $t^2 - t - 2 < 0$. $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow t_1 = -1$, $t_2 = 2$. Значит, $t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-2) < 0$, $-1 < t < 2$. Возвращаясь к переменной x, получаем неравенство

$-1 < \log_2 x < 2$, $\log_2 \dfrac{1}{2} < \log_2 x < \log_2 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x < 4$. Таким образом,

исходная совокупность принимает вид $\left[\begin{array}{l} 3x-4<0, \\ \dfrac{1}{2} < x < 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{4}{3}, \\ \dfrac{1}{2} < x < 4; \end{array}\right.$

$\Rightarrow x < 4$.

Ответ: $(-\infty; 4)$.

1076. Воспользовавшись тождеством $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, заданную функцию представим в виде: $y = 2\cos^2 x + 3\cos x - 1$. Для ответа на вопрос задачи требуется на отрезке $[-\pi; \pi]$ решить неравенство:
$|2\cos^2 x + 3\cos x - 1| \leqslant 1$. Сделав замену $\cos x = t$, получим неравенство: $|2t^2 + 3t - 1| \leqslant 1$. По определению модуля это неравенство равносильно

системе $\begin{cases} 2t^2+3t-1 \leqslant 1, \\ 2t^2+3t-1 \geqslant -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(t+2)\cdot(t-0{,}5) \leqslant 0, \\ 2t\cdot(t+1{,}5) \geqslant 0. \end{cases}$
Решая неравенства последней системы методом интервалов и беря пересечение полученных множеств, (см. рис. 188), находим, что её решением

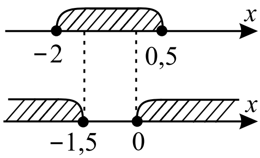


Рис. 188.

является $t \in [-2; -1{,}5] \cup [0; 0{,}5]$. Возвращаясь к переменной x, получаем, что исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} \cos x \leqslant 0{,}5, \\ \cos x \geqslant 0. \end{cases}$ (значений x таких, что $\cos x \in [-2; -1{,}5]$ не существует). Решив эти простейшие тригонометрические неравенства и выбрав $x \in [-\pi; \pi]$, получим, что искомыми значениями являются $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

1077. Задача сводится к решению неравенства $|2x+14| \geqslant |3x+10|$. Заменим данное неравенство, содержащее знак модуля, равносильным ему неравенством, не содержащим этого знака. По определению модуля получим:

$$|2x+14| = \begin{cases} 2x+14, \text{ при } 2x+14 \geqslant 0, \text{ то есть } x \geqslant -7, \\ -2x-14, \text{ при } 2x+14 < 0, \text{ то есть } x < -7. \end{cases}$$

$$|3x+10| = \begin{cases} 3x+10, \text{ при } 3x+10 \geqslant 0, \text{ то есть } x \geqslant -\dfrac{10}{3}, \\ -3x-10, \text{ при } 3x+10 < 0, \text{ то есть } x < -\dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Таким образом, действительная ось делится точками $x = -7$ и $x = -\frac{10}{3}$ на области: $(-\infty; -7)$, $\left[-7; -\frac{10}{3}\right)$, $\left[-\frac{10}{3}; +\infty\right)$. В первой области $|2x+14| = -2x-14$, $|3x+10| = -3x-10$, и потому в этой области данное неравенство равносильно неравенству $-2x-14 \geqslant -3x-10$, откуда $x \geqslant 4$. Во второй области $|2x+14| = 2x+14$, $|3x+10| = -3x-10$, и данное неравенство может быть заменено неравенством $2x + 14 > -3x - 10$, откуда $x \geqslant -4{,}8$. В третьей области $|2x+14| = 2x+14$, $|3x+10| = 3x+10$, и потому в этой области данное неравенство равносильно неравенству $2x + 14 \geqslant 3x + 10$, откуда $x \leqslant 4$. Таким образом, множество всех решений данного неравенства состоит из трёх частей: $(-\infty; -7) \cap [4; +\infty) = \varnothing$, $\left[-7; -\frac{10}{3}\right) \cap [-4{,}8; +\infty) = \left[-4{,}8; -\frac{10}{3}\right)$, $\left[-\frac{10}{3}; +\infty\right) \cap (-\infty; 4] = \left[-\frac{10}{3}; 4\right]$.

Ответ: $[-4{,}8; 4]$.

1079. $\dfrac{16^{2x+0{,}75} - 130 \cdot 2^{4x}}{13x - 7} > \dfrac{32}{7 - 13x}$,
$\dfrac{16^{2x+0{,}75} - 130 \cdot 2^{4x} + 32}{13x - 7} > 0$, $\dfrac{16^{2x+0{,}75} - 130 \cdot 16^{x} + 32}{13x - 7} > 0$. Решим неравенство методом интервалов. Найдём значения x, при которых числитель обращается в ноль:
$8 \cdot 16^{2x} - 130 \cdot 16^x + 32 = 0$, сделаем замену $t = 16^x$, $t > 0$, тогда $4t^2 - 65t + 16 = 0$; $D = 65^2 - 16^2 = 49 \cdot 81 = 63^2$, $t_{1,2} = \dfrac{65 \pm 63}{8}$, $t_1 = \dfrac{1}{4}$, $t_2 = 16 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Знаменатель обращается в ноль при $x = \dfrac{7}{13}$ (см. рис 189). Искомыми значениями являются $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{13}\right) \cup (1; +\infty)$.

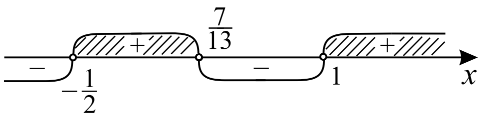


Рис. 189.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{13}\right) \cup (1; +\infty)$.

1080. $\dfrac{3^{4x} - 90 \cdot 9^{x-0{,}5}}{8x - 5} < \dfrac{81}{5 - 8x}$, $\dfrac{9^{2x} - 90 \cdot 9^x \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} + 81}{8x - 5} < 0$,
$\dfrac{9^{2x} - 30 \cdot 9^x + 81}{8x - 5} < 0$.
Возможны два случая:

1) $\begin{cases} 9^{2x} - 30 \cdot 9^x + 81 > 0, \\ 8x - 5 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9^x - 27)(9^x - 3) > 0, \\ x < \dfrac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 9^x < 3, \\ 9^x > 27, \end{array} \right. \\ x < \dfrac{5}{8}. \end{cases}$

В силу монотонного возрастания функции $y = 3^x$ имеем:

$\begin{cases} 2x < 1, 2x > 3, \\ x < \dfrac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{2}, x > 1{,}5, \\ x < \dfrac{5}{8}; \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -\dfrac{1}{2}).$

2) $\begin{cases} 9^{2x} - 30 \cdot 9^x + 81 < 0, \\ 8x - 5 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9^x - 27)(9^x - 3) < 0, \\ x > \dfrac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < 9^x < 27, \\ x > \dfrac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < 3^{2x} < 3^3, \\ x > \dfrac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 2x < 3, \\ x > \dfrac{5}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{2}, \\ x > \dfrac{5}{8}; \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\dfrac{5}{8}; \dfrac{3}{2}\right)$. Объединяя результаты 1) и 2), имеем $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{8}; \dfrac{3}{2}\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{5}{8}; \dfrac{3}{2}\right)$.

1081. $\dfrac{27^x + 3 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{13 - 8x} > \dfrac{63}{13 - 8x}, \quad \dfrac{3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 63}{13 - 8x} > 0.$

Возможны два случая.

1) $\begin{cases} 3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 63 > 0, \\ 13 - 8x > 0. \end{cases}$ Найдём корни выражения в левой части первого неравенства системы используя схему Горнера. Замена $3^x = t$, $t > 0$. $t^3 + 3t^2 + 3t - 63 > 0$, $t^3 + 3t^2 + 3t - 63 = 0$.

	1	3	3	−63
3	1	6	21	0

$t = 3$ — корень. $t^2 + 6t + 21 = 0$, $D < 0 \Rightarrow$ действительных корней нет. $(t - 3)(t^2 + 6t + 21) > 0$, $t - 3 > 0$, $t > 3$. Вернемся к замене:

$3^x > 3,\ x > 1$, так как $y = 3^x$ монотонно возрастает. Система имеет вид

$$\begin{cases} x > 1, \\ x < \dfrac{13}{8}; \end{cases} \quad 1 < x < \frac{13}{8}.$$

2) $\begin{cases} 3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 63 < 0, \\ 13 - 8x < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x > \dfrac{13}{8}. \end{cases}$ Система не имеет решений.

Ответ: $\left(1; \dfrac{13}{8}\right)$.

1084. Ключевая идея: Искомые значения x удовлетворяют неравенству $3^{|x-1|} + 24 < 3^{|x+1|}$.
План решения: Раскроем модули и решим неравенство на трёх промежутках: 1) $x < -1$, 2) $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и 3) $x > 1$.

1) Пусть $x < -1$, тогда неравенство примет вид $3^{1-x} + 24 < 3^{-x-1} \Leftrightarrow 9 \cdot 3^{-x-1} - 3^{-1-x} < -24 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

2) Пусть $-1 \leqslant x \leqslant 1$, тогда неравенство примет вид $3^{1-x} + 24 < 3^{x+1}$. Умножим обе части неравенства на $3^{x-1} > 0$. Получаем, $3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 1 > 0$. Сделаем замену $t = 3^x$, $t > 0$ и решим квадратное неравенство $t^2 - 8t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > 4 + \sqrt{17}$.

Возвращаемся к переменной x и получаем $3^x > 4 + \sqrt{17} \Leftrightarrow x > \log_2(4 + \sqrt{17})$.
Учитывая, что $\log_2(4 + \sqrt{17}) > 2$ и $-1 \leqslant x \leqslant 2$, получаем: $x \in \emptyset$.

3) Пусть $x > 1$, тогда неравенство примет вид $3^{x-1} + 24 < 3^{x+1} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 9 \cdot 3^{x-1} - 3^{x-1} > 24 \Leftrightarrow 3^{x-1} > 3 \Leftrightarrow x > 2$. Учитывая условие $x > 1$, получаем: $x > 2$.

Из пунктов 1), 2), 3) следует, что решением задачи является промежуток $(2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

1085. Ключевая идея: Искомые значения x совпадают с решениями неравенства $2^{|x-3|} + 2^{|x-1|+2} < 10$.
План решения: Раскроем модули и решим неравенство на трёх промежутках: 1) $x < 1$, 2) $1 \leqslant x \leqslant 3$, и 3) $x > 3$.

1) Пусть $x < 1$, тогда неравенство примет вид $2^{3-x} + 2^{3-x} < 10 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2^{3-x} < 5 \Leftrightarrow 3 - x < \log_2 5 \Leftrightarrow x > \log_2 1{,}6$.

Учитывая, что $\log_2 1{,}6 < 1$ и $x < 1$, получаем: $x \in (\log_2 1{,}6; 1)$.

2) Пусть $1 \leqslant x \leqslant 3$, тогда неравенство примет вид $2^{3-x} + 2^{x+1} < 10$. Умножим обе части неравенства на $2^x > 0$ (это можно сделать так как

$2x > 0$). Получаем, $2 \cdot 2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 8 < 0$. Сделаем замену $t = 2^x$, $t > 0$ и решим квадратное неравенство $2t^2 - 10t - 8 < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 4$.

Возвращаемся к переменной x и получаем $2^x < 4 \Leftrightarrow x < 2$. Учитывая, что $1 \leqslant x \leqslant 3$, получаем: $x \in [1; 2)$.

3) Пусть $x > 3$, тогда неравенство примет вид $2^{x-3} + 2^{x+1} < 10$. Поскольку при $x > 3$ выполняются неравенства $2^{x-3} > 2^{3-3} = 1$ и $2^{x+1} > 2^{3+1} = 16$, получаем, что $2^{x-3} + 2^{x+1} > 17$. Следовательно, неравенство $2^{x-3} + 2^{x+1} < 10$ не имеет решений при $x > 3$.

Из пунктов 1), 2), 3) следует, что решением задачи является множество $(\log_2 1{,}6; 1) \cup [1; 2)$ то есть $(\log_2 1{,}6; 2)$.

Ответ: $(\log_2 1{,}6; 2)$.

1087. ОДЗ $x > 0$; $x \neq 1$. $(0{,}8)^{\log_x^2 7 - |\log_x 7|} \geqslant 1$; $\log_x^2 7 - |\log_x 7| \leqslant 0$; $|\log_x 7|(|\log_x 7| - 1) \leqslant 0$; разделим обе части на $|\log_x 7| > 0$: $|\log_x 7| - 1 \leqslant 0$; $|\log_x 7| \leqslant 1$; $-1 \leqslant \log_x 7 \leqslant 1$; $x \in \left(0; \frac{1}{7}\right] \cup [7; +\infty)$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{7}\right] \cup [7; +\infty)$.

1089. Для точки $\big(x; f(x)\big)$ графика функции $y = f(x)$ расстояние до оси абсцисс равно $|f(x)|$, а расстояние до оси ординат равно $|x|$. В силу этого задача равносильна решению неравенства $\left|\frac{x^2 - 8}{x}\right| > |x|$. Множество его решений и будет являться ответом к данной задаче. Так как обе части неравенства неотрицательны, то $\left|\frac{x^2 - 8}{x}\right| > |x| \Leftrightarrow \left|\frac{x^2 - 8}{x}\right|^2 > |x|^2$,

$\left(\frac{x^2 - 8}{x}\right)^2 - x^2 > 0$, $\left(\frac{x^2 - 8}{x} - x\right)\left(\frac{x^2 - 8}{x} + x\right) > 0$,

$\frac{x^2 - 8 - x^2}{x} \cdot \frac{x^2 - 8 + x^2}{x} > 0$, $\frac{-8 \cdot (2x^2 - 8)}{x^2} > 0$, $\frac{-16(x - 2)(x + 2)}{x^2} > 0$.

Решая это неравенство методом интервалов (см. рисунок 190), получаем: $x \in (-2; 0) \cup (0; 2)$

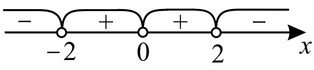


Рис. 190.

Ответ: $(-2; 0) \cup (0; 2)$.

1091. Для точки $\big(x; f(x)\big)$ графика функции $y = f(x)$ расстояние до оси абсцисс равно $|f(x)|$, а расстояние до оси ординат равно $|x|$. В силу этого задача равносильна решению неравенства $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right| > |x|$. Множество его решений и будет являться ответом к данной задаче. Так как обе части неравенства неотрицательны, то $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right| > |x| \Leftrightarrow \left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|^2 > |x|^2$,

$\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^2 - x^2 > 0$, $\left(\dfrac{x-1}{x+3} - x\right)\left(\dfrac{x-1}{x+3} + x\right) > 0$,

$\dfrac{x-1-x^2-3x}{x+3} \cdot \dfrac{x-1+x^2+3x}{x+3} > 0$,

$\dfrac{-(x^2+2x+1)\cdot(x^2+4x-1)}{(x+3)^2} > 0$,

$\dfrac{-(x+1)^2\cdot\left(x-(-2-\sqrt{5})\right)\left(x-(-2+\sqrt{5})\right)}{(x+3)^2} > 0$. Решая это неравенство методом интервалов (см. рисунок 191), получаем:
$x \in (-2-\sqrt{5};-3) \cup (-3;-1) \cup (-1;-2+\sqrt{5})$

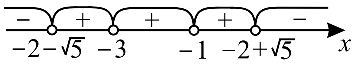


Рис. 191.

Ответ: $(-2-\sqrt{5};-3) \cup (-3;-1) \cup (-1;-2+\sqrt{5})$.

1092. Задача сводится к решению неравенства $\left|\dfrac{2x^2+3x}{x}\right| < 1$. Пользуясь свойствами модуля получим $\dfrac{|2x^2+3x|}{|x|} < 1$, $\dfrac{|x||2x+3|}{|x|} < 1$. Отсюда $|2x+3| < 1$. Заменим данное неравенство, содержащее знак модуля, равносильным ему неравенством, не содержащим этого знака. По определению модуля получим:

$$|2x+3| = \begin{cases} 2x+3, \text{ при } 2x+3 \geqslant 0, x \in [-1{,}5;\infty), \\ -2x-3, \text{ при } 2x+3 < 0, \text{ то есть } x \in (-\infty;-1{,}5). \end{cases}$$

Таким образом, действительная ось делится точкой $x = -1{,}5$ на области: $(\infty;-1{,}5)$, $(-1{,}5;+\infty)$. В первой области данное неравенство равносильно неравенству $-2x-3 < 1$, откуда $x \in (-2;+\infty)$. Во второй области, исходное неравенство может быть заменено неравенством $2x+3 < 1$, откуда $x \in (-\infty;-1)$. Таким образом, множество всех решений данного неравенства состоит из двух частей:
$(\infty;-1{,}5) \cap (-2;+\infty) = (-2;-1{,}5]$, $[-1{,}5;+\infty) \cap (-\infty;-1) = [-1{,}5;-1)$.

Ответ: $(-2;-1)$.

1093. ОДЗ: $2x+1 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x \geqslant -\frac{1}{2}$. На ОДЗ второе неравенство системы тождественно верно, так как слева стоит неотрицательное число, а справа — отрицательное. Решим первое неравенство системы, выполнив замену $t = 5x^2+6x-1$. Неравенство примет вид $t^2+3t+2 \geqslant 0$; $(t+2)(t+1) \geqslant 0$; $t \leqslant -2$ и $t \geqslant -1$. Вернёмся к исходной переменной x. Из неравенства $t \leqslant -2$ получаем $5x^2+6x-1 \leqslant -2$; $5x^2+6x+1 \leqslant 0$.

Корнями трёхчлена в левой части являются $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{5}$.

Таким образом, решением последнего неравенства будет

$-1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{5}$. Учитывая ОДЗ, получаем $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant -\frac{1}{5}$.

Из неравенства $t \geqslant -1$ получаем $5x^2+6x \geqslant 0$; $x \leqslant -1{,}2$ и $x \geqslant 0$. Учитывая ОДЗ, получаем $x \geqslant 0$.

Объединим найденные решения: $x \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right] \cup [0; +\infty)$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right] \cup [0; +\infty)$.

1098. Сначала найдем область определения функции: $\frac{x+1}{x^3+3x^2-4} > 0$;

$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2} > 0$, отсюда $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (1; +\infty)$.

Теперь преобразуем исходную функцию:

$y = (x+1)\cdot 3^{\log_3 \frac{x^3+3x^2-4}{x+1}} = \frac{(x+1)(x-1)(x+2)^2}{x+1} = (x-1)(x+2)^2$.

Для нахождения промежутков убывания найдем производную:

$y' = (x+2)^2 + 2(x-1)(x+2) = 3x(x+2)$. $y' = 0$ при $x = -2$; $x = 0$ (см. рис. 192). С учетом области определения делаем вывод, что функция

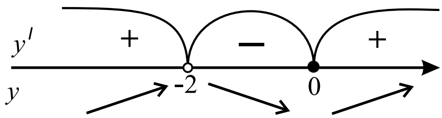


Рис. 192.

убывает при $x \in (-2; -1)$.

Ответ: $(-2; -1)$.

1100. Найдём область определения функции $f(x)$: $\begin{cases} 4x+11 > 0, \\ 3x^2-1 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{11}{4}, \\ x \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ или } x \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases} \quad x \in \left(-\frac{11}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right).$$

Преобразуем исходную функцию: $f(x) = x^2\bigl(3x^2 - 1\bigr) + x^2(4x + 11) =$
$= x^2\bigl(3x^2 + 4x + 10\bigr)$,
$f'(x) = 2x\bigl(3x^2 + 4x + 10\bigr) + x^2(6x + 4) = 4x\bigl(3x^2 + 3x + 5\bigr)$.

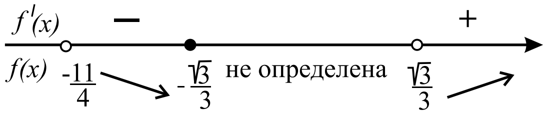


Рис. 193.

Так как $3x^2 + 3x + 5 > 0$ для любых x ($D < 0$), то, с учетом области определения, будем иметь $x \in \left(-\dfrac{11}{4}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ (см. рис. 193).

Ответ: $\left(-\dfrac{11}{4}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

1102. $D(f)$: $x > 1$. При $x \in D(f)$, $f(x) = 3x^4 - 16x^3 - 6x^2 + 48x + 16$. Найдём стационарные точки: $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 - 12x + 48 =$
$12\bigl(x^3 - 4x^2 - x + 4\bigr) = 12\bigl(x^2(x-4) - (x-4)\bigr) = 12\bigl(x^2 - 1\bigr)(x - 4)$. Корни уравнения $\bigl(x^2 - 1\bigr)(x - 4) = 0$ есть $x_{1,2} = \pm 1$, $x_3 = 4$. x_1 и x_2 не входят в область определения. Значит $x = 4$ точка минимума (см. рис. 194), $f(4) = -144$.

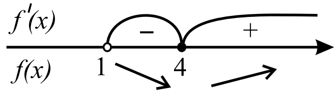


Рис. 194.

Ответ: -144.

1103. Найдём область определения функции: $\begin{cases} 2 - x > 0; \\ \dfrac{2x^3 - 12x}{(x-2)^3} \geqslant 0. \end{cases}$ Применяя метод интервалов, получим $\left[\begin{array}{l} 0 \leqslant x < 2, \\ x \leqslant -\sqrt{6}, \end{array}\right.$ (см. рис. 195).

На области определения $f(x) = (2 - x)^3 \cdot \dfrac{2x^3 - 12x}{(x-2)^3} = 12x - 2x^3$,

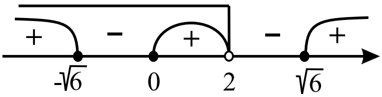


Рис. 195.

$f'(x) = 12 - 6x^2$. У функции единственная точка экстремума $x = \sqrt{2}$, так как $x = -\sqrt{2}$ не входит в $D(f)$. $x = \sqrt{2}$ является точкой максимума. $f\left(\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$.

Ответ: $8\sqrt{2}$.

1105. $D(g)$: $\begin{cases} x+1>0, \\ 1-x>0; \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 1.$

$g(x) = 5^{-\log_5(1-x^2)} + \log_3 3^{(x^2+1)} = \dfrac{2-x^4}{1-x^2};$

$g'(x) = \dfrac{-4x^3(1-x^2)+2x(2-x^4)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{2x(x^4-2x+2)}{(1-x^2)^2}$. $g'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$ (см. рис. 196). С учетом области определения делаем

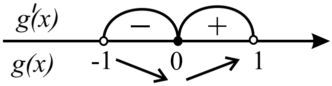


Рис. 196.

вывод, что $x = 0$ — точка минимума. $g(0) = \dfrac{2-0}{1-0} = 2$.

Ответ: 2.

1106. $D(g)$: $-0{,}5 < x < 0{,}5$. При $x \in D(g)$, $g(x) = \dfrac{1}{1-4x^2} - \left(4x^2+1\right) =$ $= \dfrac{16x^4}{1-4x^2}$; $g'(x) = \dfrac{64x^3\left(1-2x^2\right)}{\left(1-4x^2\right)^2}$. У функции единственная точка экстремума $x = 0$ (так как $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ не входят в область определения), $x = 0$ — точка минимума. Тогда $g(0) = 0$.

Ответ: 0.

1108. 1) Область определения функции — все $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, в которых $\sin x - \cos x > 0$. Тогда $4^{\log_2(\sin x - \cos x)} = \left(2^{\log_2(\sin x-\cos x)}\right)^2 =$
$= (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x = 1 - \sin 2x.$

2) Найдём точки экстремума функции $f(x) = 1 - \sin 2x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\sin x - \cos x > 0$. $f'(x) = -2\cos 2x = 0$ при $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Из этого множества только $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ и $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ попадают в интервал $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Но $\sin x_2 - \cos x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Значит, x_2 не принадлежит области определения. Тогда $f(\frac{3\pi}{4}) = 1 - \sin\frac{3\pi}{2} = 2$.

Ответ: 2.

1109. $D(f)$: $\begin{cases} \dfrac{x+7}{x\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right)} > 0, \\ x+7>0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{3} < x < 0, \\ x > 2\sqrt{3}. \end{array}\right.$

При $x \in D(f)$ $f(x) = 17^{\log_{17} \frac{x^3-12x}{x+7}\cdot(x+7)}$, $f(x) = x^3 - 12x$.
$f'(x) = 3(x-2)(x+2)$. Найдём стационарные точки: $x = 2$, $x = -2$. $x = 2 \notin D(f)$. Из рисунка 197 видно $x = -2$ точка максимума. Тогда $f(-2) = 16$.

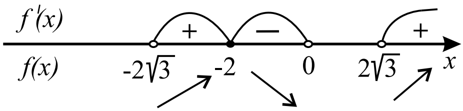


Рис. 197.

Ответ: 16.

1111. Область определения функции:
$$\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x+2} > 0, \\ x+2>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(1+x) > 0, \\ x+2>0; \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Преобразуем функцию: $y = 2^{\log_2 \frac{(1-x^2)(x+2)}{x+2}} = 1 - x^2$. Для нахождения интервалов возрастания функции найдем производную y' и определим её знаки: $y' = -2x$. С учетом области определения делаем вывод: функция возрастает при $x \in (-1; 0)$ (см. рис. 198).

Ответ: $(-1; 0)$.

1112. Найдём $D(f)$: $\begin{cases} x+4>0, \\ x^3 - 12x > 0; \end{cases}$ $x \in \left(-2\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(2\sqrt{3}; +\infty\right)$.

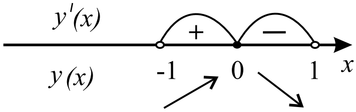


Рис. 198.

При $x \in D(f)$ $f(x) = 3e^{\ln\frac{(x+4)^2}{x^3-12x}+\ln\frac{1}{(x+4)^2}} = 3e^{\ln\frac{1}{x^3-12x}} = \dfrac{3}{x^3-12x}$.

Найдём стационарные точки $f(x)$:

$f'(x) = -\dfrac{3\left(3x^2-12\right)}{\left(x^3-12x\right)^2} = -\dfrac{9(x-2)(x+2)}{x^2\left(x-2\sqrt{3}\right)^2\left(x+2\sqrt{3}\right)^2}$.

Уравнение $-\dfrac{9(x-2)(x+2)}{x^2\left(x-2\sqrt{3}\right)^2\left(x+2\sqrt{3}\right)^2} = 0$ имеет корни $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, причем $x_2 \notin D(f)$. Из рисунка 199 следует, что $x = -2$ — точка

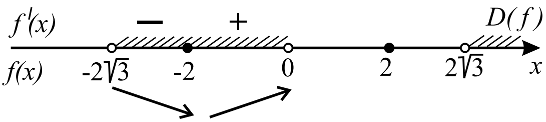


Рис. 199.

минимума. Тогда $f(-2) = \dfrac{3}{16}$.

Ответ: $\dfrac{3}{16}$.

1114. Найдём $D(f)$. $\begin{cases} x+3>0, \\ \dfrac{x+3}{3x-x^2}>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ 3x-x^2>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x^2-3x<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ 0<x<3; \end{cases}$ $0<x<3$.

Функция примет вид $f(x) = 3x - x^2$, где $0 < x < 3$. $f'(x) = 3 - 2x$. $y = f(x)$ возрастает на $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$ (см. рис. 200).

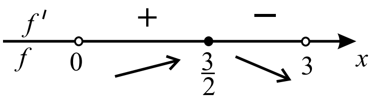


Рис. 200.

Ответ: $\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

1115. ОДЗ: $\begin{cases} (x+3)^2(x+5)(1-x) > 0, \\ 2(x+5) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-5; -3) \cup (-3; 1)$.

Тогда $f(x) = 9\log_3 \dfrac{(x+3)^2(x+5)(1-x)}{2(x+5)} = \log_3 \dfrac{(x+3)^2(1-x)}{2}$;

$f'(x) = -\dfrac{3x^2+10x+3}{(x+3)^2(1-x)\ln 3} = -\dfrac{3(x+3)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x+3)^2(1-x)\ln 3}$. Найдём точки экстремума: $x = -\dfrac{1}{3}$. $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \log_3 \dfrac{64 \cdot 4}{2 \cdot 9 \cdot 3} = \log_3 \dfrac{128}{27} = 7\log_3 2 - 3$.

Ответ: $7\log_3 2 - 3$.

1119. Период функции $\cos\dfrac{3x}{2}$ равен $T_1 = 2\pi : \dfrac{3}{2} = \dfrac{4\pi}{3}$, период функции $\sin\dfrac{x}{3}$ равен $T_2 = 6\pi$. Наименьшее общее кратное этих периодов равно $T = 12\pi$. Ясно, что $T = 12\pi$ — период функции $f(x)$. Покажем, что это — наименьший положительный (основной) период. Пусть существует период S такой, что $0 < S < 12\pi$. Тогда имеем:

$\cos\dfrac{3}{2}(x+S) - \sin\dfrac{x+S}{3} - \left(\cos\dfrac{3}{2}x - \sin\dfrac{x}{3}\right) = 0,$

$\left(\cos\dfrac{3}{2}(x+S) - \cos\dfrac{3}{2}x\right) - \left(\sin\dfrac{x+S}{3} - \sin\dfrac{x}{3}\right) = 0,$

$\sin\dfrac{3}{4}S \cdot \sin\dfrac{3}{4}(2x+S) + \sin\dfrac{S}{6} \cdot \cos\dfrac{1}{6}(2x+S) = 0.$

Так как, $S < 12\pi$, а $\dfrac{3}{4}S = \dfrac{3S}{4\pi}\pi$ и $\dfrac{S}{6} = \dfrac{S}{6\pi}\pi$, то, по крайней мере, одно из чисел $\dfrac{3S}{4\pi}$ или $\dfrac{S}{6\pi}$ не является целым, то есть, по крайней мере, одно из чисел $\sin\dfrac{3}{4}S$ или $\sin\dfrac{S}{6}$ отлично от нуля. Пусть, например, $\sin\dfrac{3}{4}S \neq 0$. Тогда имеем тождество $\dfrac{\sin\frac{3}{4}(2x+S)}{\cos\frac{1}{6}(2x+S)} = -\dfrac{\sin\frac{S}{6}}{\sin\frac{3}{4}S}$, которое невозможно, так как в правой части стоит постоянная величина, а в левой — переменная.

Например, при $x = 0$ левая часть равна $\dfrac{\sin\dfrac{3S}{4}}{\cos\dfrac{S}{6}}$, а при $x = 6\pi$ она же имеет вид $\dfrac{\sin\dfrac{3}{4}(12\pi+S)}{\cos\dfrac{1}{6}(12\pi+S)} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{3S}{4}+9\pi\right)}{\cos\left(\dfrac{S}{6}+2\pi\right)} = -\dfrac{\sin\dfrac{3S}{4}}{\cos\dfrac{S}{6}}$.

Ответ: 12π.

1120. Перефразируем задачу. Найдём все p, при которых уравнение имеет хотя бы один корень. Тогда при остальных p оно корней не имеет. $4\sin^3 x + 3\cos 2x + p = 0$. Преобразуем данное уравнение: $4\sin^3 x + 3(1-2\sin^2 x) + p = 0$. $\sin x = t$, $t \in [-1;1]$. $4t^3 - 6t^2 + 3 + p = 0$, $-4t^3 + 6t^2 - 3 = p$. Обозначим $f(t) = -4t^3 + 6t^2 - 3$. Найдём множество значений $f(t)$ на $[-1;1]$. $f'(t) = -12t^2 + 12t$, $f'(t) = 0$, $-12(t^2 - t) = 0$; $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. $f(0) = -3$, $f(1) = -4+6-3 = -1$, $f(-1) = 4+6-3 = 7$. $E(f(t)) = [-3;7]$. Чтобы уравнение имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно $p \in E(f)$, то есть $p \in [-3;7]$, а чтобы уравнение не имело корней — $p \in (-\infty;-3) \cup (7;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-3) \cup (7;+\infty)$.

1121. $p \cdot \operatorname{ctg}^2 x + 4\sin x + p = 7$. Преобразуем уравнение: $p\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right) + 4\sin x + p = 7$. Обозначим $\sin x = t$, $t \in [-1;0) \cup (0;1]$. $\dfrac{p}{t^2} - p + 4t + p = 7$, $p - pt^2 + 4t^3 + pt^2 = 7t^2$, $-4t^3 + 7t^2 = p$. Обозначим $f(t) = -4t^3 + 7t^2$. Найдём множество значений $f(t)$ на $t \in [-1;0) \cup (0;1]$ $f'(t) = -12t^2 + 14t$, $f'(t) = 0$, $-2(6t^2 - 7t) = 0$, $t(6t-7) = 0$; $t_1 = 0$, $0 \notin [-1;0) \cup (0;1]$; $t_2 = \dfrac{7}{6}$, $\dfrac{7}{6} \notin [-1;0) \cup (0;1]$. При $t \to 0$ $f(t) \to 0$; $f(1) = 3$, $f(-1) = 11$, При $t \in [-1;0)$ $E(f) = (0;11]$, так как $f(t)$ непрерывна на $[-1,0)$. При $t \in (0;1]$ $E(f) = (0;3]$, так как $f(t)$ непрерывна на $(0;1]$, то есть $E(f) = (0;11]$. Чтобы уравнение $-4t^3 + 7t^2 = p$ имело хотя бы один корень (а следовательно и исходное уранение), неоходимо и достаточно $p \in (0;11]$.

Ответ: $(0;11]$.

1122. Переформулируем задачу. Найдём все p, при которых уравнение имеет хотя бы один корень. Тогда при остальных p уравнение корней не имеет. $8\sin^3 x + 7\cos 2x + p = 0$, $8\sin^3 + 7(1 - 2\sin^2 x) + p = 0$,

$8\sin^3 +7-14\sin^2 x+p=0$. $\sin x=t$, $t\in[-1;1]$. $8t^3-14t^2+7+p=0$, $-8t^3+14t^2-7=p$. Обозначим $f(t)=-8t^3+14t^2-7$. Найдём множество значений $f(t)$ на $[-1;1]$. $f'(t)=-24t^2+28t$, $f'(t)=0$, $-4t(6t-7)=0$; $t_1=0$, $0\in[-1,1]$; $t_2=\dfrac{7}{6}$, $\dfrac{7}{6}\notin[-1;1]$. $f(0)=-7$, $f(1)=-8+14-7=-1$, $f(-1)=8+14-7=15$. $E(f)=[-7;15]$. Чтобы уравнение имело хотя бы один корень, необходимо и достаточно $p\in E(f)$, то есть $p\in[-7;15]$, а чтобы уравнение не имело корней — $p\in(-\infty;-7)\cup(15;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-7)\cup(15;+\infty)$.

1123. $3\sqrt{x+1}+1=2k-k\sqrt{x+1}$. ОДЗ: $x\geqslant-1$. $\sqrt{x+1}(3+k)=2k-1$.
1 случай: $3+k=0$, $k=-3$. Тогда $2k-1=-6-1=-7$. При $k=-3$ левая часть полученного уравнения равна 0, а правая не равна 0. Корней нет. $k=-3$ удовлетворяет условию задачи.

2 случай: $3+k\neq0$, $\sqrt{x+1}=\dfrac{2k-1}{3+k}$. Это уравнение не имеет корней, если $\dfrac{2k-1}{3+k}<0$; $-3<k<\dfrac{1}{2}$. Учитывая случай 1, имеем: уравнение не имеет корней при $k\in\left[-3;\dfrac{1}{2}\right)$.

Ответ: $\left[-3;\dfrac{1}{2}\right)$.

1124. $t\cos5x-5=4t-3\cos5x$.
Преобразуем данное уравнение: $\cos5x(t+3)=4t+5$.
1) при $t+3=0$, $t=-3$, последнее уравнение обращается в неверное равенство $0=-7$, то есть при $t=-3$ данное уравнение не имеет корней.

2) $t+3\neq0$, $t\neq-3$. Тогда $\cos5x=\dfrac{4t+5}{t+3}$; $E(\cos5x)=[-1;1]$. Уравнение в этом случае не имеет коней при $\dfrac{4t+5}{t+3}>1$, $\dfrac{4t+5}{t+3}<-1$.

a) $\dfrac{4t+5}{t+3}>1$, $\dfrac{4t+5-t-3}{t+3}>0$, $\dfrac{3t+2}{t+3}>0$; $t>-\dfrac{2}{3}$, $t<-3$.

b) $\dfrac{4t+5}{t+3}<-1$, $\dfrac{4t+5+t+3}{t+3}<0$, $\dfrac{5t+8}{t+3}<0$, $-3<t<-\dfrac{8}{5}$.
Отметим на числовой оси значения t в случае 2 (см. рис. 201).

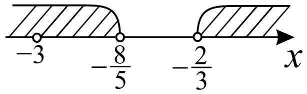


Рис. 201.

Объединяя результат с $t = -3$, получим $t < -\frac{8}{5}$, $t > -\frac{2}{3}$. Понятно, что $t = -2$ — наибольшее целое отрицательное .

Ответ: -2.

1125. $2\sin^2 x - 3t = 6t\sin^2 x + 1$.
Преобразуем данное уравнение: $\sin^2 x(2 - 6t) = 1 + 3t$.

1) При $2 - 6t = 0$, $t = \frac{1}{3}$, последнее уравнение обращается в неверное равенство $0 = 2$, то есть при $t = \frac{1}{3}$ уравнение не имеет корней.

2) При $2 - 6t \neq 0$, $t \neq \frac{1}{3}$, тогда $\sin^2 x = \frac{1+3t}{2-6t}$. Так как $E(\sin^2 x) = [0; 1]$, то данное уравнение не имеет корней при $\frac{1+3t}{2-6t} > 1$, $\frac{1+3t}{2-6t} < 0$.

a) $\frac{1+3t}{2-6t} > 1$, $\frac{1+3t-2+6t}{2-6t} > 0$, $\frac{9t-1}{2-6t} > 0$, $\frac{1}{9} < t < \frac{1}{3}$.

b) $\frac{1+3t}{2-6t} < 0$, $t < -\frac{1}{3}$, $t > \frac{1}{3}$. Отметим на числовой прямой (см. рис. 202).

Объединяя полученные значения t, получим $t < -\frac{1}{3}$, $t > \frac{1}{9}$. Наименьшее

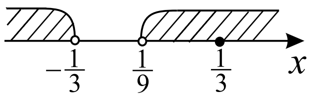


Рис. 202.

чётное натуральное: $t = 2$.

Ответ: 2.

1126. $4t\cos^2 x + 1 = 5t - 5\cos^2 x$.
Преобразуем данное уравнение: $\cos^2 x(4t + 5) = 5t - 1$.

1) при $4t + 5 = 0$, $t = -\frac{5}{4}$ последнее уравнение обращается в неверное

равенство $0 = -\dfrac{29}{4}$, то есть при $t = -\dfrac{5}{4}$ данное уравнение не имеет корней.

2) $4t + 5 \neq 0,\ t \neq -\dfrac{5}{4}$, тогда $\cos^2 x = \dfrac{5t-1}{4t+5}$. Так как $E(\cos^2 x) = [0; 1]$, то данное уравнение не имеет коней при $\dfrac{5t-1}{4t+5} > 1,\ \dfrac{5t-1}{4t+5} < 0$.

a) $\dfrac{5t-1}{4t+5} > 1,\ \dfrac{5t-1-4t-5}{4t+5} > 0,\ \dfrac{t-6}{4t+5} > 0,\ t < -\dfrac{5}{4},\ t > 6$.

b) $\dfrac{5t-1}{4t+5} < 0,\ -\dfrac{5}{4} < t < \dfrac{1}{5}$. Отметим на числовой прямой (см. рис. 203).

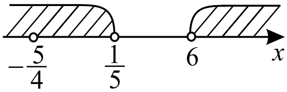


Рис. 203.

Объединяя с $t = -\dfrac{5}{4}$, получим $t < \dfrac{1}{5},\ t > 6$. Наименьшее натуральное $t = 7$.

Ответ: 7.

1127. $\log_{x^2+3}(2ax^2 + 1 - a) = 2$. Данное уравнение равносильно уравнению $2ax^2 + 1 - a = (x^2+3)^2$. Отметим, что если x_0 является корнем, то $-x_0$ также является корнем. Отсюда $x_0 = -x_0,\ 2x_0 = 0,\ x_0 = 0$. Таким образом, необходимым условием единственности корня является равенство его нулю. Найдём a: $2a^2 \cdot 0^2 + 1 - a = (0^2+3)^2,\ 1 - a = 9,\ a = -8$. Проверка: $a = -8$. $\log_{x^2+3}(-16x^2 + 1 + 8) = 2\ \ -16x^2 + 9 = (x^2+3)^2$, $-16x^2 + 9 = x^4 + 6x^2 + 9,\ x^4 + 22x^2 = 0,\ x^2(x^2+22) = 0;\ x_1 = 0$, $x^2 + 22 \neq 0$. $x = 0$ — единственный корень.

Ответ: -8.

1128. $\log_{2a+1}(6ax - x^2) = 2$. Данное уравнение равносильно уравнению $6ax - x^2 = (2a+1)^2,\ 6ax - x^2 = 4a^2 + 4a + 1,\ x^2 - 6ax + 4a^2 + 4a + 1 = 0$. Оно имеет один корень если $D = 0$. $D = 36a^2 - 16a^2 - 16a - 4$, $20a^2 - 16a - 4 = 0,\ 5a^2 - 4a - 1 = 0$. Так как $5 - 4 - 1 = 0$, то $a_1 = 1$; $a_2 = -\dfrac{1}{5}$.

Проверка:

1) $a = 1$. $\log_3(6x - x^2) = 2,\ 6x - x^2 = 9,\ x^2 - 6x + 9 = 0,\ (x-3)^2 = 0$, $x = 3$.

2) $a=-\frac{1}{5}$. $\log_{\frac{3}{5}}(-\frac{6}{5}x-x^2)=2$, $-\frac{6}{5}x-x^2=\frac{9}{25}$, $x^2+\frac{6}{5}x+\frac{9}{25}=0$, $\left(x+\frac{3}{5}\right)^2=0$, $x=-\frac{3}{5}$.

Ответ: $1;\ -\frac{1}{5}$.

1129. Необходимо найти все значения параметра a, при которых уравнение $\cos^2 x+(5-2a)\sin x=7-7a-3a^2$ не имеет корней. Сформулируем задачу иначе: найдем те значения параметра a, при которых уравнение имеет корни, тогда при остальных a корней нет.
$1-\sin^2 x+(5-2a)\sin x-7+7a+3a^2=0$,
$\sin^2 x-(5-2a)\sin x+6-7a-3a^2=0$. Замена: $\sin x=t$, $|t|\leqslant 1$,
$t^2-(5-2a)t+6-7a-3a^2=0$;

$$t_{1,2}=\frac{(5-2a)\pm\sqrt{25-20a+4a^2-24+28a+12a^2}}{2},$$

$$t_{1,2}=\frac{(5-2a)\pm\sqrt{16a^2+8a+1}}{2}=\frac{(5-2a)\pm|4a+1|}{2}.$$

Уравнение имеет корни, если $\left|\frac{(5-2a)+|4a+1|}{2}\right|\leqslant 1$ или $\left|\frac{(5-2a)-|4a+1|}{2}\right|\leqslant 1$.

1) $-1\leqslant\frac{5-2a+|4a+1|}{2}\leqslant 1$, $-2\leqslant 5-2a+|4a+1|\leqslant 2$,

$$\begin{cases}5-2a+|4a+1|\geqslant -2,\\5-2a+|4a+1|\leqslant 2.\end{cases}$$

a) $\begin{cases}4a+1\geqslant 0,\\5-2a+4a+1\geqslant -2,\\5-2a+4a+1\leqslant 2;\end{cases}$ $\begin{cases}a\geqslant -\frac{1}{4},\\2a\geqslant -8,\\2a\leqslant -4;\end{cases}$ $\begin{cases}a\geqslant -\frac{1}{4},\\a\geqslant -4,\\a\leqslant -2.\end{cases}$ Решений нет.

b) $\begin{cases}4a+1<0,\\5-2a-4a-1\geqslant -2,\\5-2a-4a-1\leqslant 2;\end{cases}$ $\begin{cases}a<-\frac{1}{4},\\-6a\geqslant -6,\\-6a\leqslant -2;\end{cases}$ $\begin{cases}a<-\frac{1}{4},\\a\leqslant 1,\\a\geqslant \frac{1}{3}.\end{cases}$ Решений нет.

2) $-1\leqslant\frac{5-2a-|4a+1|}{2}\leqslant 1$, $-2\leqslant 5-2a-|4a+1|\leqslant 2$,

$$\begin{cases} 5-2a-|4a+1| \geqslant -2, \\ 5-2a-|4a+1| \leqslant 2. \end{cases}$$

a) $\begin{cases} 4a+1 \geqslant 0, \\ 5-2a-4a-1 \geqslant -2, \\ 5-2a-4a-1 \leqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a < -\dfrac{1}{4}, \\ -6a \geqslant -6, \\ -6a \leqslant -2; \end{cases}$ $\begin{cases} a < -\dfrac{1}{4}, \\ a \leqslant 1, \\ a \geqslant \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $\dfrac{1}{3} \leqslant a \leqslant 1.$

b) $\begin{cases} 4a+1 < 0, \\ 5-2a+4a+1 \geqslant -2, \\ 5-2a+4a+1 \leqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant -\dfrac{1}{4}, \\ 2a \geqslant -8, \\ 2a \leqslant -4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant -\dfrac{1}{4}, \\ a \geqslant -4, \\ a \leqslant -2; \end{cases}$ $-2 \leqslant a \leqslant -4.$

Уравнение не имеет корней, если $a < 4$ или $-2 < a < \dfrac{1}{3}$, или $a > 1$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(-2; \dfrac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

1130. Необходимо найти все значения параметра a, при которых уравнение $5a\cos x - 2\sin^2 x = 3a^2 + 7a$ не имеет корней. Сформулируем задачу иначе: найдем все значения параметра a, при которых уравнение имеет корни, тогда при остальный a корней нет.

$5a\cos x - 2(1-\cos^2 x) = 3a^2 + 7a$,

$2\cos^2 x + 5a\cos x - 2 - 3a^2 - 7a = 0$, Замена: $\cos x = t$, $|t| \leqslant 0$.

$2t^2 + 5at - 2 - 3a^2 - 7a = 0$; $t_{1,2} = \dfrac{-5a \pm \sqrt{25a^2+16+24a^2+56a}}{4}$,

$t_{1,2} = \dfrac{-5a \pm |7a+4|}{4}$. Уранение имеет корни, если $\left|\dfrac{-5a+|7a+4|}{4}\right| \leqslant 1$ или $\left|\dfrac{-5a-|7a+4|}{4}\right| \leqslant 1$.

1) $-1 \leqslant \dfrac{-5a+|7a+4|}{4} \leqslant 1$, $-4 \leqslant -5a+|7a+4| \leqslant 4$.

$$\begin{cases} -5a+|7a+4| \geqslant -4, \\ -5a+|7a+4| \leqslant 4. \end{cases}$$

a) $\begin{cases} 7a+4 \geqslant 0, \\ -5a+7a+4 \geqslant -4, \\ -5a+7a+4 \leqslant 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant -\dfrac{4}{7}, \\ 2a \geqslant -8, \\ 2a \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant -\dfrac{4}{7}, \\ a \geqslant -4, \\ a \leqslant 0; \end{cases}$ $-\dfrac{4}{7} \leqslant a \leqslant 0.$

b) $\begin{cases} 7a+4<0, \\ -5a-7a-4 \geqslant -4, \\ -5a-7a-4 \leqslant 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a<-\dfrac{4}{7}, \\ -12a \geqslant 0, \\ -12a \leqslant 8; \end{cases}$ $\begin{cases} a<-\dfrac{4}{7}, \\ a \leqslant 0, \\ a \geqslant \dfrac{2}{3}. \end{cases}$ Решений нет.

2) $-1 \leqslant \dfrac{-5a-|7a+4|}{4} \leqslant 1,\ -4 \leqslant -5a-|7a+4| \leqslant 4,$

$\begin{cases} -5a-|7a+4| \geqslant -4, \\ -5a-|7a+4| \leqslant 4. \end{cases}$

a) $\begin{cases} 7a+4 \geqslant 0, \\ -5a-7a-4 \geqslant -4, \\ -5a-7a-4 \leqslant 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant -\dfrac{4}{7}, \\ -12a \geqslant 0, \\ -12a \leqslant 8; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant -\dfrac{4}{7}, \\ a \leqslant 0, \\ a \geqslant \dfrac{2}{3}. \end{cases}$ Решений нет.

b) $\begin{cases} 7a+4<0, \\ -5a+7a+4 \geqslant -4, \\ -5a+7a+4 \leqslant 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a<-\dfrac{4}{7}, \\ 2a \geqslant -8, \\ 2a \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a<-\dfrac{4}{7}, \\ a \geqslant -4, \\ a \leqslant 0; \end{cases}$ $-4 \leqslant a \leqslant -\dfrac{4}{7}.$

Уравнение имеет корни, если $-4 \leqslant a \leqslant 0$, значит уравнение не имеет корней, если $a<-4$ или $a>0$.

Ответ: $(-\infty;-4) \cup (0;+\infty)$.

1131. По условию пирамида S_{ABCD} — правильная: $ABCD$ квадрат, точка O — центр квадрата, SO — высота, SM — апофема. Через ребро AB проведена плоскость ABQ. Высота SO пересекает плоскость ABQ в точке K (см. рис. 204). Необходимо найти $\dfrac{SK}{OK}$.

1. $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel DSC \Rightarrow AB \parallel PQ$, отсюда $PQ \parallel CD$.

2. $\triangle\ PSQ \sim\triangle\ DSC$ ($\angle S$ — общий, $\angle SPQ = \angle SDC$ как соответственные при $PQ \parallel CD$ и секущей SD).

$\dfrac{SP}{SD} = \dfrac{SL}{SM} = k$, где k — коэффициент подобия.

$\dfrac{S_{PSQ}}{S_{DSC}} = k^2,\ S_{PSQ} = Sk^2$, где S — площадь боковой грани пирамиды.

3. $\triangle\ ASP$ и $\triangle\ ASD$ имеют общую высоту, проведённую из точки A, значит, $\dfrac{S_{ASP}}{S_{ASD}} = \dfrac{SP}{SD} = k,\ S_{ASP} = Sk$.

4. По условию $S_{ASB} + S_{BSQ} + S_{PSQ} + S_{ASP} = 2S$, то есть

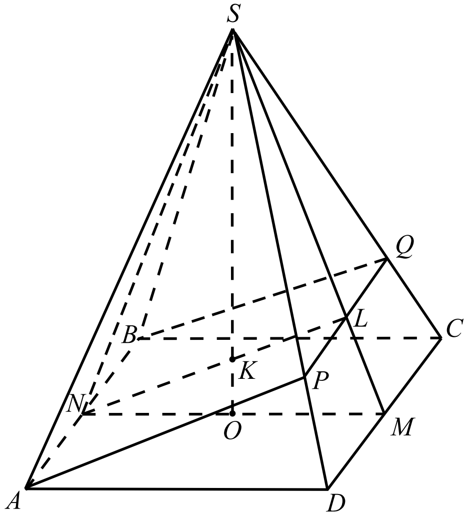


Рис. 204.

$S + Sk + Sk^2 + Sk = 2S$, $S(k+1)^2 = 2S$, $k > 0$, $k = \sqrt{2} - 1$.

5. Рассмотрим треугольник NSM (см. рис. 205).

Проведём $LT \perp SO$.

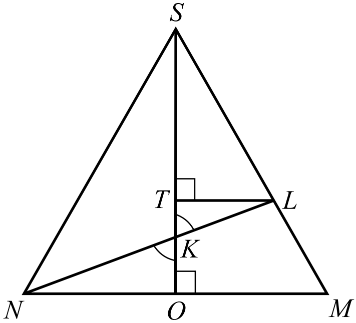


Рис. 205.

а) $\triangle\ STL \sim\triangle\ SOM$ ($\angle STL = \angle SOM = 90°$, $\angle SLT = \angle SMO$ как соответственные при $LT \parallel MO$ и секущей SM).

$\dfrac{ST}{SO} = \dfrac{SL}{SM} = \dfrac{TL}{OM} = \sqrt{2} - 1$, $ST = (\sqrt{2} - 1)SO$.

б) $\triangle\ LTK \sim\triangle\ NOK$ ($\angle LTK = \angle NOK = 90°$, $\angle LKT = \angle NKO$ как вертикальные).

$\dfrac{KT}{OK} = \dfrac{TL}{ON} = \sqrt{2} - 1$, $KT = (\sqrt{2} - 1)OK$.

в) $SK = ST + KT = (\sqrt{2} - 1)SO + (\sqrt{2} - 1)OK =$
$= (\sqrt{2} - 1)(SK + OK) + (\sqrt{2} - 1)OK$.

Получаем $SK = (\sqrt{2} - 1)SK + 2(\sqrt{2} - 1)OK$,

$(2 - \sqrt{2})SK = 2(\sqrt{2} - 1)KO$,

$\dfrac{SK}{KO} = \dfrac{2(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2} : 1$.

1132. По условию пирамида S_{ABCD} правильная: $ABCD$ — квадрат, точка O — центр квадрата, SO — высота, SM — апофема. Через ребро AB проведена плоскость ABQ, пересекающая высоту пирамиды SO в точке K, $SK = KO$ (см. рис.206).

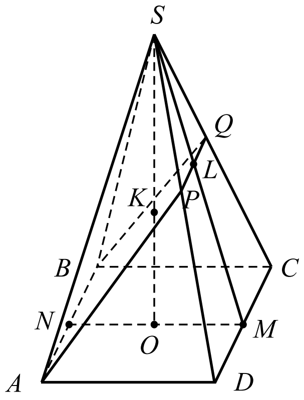


Рис. 206.

1) Найдём отношение, в котором указанная плоскость делит апофему SM, то есть найдём $k = \dfrac{SL}{SM}$.

Рассмотрим $\triangle SNM$ (см. рис.207).

1. $\triangle STL \sim \triangle SOM$ ($\angle STL = \angle SOM = 90^\circ$, $\angle SLT = \angle SMO$ как соответственные при $LT \| MO$ и секущей SM).

$\dfrac{ST}{SO} = \dfrac{SL}{SM} = \dfrac{TL}{OM} = k$, $ST = k \cdot SO$.

2. $\triangle LTK \sim \triangle NOK$ ($\angle LTK = \angle NOK = 90^\circ$, $\angle LKT = \angle NKO$ как

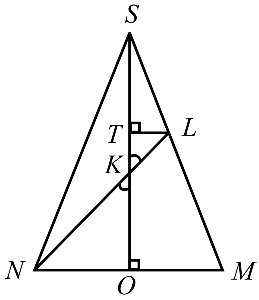


Рис. 207.

вертикальные).

$\dfrac{KT}{KO} = \dfrac{TL}{ON} = k, KT = k \cdot KO = \dfrac{1}{2}k \cdot SO.$

3. По условию $SK = KO = \dfrac{1}{2}SO$, тогда

$ST + TK = \dfrac{1}{2}SO, k \cdot SO + \dfrac{k}{2} \cdot SO = \dfrac{1}{2}SO, \dfrac{3}{2}k = \dfrac{1}{2}, k = \dfrac{1}{3}.$

2) $AB \| CD \Rightarrow AB \| DSC \Rightarrow AB \| PQ$, тогда $PQ \| CD$.

$\triangle PSQ \sim \triangle DSC, \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{SL}{SM} = k = \dfrac{1}{3}$, тогда $\dfrac{S_{SPQ}}{S_{SDC}} = k^2, S_{SPQ} = \dfrac{1}{9}S,$

где S — площадь боковой грани пирамиды.

Треугольники ASP и APD имеют общую высоту, проведённую из точки A, значит $\dfrac{S_{ASP}}{S_{ASD}} = \dfrac{SP}{SD} = k, S_{ASD} = \dfrac{1}{3}S.$

Итак, $S_{ASB} + S_{ASP} + S_{BSQ} + S_{PSQ} = S + \dfrac{1}{3}S + \dfrac{1}{3}S + \dfrac{1}{9}S = \dfrac{16}{9}S.$

Таким образом, плоскость ABQ делит площадь боковой поверхности в отношении $\dfrac{\frac{16}{9}S}{4S - \frac{16}{9}S} = \dfrac{\frac{16}{9}S}{\frac{20}{9}S} = \dfrac{4}{5}.$

Ответ: $4 : 5$.

1134. 1) Пусть $AB = a$, $A_1B_1 = b$.

Сечением пирамиды плоскостью, перпендикулярной основанию и проходящей через ребро A_1D_1, является равнобедренная трапеция MA_1D_1K (см. рис. 208).

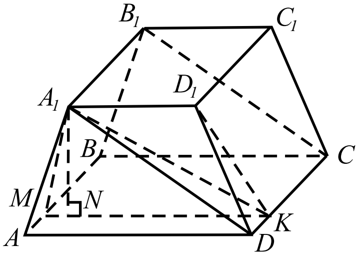


Рис. 208.

Сечением пирамиды плоскостью, проходящей через противоположные стороны верхнего и нижнего её оснований, также является равнобедренная трапеция, например, A_1B_1CD.

2) Плоскости MA_1D_1 и A_1B_1C пересекаются по прямой A_1K, причём $A_1K \perp DC$ (по теореме о трёх перпендикулярах — $DC \perp MK$, MK — проекция A_1K на плоскость ABC). Следовательно, A_1K — высота трапеции A_1B_1CD. Тогда площадь трапеции

$$S_{A_1B_1CD} = \frac{A_1B_1 + DC}{2}A_1K = \frac{a+b}{2}A_1K.$$

3) MA_1D_1 и DD_1C_1 пересекаются по прямой D_1K, причём $D_1K \perp DC$ (по теореме о трёх перпендикулярах $A_1K \perp DC$, A_1K — проекция D_1K на плоскость DA_1B_1C). Следовательно, D_1K — высота трапеции DD_1C_1C.

Тогда площадь трапеции $S_{DD_1C_1C} = \dfrac{D_1C_1 + DC}{2}\cdot D_1K = \dfrac{a+b}{2}D_1K.$

4) Следовательно, $\dfrac{S_{DD_1C_1C}}{S_{A_1B_1CD}} = \dfrac{D_1K}{A_1K}.$

5) $\angle D_1A_1K = \angle A_1KM$ (как накрест лежащие); $\angle A_1KM = 15^\circ$ (как угол между плоскостями A_1B_1C и ABC).

Значит, $\angle D_1A_1K = 15^\circ$. $\angle A_1D_1K = 180^\circ - \angle D_1KM$; $\angle D_1KM = 60^\circ$ (как угол между плоскостями D_1C_1D и ABC). Из $\triangle\ A_1D_1K$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{A_1K}{\sin\angle A_1D_1K} = \frac{D_1K}{\sin\angle D_1A_1K};$$

$$\frac{D_1K}{A_1K} = \frac{\sin\angle D_1A_1K}{\sin\angle A_1D_1K} = \frac{\sin\angle D_1A_1K}{\sin(180^\circ - \angle D_1KM)} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} =$$

$$= \frac{2(\sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ)}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1) =$$

$= \dfrac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}-1).$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{3}-1).$

1135. Пусть $AB = a$, $A_1B_1 = b$, тогда $\dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \dfrac{b^2}{a^2}$.

1) Сечением пирамиды плоскостью, перпендикулярной основанию и проходящей через ребро A_1D_1, является равнобедренная трапеция MA_1D_1K (см. рис. 209).

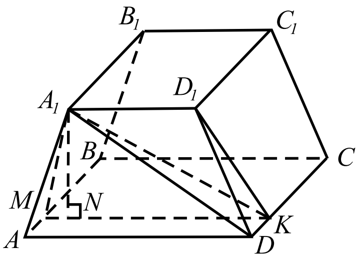


Рис. 209.

Пусть A_1B_1CD — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований.
Тогда $MA_1D_1K \cap A_1B_1CD = A_1K$; $MA_1D_1K \cap ABCD = MK$. Так как $A_1K \perp DC$ и $MK \perp DC$, то $\angle A_1KM$ равен углу между плоскостями DA_1B_1 и ABC, значит, $\angle A_1KM = 15°$.

Так как $D_1K \perp DC$ ($D_1K = MA_1D_1K \cap DD_1C_1C$) и $MK \perp DC$, то $\angle D_1KM$ равен углу между плоскостями DD_1C_1 и ABC, значит, $\angle D_1KM = \angle A_1MK = 45°$.

2) Пусть A_1N — высота трапеции MA_1D_1K, тогда из $\triangle MA_1N$: $A_1N = MN \operatorname{tg}\angle A_1MN = \dfrac{MK - A_1D_1}{2}\operatorname{tg}45° = \dfrac{a-b}{2}$.

Из $\triangle\ A_1NK$:

$$A_1N = NK \operatorname{tg}\angle A_1KN = \frac{MK + A_1D_1}{2}\operatorname{tg}15° = \frac{a+b}{2}\operatorname{tg}(45° - 30°) =$$

$$= \frac{a+b}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}45° - \operatorname{tg}30°}{1 + \operatorname{tg}45°\operatorname{tg}30°} = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{a+b}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} =$$

$= \dfrac{(a+b)(2-\sqrt{3})}{2}$.

Получаем: $\dfrac{(a-b)}{2} = \dfrac{(a+b)(2-\sqrt{3})}{2}$; $b = \dfrac{a(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $\dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

1136. Рассмотрим правильный тетраэдр $DABC$ (см. рис. 210), DH и CK — его высоты.

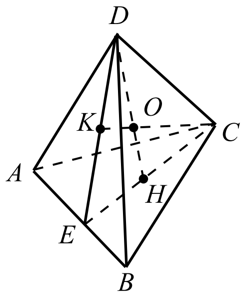


Рис. 210.

Пусть сторона тетраэдра равна a.

CE и DE — высоты равносторонних треугольников ABC и ABD, $CE = DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HE = \dfrac{1}{3}CE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $DH = \sqrt{DE^2 - EH^2} = a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Рассмотрим равнобедренный треугольник CDE (см. рис. 211).

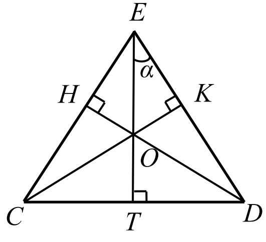


Рис. 211.

ET — высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, значит ET также является медианой. $CT = TD = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a$.

Из прямоугольного треугольника CKD находим $KD = \frac{a}{\sqrt{3}}$, тогда

$EK = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. $\sin\alpha = \frac{TD}{ED} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $OK = EK \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{6}} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{4}CK$,

тогда $\frac{CO}{OK} = \frac{3}{1} = 3$.

Ответ: 3.

1137. Пусть B_2 — середина ребра BB_1, C_2 — середина ребра B_1C_1, M и N — точки пересечения прямой B_2C_2 с прямыми BC и CC_1 соответственно, K — точка пересечения AN и A_1C_1 (см. рис. 212).

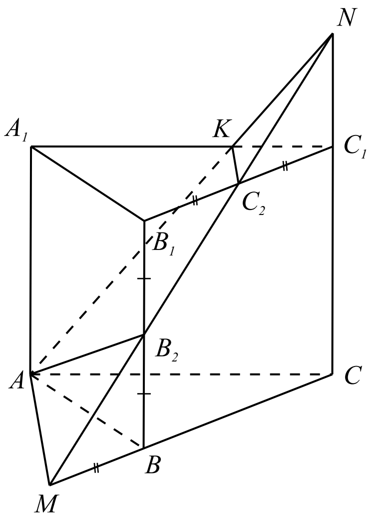


Рис. 212.

1) $\triangle B_2B_1C_2 = \triangle B_2BM$ ($BB_2 = B_1B_2$ по условию, $\angle B_2BM = \angle B_2B_1C_2 = 90°$, $\angle BB_2M = \angle B_1B_2C_2$ как вертикальные), следова-

тельно, $BM = B_1C_2 = \dfrac{B_1C_1}{2} = \dfrac{BC}{2}$. Отсюда $\dfrac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{BM}{BC}$, так как у этих треугольников высота, проведённая из вершины A, будет общей.

$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ABC} \cdot \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{36}{2} = 18$. $V_{B_2ABM} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABM} \cdot BB_2 =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 18 \cdot 5 = 30$.

2) $\triangle B_2B_1C_2 = \triangle NC_1C_2$ ($B_1C_2 = C_1C_2$ по условию, $\angle B_2B_1C_2 =$ $= \angle NC_1C_2 = 90°$, $\angle NC_2C_1 = \angle B_2C_2B_1$ как вертикальные), следовательно $NC_1 = B_1B_2 = 5$.

3) $\triangle KNC_1 \sim \triangle ANC$, $\triangle C_2NC_1 \sim \triangle MNC$ (в обоих случаях прямоугольные с общим острым углом). $\dfrac{KC_1}{AC} = \dfrac{C_2C_1}{MC} = \dfrac{NC_1}{NC} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$.

Отсюда $\triangle KC_1C_2 \sim \triangle ACM$ с коэффициентом подобия $\dfrac{1}{3}$. Поэтому

$\dfrac{S_{\triangle KC_1C_2}}{S_{\triangle ACM}} = \dfrac{1}{9}$.

4) $V_{NMAC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle MAC} \cdot NC = \dfrac{1}{3} \cdot (S_{\triangle MAB} + S_{\triangle ABC}) \cdot (NC_1 + C_1C) =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot (18 + 36) \cdot (5 + 10) = 270$.

5) $\dfrac{V_{NC_2KC_1}}{V_{NMAC}} = \dfrac{S_{\triangle KC_1C_2}}{S_{\triangle ACM}} \cdot \dfrac{NC_1}{NC} = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{27}$. Отсюда $V_{NC_2KC_1} = 10$.

6) Объём одной из частей, полученных при сечении призмы, равен $V_{NMAC} - V_{NC_2KC_1} - V_{B_2ABM} = 270 - 10 - 30 = 230$.

7) Объём другой части равен $V_{ABCA_1B_1C_1} - 230 = 36 \cdot 10 - 230 = 130$.

Ответ: 130.

1139. В прямоугольной системе координат построим заданные точки и соответствующее условию задачи осевое сечение усечённого конуса (см. рис. 213).

$S_{\text{бок}} = \pi l(R - r)$, $l = AB$, $R = BF$, $r = AK$.

$AB = \sqrt{(-2+6)^2 + (4-1)^2} = 5$, $BF = 6$, $AK = 2$,

$S_{\text{бок}} = 5\pi(6 + 2) = 40\pi$.

Ответ: 40π.

1140. В прямоугольной системе координат построим заданные точки и соответствующее условию задачи осевое сечение конуса (см. рис. 214).

$S_{\text{б}} = \pi Rl$,

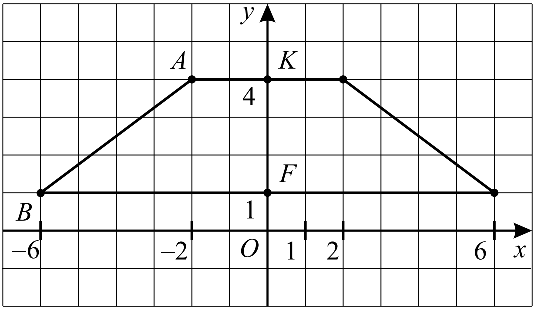


Рис. 213.

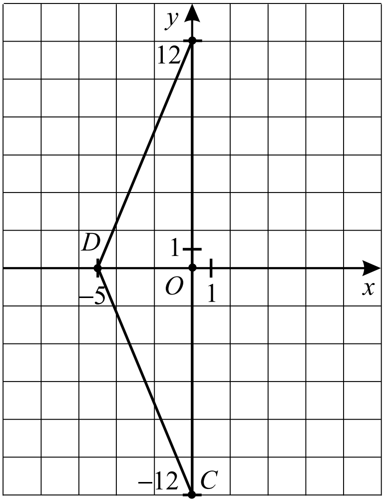


Рис. 214.

$l = DC, R = OC,$
$DC = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$
$S_б = \pi \cdot 12 \cdot 13 = 156\pi.$

Ответ: 156π.

1141. 1. На рисунке 215 изображена проекция шара на плоскость, перпендикулярную прямой ℓ. При этом O — центр шара, H — точка, в которую проецируется прямая ℓ, PQ и KL — проекции меньшего и большего сечений соответственно. Тогда по условию $OH = 2$, $OM = 1$,

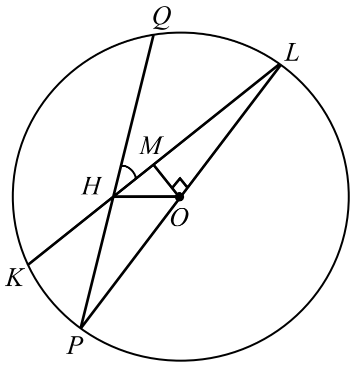


Рис. 215.

$\angle QHL = \dfrac{\pi}{6}$.

2. В прямоугольном треугольнике HMO $\sin\angle MHO = \dfrac{MO}{OH} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\angle MHO = \dfrac{\pi}{6}$.

3. По условию площадь большего сечения равна $\pi \cdot ML^2 = 14\pi$. Отсюда $ML = \sqrt{14}$. Так как $\triangle OML$ — прямоугольный, то радиус шара $OL = \sqrt{OM^2 + ML^2} = \sqrt{15}$.

4. В треугольнике PHO: $OP = OL = \sqrt{15}$, $OH = 2$,

$\angle PHO = \pi - (\angle QHL + \angle MHO) = \pi - \left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{2}{3}\pi$.

Из теоремы косинусов следует: $OP^2 = PH^2 + OH^2 - 2 \cdot PH \cdot OH \cdot$

$\cdot \cos\angle PHO$; $15 = PH^2 + 4 + 2 \cdot PH \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2}$; $PH^2 + 2 \cdot PH - 11 = 0$.

Учитывая, что $PH > 0$, получим: $PH = 2\sqrt{3} - 1$.

5. $MH = \sqrt{OH^2 - OM^2} = \sqrt{3}$. Тогда $LH = ML + MH = \sqrt{14} + \sqrt{3}$; $KH = 2 \cdot ML - LH = \sqrt{14} - \sqrt{3}$; $LH \cdot KH = (\sqrt{14} + \sqrt{3})(\sqrt{14} - \sqrt{3}) = 11$.

По свойству пересекающихся хорд окружности $LH \cdot KH = PH \cdot HQ$; $11 = (2\sqrt{3} - 1) \cdot HQ$. Тогда $HQ = \dfrac{11}{2\sqrt{3} - 1}$; $PQ = PH + HQ =$

$= 2\sqrt{3} - 1 + \dfrac{11}{2\sqrt{3} - 1} = 4\sqrt{3}$.

6. Площадь меньшего сечения равна $\pi \cdot \dfrac{PQ^2}{4} = 12\pi$.

Ответ: 12π.

1142. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры сфер, A_1, A_2, A_3 — их проекции на плоскость α, тогда по условию треугольник $A_1A_2A_3$ — прямоугольный. Будем считать, что $A_1A_2 = 10$, $A_1A_3 = 20$.
Обозначим $r_1 = A_1O_1$, $r_2 = A_2O_2$, $r_3 = A_3O_3$ — радиусы сфер.
Рассмотрим четырёхугольник $O_1A_1A_2O_2$ (см. рис. 216).

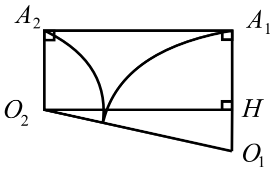


Рис. 216.

Так как $O_1A_1 \perp \alpha$ и $O_2A_2 \perp \alpha$, то $O_1A_1 \| O_2A_2$.
$\triangle O_1O_2H$ — прямоугольный, $O_2H = A_1A_2 = 10$, тогда по теореме Пифагора $O_1O_2^2 = O_1H^2 + O_2H^2$;

$(r_1 + r_2)^2 = (r_2 - r_1)^2 + 10^2$; $4r_1r_2 = 100$; $r_1r_2 = 25$.
Аналогично рассматривая трапеции $O_2A_2A_3O_3$ и $O_1A_1A_3O_3$, получим $r_2r_3 = 100$ и $r_1r_3 = 125$.

Итак, получаем систему уравнений $\begin{cases} r_1r_2 = 25, \\ r_2r_3 = 100, \\ r_1r_3 = 125; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{r_2}{r_3} = \dfrac{1}{5}, \\ r_2r_3 = 100, \\ r_1r_3 = 125; \end{cases}$

$\begin{cases} {r_2}^2 = 20, \\ r_2r_3 = 100, \\ r_1r_3 = 125; \end{cases}$ $\begin{cases} r_1 = 2{,}5\sqrt{5} \\ r_2 = 2\sqrt{5}, \\ r_3 = 10\sqrt{5}. \end{cases}$

Таким образом, $r_1 + r_2 + r_3 = 14{,}5\sqrt{5}$.

Ответ: $14{,}5\sqrt{5}$.

1143. Проекции A_1, A_2, A_3 центров O_1, O_2, O_3 данных шаров на плоскость α являются вершинами правильного треугольника, A — его центр (см. рис. 217).
Найдём r — радиус четвёртого шара.
Рассмотрим фрагмент сечения данной конструкции плоскостью, проходящей через точки A, A_1 и O_1 (см. рис. 218), O — центр четвёртого шара.

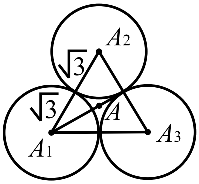


Рис. 217.

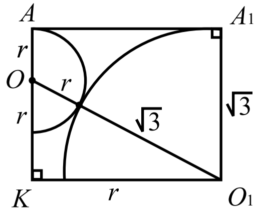


Рис. 218.

$AA_1 = A_1A_2\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2.$

В прямоугольном треугольнике OKO_1 имеем $OK^2 + O_1K^2 = OO_1^2$,
$(\sqrt{3}-r)^2 + r^2 = (\sqrt{3}+r)^2$, $4 = 4r\sqrt{3}$, $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Найдём V — объём пирамиды $OO_1O_2O_3$. Высота этой пирамиды OK равна $h = \sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Основанием пирамиды $OO_1O_2O_3$ является правильный треугольник $O_1O_2O_3$ со стороной $2\sqrt{3}$, его площадь равна $S = \dfrac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$.

Таким образом, $V = \dfrac{1}{3}hS = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 3\sqrt{3} = 2$.

Ответ: $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, V = 2$.

1144. Пусть $DABC$ — правильная пирамида с основанием ABC, DH — её высота, O — центр описанной сферы, боковые рёбра наклонены под углом 60° к плоскости основания (см. рис. 219).

$\triangle ABC$ — правильный, H — точка пересечения его медиан. Требуется найти отношение $\dfrac{DH}{2R - DH}$, где R — радиус описанной сферы.

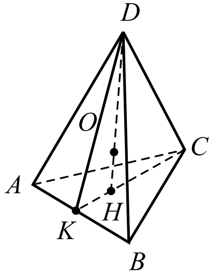


Рис. 219.

Пусть $AB = a$, тогда $AC = BC = a$. $CH = \frac{2}{3}CK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
$\triangle DHC$ — прямоугольный, $\angle DCH = 60^\circ$, тогда $DH = CH\sqrt{3} = a$. Найдём R (см. рис. 220). $\triangle OHC$ — прямоугольный, $OH = a - R$, то-

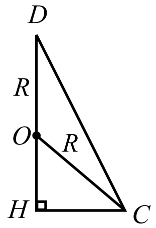


Рис. 220.

гда по теореме Пифагора $OH^2 + HC^2 = OC^2$, $(a - R)^2 + (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 = R^2$,

$a^2 - 2aR + R^2 + \frac{a^2}{3} = R^2$. $\frac{4}{3}a^2 = 2aR$, $R = \frac{2}{3}a$.

Итак, $\frac{DH}{2R - DH} = \frac{a}{\frac{4}{3}a - a} = 3$.

Ответ: 3 : 1.

1145. Пусть $DABC$ — правильная пирамида с основанием ABC, DH — её высота, O — центр описанной сферы (см. рис. 222), боковые рёбра наклонены под углом 30° к плоскости основания (см. рис. 221).
$\triangle ABC$ — правильный, H — точка пересечения его медиан. Требуется найти отношение $\frac{DH}{2R - DH}$, где R — радиус описанной сферы.

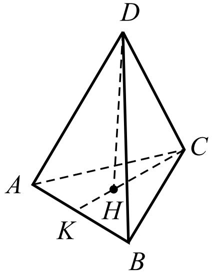


Рис. 221.

Пусть $AB = a$, тогда $AC = BC = a$. $CH = \frac{2}{3}CK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\triangle DHC$ — прямоугольный, $\angle DCH = 30^\circ$, тогда $DH = \frac{CH}{\sqrt{3}} = \frac{a}{3}$.

Найдём R (см. рис.222). $\triangle OHC$ — прямоугольный, $OH = R - \frac{a}{3}$, тогда по теореме Пифагора $OH^2 + HC^2 = OC^2$, $\left(R - \frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = R^2$, $R^2 - \frac{2aR}{3} + \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{3} = R^2$. $\frac{4}{9}a^2 = \frac{2}{3}aR$, $\frac{2}{3}a = R$, $R = \frac{2}{3}a$.

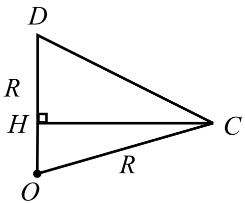


Рис. 222.

Итак, $\frac{DH}{2R - DH} = \frac{\frac{1}{3}a}{\frac{4}{3}a - \frac{1}{3}a} = \frac{1}{3}$.

Ответ: 1 : 3.

1146. Дано: $SABCD$ — правильная пирамида. $SC : MC = 4 : 3$; $S_{ABCD} =$
$= 30$; O — центр сферы; OB — радиус сферы; $OB \perp BC$. Точки S, M

лежат на сфере.
Найти: V_{SABCD}.
Решение. Пусть SK — высота пирамиды (см. рис. 223). Тогда её объём $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SK \cdot SABCD = 10SK$.

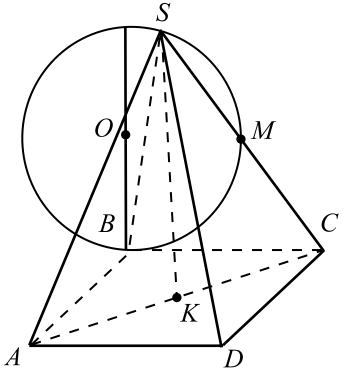


Рис. 223.

Найдём SK.
1) Сечением сферы плоскостью SBC является окружность. Так как по условию $BC \perp OB$, то BC — касательная к рассматриваемой окружности, а SM — хорда. Следовательно, по теореме о касательной и секущей, проведённых из одной точки, имеем: $BC^2 = SC \cdot MC$.
2) По условию $SC : MC = 4 : 3$. Следовательно, $SC = 4x$; $MC = 3x$. Тогда $BC^2 = 12x^2$; $x = \frac{BC\sqrt{3}}{6}$; $SC = \frac{2\sqrt{3}BC}{3}$.
3) $CK = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + DC^2}}{2} = \frac{BC\sqrt{2}}{2}$.
4) Из $\triangle SKC$ находим $SK = \sqrt{SC^2 - KC^2} = \sqrt{\frac{4BC^2}{3} - \frac{BC^2}{2}} =$
$= \frac{BC\sqrt{30}}{6}$.

Согласно условию, площадь основания пирамиды $SABCD = BC^2 = 30$. Значит, $BC = \sqrt{30}$; $SK = 5$.
5) $V_{SABCD} = 10SK = 50$.

Ответ: 50.

1147. Пусть DO — высота пирамиды $DABC$, $C_1H \perp ABC$, $DK \perp AB$ (см. рис. 224).

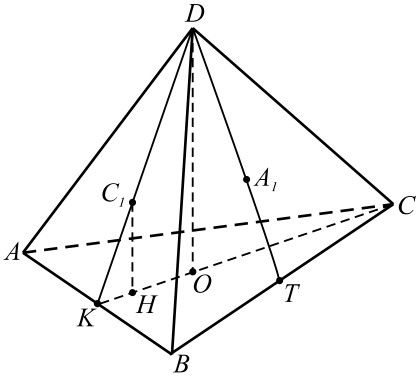


Рис. 224.

.

Треугольники DAB, DBC и DAC — равные между собой равнобедренные треугольники, наклонённые под одним и тем же углом к плоскости ABC, поэтому точки A_1, B_1 и C_1 лежат в плоскости, параллельной плоскости ABC. Высота пирамиды $D_1A_1B_1C_1$ равна расстоянию между плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$ и равна длине отрезка C_1H.
Обозначим $AB = BC = CA = a$, тогда $DK = a$.
Рассмотрим $\triangle DAB$ (см. рис. 225).

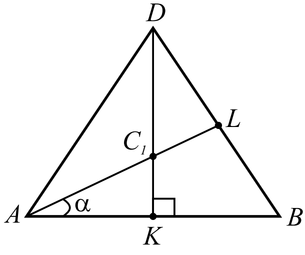


Рис. 225.

.

$$DB = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}. \; S_{ADB} = \frac{1}{2} \cdot DK \cdot AB = \frac{1}{2}a^2, \; S_{ADB} =$$

$= \frac{1}{2} \cdot AL \cdot BD$, откуда $AL = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ и $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. $C_1K = AK \cdot$ $\cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}a$. $\triangle DKO \sim \triangle C_1KH$, тогда $\frac{C_1H}{DO} = \frac{C_1K}{DK} = \frac{1}{4}$, $C_1H = \frac{1}{4}DO$. $OK = \frac{1}{3}CK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $DO = \sqrt{DK^2 - OK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{12}} =$ $= \frac{a\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$, $C_1H = \frac{1}{4}DO = \frac{a\sqrt{11}}{8\sqrt{3}}$. $\triangle DC_1A_1 \sim \triangle DKT$, тогда $\frac{C_1A_1}{KT} =$ $= \frac{DC_1}{DK} = \frac{3}{4}$, $C_1A_1 = \frac{3}{4}KT = \frac{3}{8}AC = \frac{3}{8}a$, $S_{A_1B_1C_1} =$ $= \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot \frac{A_1B_1\sqrt{3}}{2} = \frac{A_1B_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{64 \cdot 4}$.

Итак, $V_{D_1A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}C_1H \cdot S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{8\sqrt{3}} \cdot \frac{9a^2\sqrt{3}}{64 \cdot 4} = \frac{3a^3\sqrt{11}}{8^3 \cdot 4} =$ $= \frac{3 \cdot 8^3 \cdot 11^2}{8^3 \cdot 4} = 90{,}75$.

Ответ: 90,75.

1149. 1) Найдём расстояние между SA и CB. Пусть a — длина стороны тетраэдра. Так как тетраэдр правильный, то искомым расстоянием будет высота HN в сечении SAH, проходящем через апофему тетраэдра. $AH = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (как высота в равностороннем треугольнике), $SN = \frac{1}{2}a$. $NH = \sqrt{SH^2 - SN^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2) Воспользуемся формулой $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, где R — радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра.

3) Искомое отношение: $\frac{NH}{R} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

1150. 1) Найдём расстояние между SA и CB (см. рис. 227). Пусть a — длина стороны тетраэдра. Так как тетраэдр правильный, то искомым расстоянием будет высота HN в сечении SAH, проходящем через апофему тетраэдра. $AH = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (как высота в равностороннем треугольни-

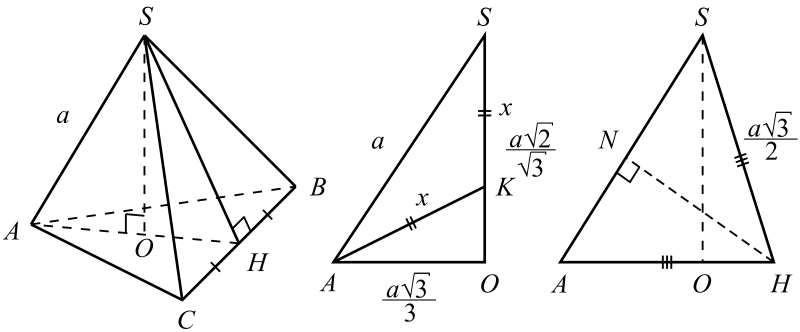


Рис. 226.

ке), $SN = \frac{1}{2}a$. $NH = \sqrt{SH^2 - SN^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

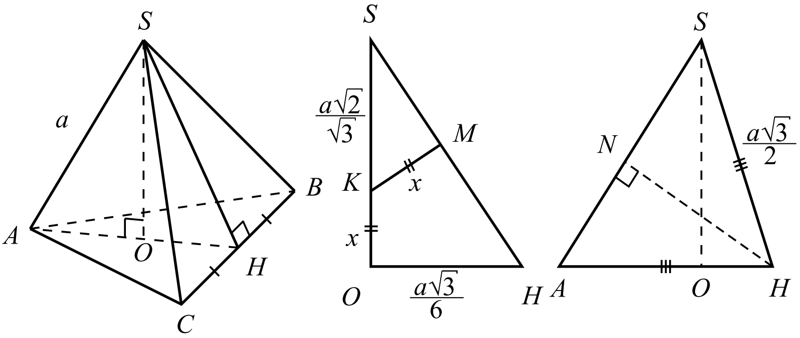


Рис. 227.

2) Воспользуемся формулой $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$, где r — радиус сферы, вписанной в правильный тетраэдр.

3) Искомое отношение: $\frac{NH}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{12} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

1151. Переформулируем задачу и найдём те положительные значения x, которые удовлетворяют данному неравенству. Заметим, что знаменатель дроби $f\left(\log_{\frac{1}{3}}(3x)\log_3 x^4\right) + f(2 - 13\log_3 x) < 0$ как сумма двух отрицательных чисел. Тогда могут представиться два случая:

1) $\begin{cases} x > 0, \\ f\left(\log_{\frac{1}{3}}(3x)\log_3 x^4\right) - f(2 - 13\log_3 x) \leqslant 0, \\ f\left(6\cdot 49^x + 20\cdot 7^x\right) - f\left(3\cdot 7^x - 15\right) > 0. \end{cases}$

Решим каждое неравенство системы.

а) $f\left(\log_{\frac{1}{3}}(3x)\log_3 x^4\right) \leqslant f(2 - 13\log_3 x)$. В силу возрастания функции $f(x)$ имеем: $\log_{\frac{1}{3}}(3x)\log_3 x^4 \leqslant 2 - 13\log_3 x$,

$(-1 - \log_3 x)4\log_3|x| \leqslant 2 - 13\log_3 x$, так как $x > 0$, то

$4\log_3^2 x - 9\log_3 x + 2 \geqslant 0$. Замена: $\log_3 x = t$, $4t^2 - 9t + 2 \geqslant 0$, $4t^2 - 9t + 2 = 0$, $t_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-32}}{8}$, $t_{1,2} = \dfrac{9 \pm 7}{8}$; $t_1 = 2$, $t_1 = \dfrac{1}{4}$.

Вернёмся к замене: $\log_3 x \geqslant 2$, $x \geqslant 9$. $\log_3 x \leqslant \dfrac{1}{4}$, $0 < x \leqslant \sqrt[4]{3}$.

б) $f\left(6\cdot 49^x + 20\cdot 7^x\right) - f\left(3\cdot 7^x - 15\right) > 0$, $f\left(6\cdot 49^x + 20\cdot 7^x\right) > f\left(3\cdot 7^x - 15\right)$. В силу возрастания функции $f(x)$ имеем: $6\cdot 49^x + 20\cdot 7^x > 3\cdot 7^x - 15$, $6\cdot 7^{2x} + 17\cdot 7^x + 15 > 0$. Замена: $7^x = t$, $t > 0$ $6t^2 + 17t + 15 > 0$, $6t^2 + 17t + 15 = 0$, $D < 0$, действительных корней нет. Старший коэффициент квадратного трёхчлена положительный, неравенство

$6t^2 + 17t + 15 > 0$ верно при любых значениях $t > 0$. Тогда неравенство $6\cdot 7^{2x} + 17\cdot 7^x + 15 > 0$ выполняется при любых значениях x.

Решение системы (1): $\left(0; \sqrt[4]{3}\right] \cup [9; +\infty)$.

2) $\begin{cases} x > 0, \\ f\left(\log_{\frac{1}{3}}(3x)\log x\right) - f(2 - 13\log_3 x) \geqslant 0, \\ f\left(6\cdot 49^x + 20\cdot 7^x\right) - f\left(3\cdot 7^x - 15\right) < 0, \end{cases}$ — система не имеет решений. Итак, положительные значения x, которые удовлетворяют данному неравенству:

$\left(0; \sqrt[4]{3}\right] \cup [9; +\infty)$, тогда все положительные x, не удовлетворяющие неравенству, принадлежат промежутку $\left(\sqrt[4]{3}; 9\right)$.

Ответ: $\left(\sqrt[4]{3}; 9\right)$.

1152. Если наименьшее из чисел $b = 2^{-6t} - 5\cdot 2^{-2t}\cdot(2^{-t} + 2^{2t})$ и $c = -2^{6t} + 6\cdot 2^{3t} + 7$ не меньше -9, то справедливы оба неравенства $b \geqslant -9$ и $c \geqslant -9$. Тогда искомое значение параметра получим, решив систему неравенств: $\begin{cases} 2^{-6t} - 5\cdot 2^{-2t}\cdot(2^{-t} + 2^{2t}) \geqslant -9, \\ -2^{6t} + 6\cdot 2^{3t} + 7 \geqslant -9; \end{cases}$

$\begin{cases} 2^{-6t} - 5\cdot 2^{-3t} + 4 \geqslant 0, \\ 2^{6t} - 6\cdot 2^{3t} - 16 \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (2^{-3t} - 4)(2^{-3t} - 1) \geqslant 0, \\ (2^{3t} - 8)(2^{3t} + 2) \leqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 2^{-3t} \geqslant 4, 2^{-3t} \leqslant 1, \\ -2 \leqslant 2^{3t} \leqslant 8; \end{cases}$ зная, что функция $y = 2^x$ монотонно возрастает, и ее значения положительны, имеем: $\begin{cases} -3t \geqslant 2, \ -3t \leqslant 0, \\ 3t \leqslant 3; \end{cases}$

$\begin{cases} t \leqslant -\dfrac{2}{3}, \ t \geqslant 0, \\ t \leqslant 1; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} t \leqslant -\dfrac{2}{3}, \ t \geqslant 0, \\ 0 \leqslant t \leqslant 1; \end{array} \right.$ (см. рис. 228).

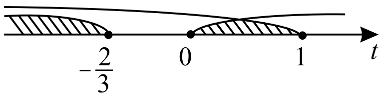


Рис. 228.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right] \cup [0; 1]$.

1153. 1. $\log_2(6x - 2x^2) + \log_{\frac{1}{4}}(x-3)^2 > 1$.

ОДЗ. $\begin{cases} 6x - 2x^2 > 0, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3$. Так как $x < 2$, то $0 < x < 2$.

$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ \log_2(2x(3-x)) - \log_2(3-x) > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ \log_2(2x) > 1; \end{cases} \Leftrightarrow$ $1 < x < 2$.

2. $\dfrac{1}{\log_4(5x+6x^2)} > 1; \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_4(5x+6x^2)} - 1 > 0; \Leftrightarrow$

$$\frac{1 - \log_4(5x+6x^2)}{\log_4(5x+6x^2)} > 0; \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 - \log_4(5x+6x^2) > 0, \\ \log_4(5x+6x^2) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - \log_4(5x+6x^2) < 0, \\ \log_4(5x+6x^2) < 0; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6x^2 + 5x > 0, \\ 6x^2 + 5x < 4, \\ 6x^2 + 5x > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 6x^2 + 5x > 0, \\ 6x^2 + 5x > 4, \\ 6x^2 + 5x < 1; \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \dfrac{4}{3}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) < 0, \\ (x+1)\left(x - \dfrac{1}{6}\right) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{3} < x < \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > \dfrac{1}{6}; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right).$$

Объединим полученные решения: $\left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$.

Ответ: $\left(-\frac{4}{3}; -1\right) \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$.

1154. Согласно условию задачи нам необходимо найти значения x, которые удовлетворяют системам неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ b \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 0, \\ b > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

1. Пусть $a > 0$, тогда

$\lg x + \frac{7}{\ln x^3} + \log_x 7 > 0$. ОДЗ. $x > 0, x \neq 1$.

Пусть $t = \lg x$, тогда

$t + \frac{7 \lg e}{3t} + \frac{\lg 7}{t} > 0$;

$\frac{3t^2 + 7\lg e + 3\lg 7}{3t} > 0$.

Так как $3t^2 + 7\lg e + 3\lg 7 > 0$, то $3t > 0$; $t > 0$. Получаем $\lg x > 0$; $x > 1$. Полученные значения x удовлетворяют ОДЗ. Итак, $a > 0$ при $x > 1$.

2. Пусть $a \leqslant 0$, тогда

$\lg x + \frac{7}{\ln x^3} + \log_x 7 \leqslant 0$. ОДЗ. $x > 0, x \neq 1$.

Учитывая, что $a > 0$ при $x > 1$, с учётом ОДЗ получаем, что $a \leqslant 0$ при $0 < x < 1$.

3. Пусть $b > 0$, тогда

$(2\log_3 x - 1 - 3\log_x 9)(\log_3 x + 3) > 0$. ОДЗ. $x > 0, x \neq 1$.

Пусть $t = \log_3 x$, тогда

$\left(2t - 1 - \frac{3\log_3 9}{t}\right)(t+3) > 0$; $\left(2t - 1 - \frac{6}{t}\right)(t+3) > 0$;

$\frac{(2t^2 - t - 6)(t+3)}{t} > 0$; $\frac{(t-2)\left(t + \frac{3}{2}\right)(t+3)}{t} > 0$.

Решая последнее неравенство методом интервалов (см. рис. 229), находим

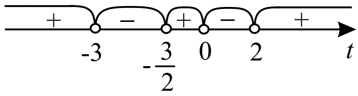


Рис. 229.

$$\left[\begin{array}{l} t < -3, \\ -\dfrac{3}{2} < t < 0, \\ t > 2, \end{array}\right. \quad \text{откуда} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \log_3 x < -3, \\ -\dfrac{3}{2} < \log_3 x < 0, \\ \log_3 x > 2, \end{array}\right. \\ x > 0, \\ x \neq 1; \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{27}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{27}} < x < 1, \\ x > 9. \end{array}\right.$$

4. Пусть $b \leqslant 0$, тогда учитывая найденные значения x, удовлетворяющие неравенству $b > 0$, с учётом ОДЗ получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{27} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{27}}, \\ 1 < x \leqslant 9. \end{array}\right.$$

5. Решением системы неравенств $\left\{\begin{array}{l} a > 0, \\ b \leqslant 0 \end{array}\right.$ являются значения

$$\left\{\begin{array}{l} x > 1, \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{27} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{27}}, \\ 1 < x \leqslant 9; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \Rightarrow 1 < x \leqslant 9.$$

6. Решением системы неравенств $\left\{\begin{array}{l} a \leqslant 0, \\ b > 0 \end{array}\right.$ являются значения

$$\left\{\begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{27}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{27}} < x < 1, \\ x > 9; \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{27}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{27}} < x < 1. \end{array}\right.$$

Значит, условию задачи удовлетворяют $x \in \left(0; \dfrac{1}{27}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{27}}; 1\right) \cup (1; 9]$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{27}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{27}}; 1\right) \cup (1; 9]$.

1155. Согласно условию задачи нам необходимо найти значения x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x > 2, \\ \left[\begin{array}{l} a > -3, \\ b > -3. \end{array}\right. \end{cases}$$

1) Пусть $a > -3$, тогда

$2\log_x 27 - \log_3(81x) > -3$. ОДЗ. $x > 0$, $x \neq 1$.

$\dfrac{2\log_3 27}{\log_3 x} - (\log_3 81 + \log_3 x) > -3;$

$\dfrac{6}{\log_3 x} - 4 - \log_3 x > -3.$

Пусть $t = \log_3 x$, $t \neq 0$, тогда

$\dfrac{6}{t} - t - 1 > 0;$ $\dfrac{t^2 + t - 6}{t} < 0;$ $\dfrac{(t+3)(t-2)}{t} < 0;$

$$\left[\begin{array}{l} t < -3, \\ 0 < t < 2. \end{array}\right.$$

Получаем: $\left[\begin{array}{l} \log_3 x < -3, \\ \begin{cases} \log_3 x < 2, \\ \log_3 x > 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_3 x < \log_3 3^{-3}, \\ \begin{cases} \log_3 x < \log_3 3^2, \\ \log_3 x > \log_3 3^0; \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{27}, \\ 1 < x < 9. \end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ $x \in \left(0; \dfrac{1}{27}\right) \cup (1; 9)$.

2) Пусть $b > -3$, тогда

$\log_3^2 x^3 - 28\log_3 x > -3$. ОДЗ. $x > 0$.

$9\log_3^2 x - 28\log_3 x + 3 > 0$.

Пусть $t = \log_3 x$, тогда

$9t^2 - 28t + 3 > 0;$ $(9t-1)(t-3) > 0;$ $\left[\begin{array}{l} t < \dfrac{1}{9}, \\ t > 3. \end{array}\right.$

Получаем: $\left[\begin{array}{l} \log_3 x < \dfrac{1}{9}, \\ \log_3 x > 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_3 x < \log_3 3^{\frac{1}{9}}, \\ \log_3 x > \log_3 3^3; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x < \sqrt[9]{3}, \\ x > 27. \end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получаем: $x \in (0; \sqrt[9]{3}) \cup (27; +\infty)$.

3) Первоначальная система неравенств принимает вид

$$\begin{cases} x > 2, \\ \left[\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{1}{27}, \\ 1 < x < 9, \\ 0 < x < \sqrt[9]{3}, \\ x > 27; \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 9, \\ x > 27. \end{array}\right.$$

Ответ: $(2; 9) \cup (27; +\infty)$.

1156. Пусть $z = 3x^3 - 10x + y + 13$.

Нахождение наибольшего значения указанного выражения при заданных условиях эквивалентно нахождению максимального значения z, при котором существует решение системы $\begin{cases} z = 3x^2 - 10x + y + 13, \\ 4x^2 - 15x + 14 + y \leqslant 0, \\ x^2 - 16x + y + 18 \geqslant 0. \end{cases}$

Из первого уравнения системы имеем $y = z - 3x^2 + 10 - 13$. Подставляя это значение y во второе и третье неравенства системы, получаем:

$$\begin{cases} z = 3x^2 - 10x + y + 13, \\ 4x^2 - 15x + 14 + z - 3x^2 + 10x - 13 \leqslant 0, \\ x^2 - 16x + z - 3x^2 + 10x - 13 + 18 \geqslant 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z = 3x^2 - 10x + y + 13, \\ z \leqslant -x^2 + 5x - 1, \\ z \geqslant 2x^2 + 6x - 5. \end{cases}$$

Построим графики функций $f(x) = -x^2 + 5x - 1$ и $g(x) = 2x^2 + 6x - 5$ (см. рис. 230).

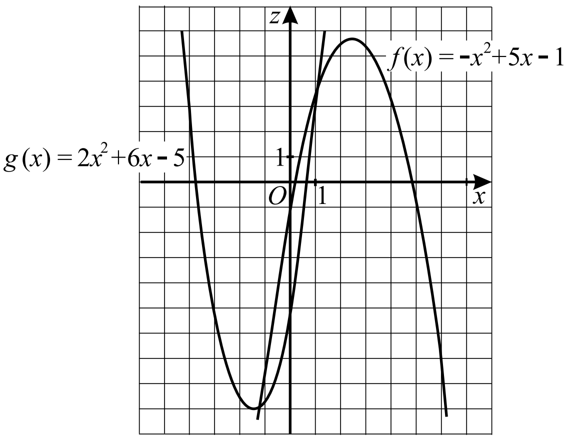


Рис. 230.

Графики этих функций пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = -\dfrac{4}{3}$ и $x_2 = 1$. Так как абсцисса $x_0 = 2{,}5$ вершины параболы $f(x) = -x^2+5x-1$ лежит правее отрезка $\left[-\dfrac{4}{3}; 1\right]$, то наибольшее значение $z = 3$ достигается в точке $x_2 = 1$.

Ответ: 3.

1157. Пусть $z = 3x^2 + 4x - y - 1$.
Тогда нахождение наибольшего значения данного выражения при заданных условиях эквивалентно нахождению максимального значения z, при котором существует решение системы $\begin{cases} z = 3x^2 + 4x - y - 1, \\ y + 2 - 4x^2 - 6x \geqslant 0, \\ 2x^2 - 9x - 1 + y \leqslant 0. \end{cases}$

Из первого уравнения системы имеем $y = 3x^2 + 4x - 1 - z$. Подставляя это значение y во второе и третье неравенства системы, получаем:

$$\begin{cases} z = 3x^2 + 4x - y - 1, \\ 3x^2 + 4x - 1 - z + 2 - 4x^2 - 6x \geqslant 0, \\ 2x^2 - 9x - 1 + 3x^2 + 4x - 1 - z \leqslant 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} z = 3x^2 + 4x - y - 1, \\ z \leqslant -x^2 - 2x + 1, \\ z \geqslant 5x^2 - 5x - 2. \end{cases}$$

Построим графики функций $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ и $g(x) = 5x^2 - 5x - 2$ (см. рис. 231).

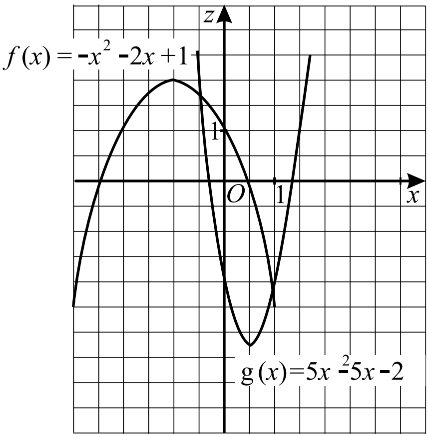


Рис. 231.

Графики этих функций пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = -0{,}5$ и $x_2 = 1$. Так как абсцисса $x_0 = -1$ вершины параболы $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ лежит левее отрезка $[-0{,}5; 1]$, то наибольшее значение $z = 1{,}75$ достигается в точке $x_1 = -0{,}5$.

Ответ: 1,75.

1158. Из неравенства $|x^2 - 2x| \leqslant y + 1$ очевидным образом следует оценка $y \geqslant -1$, а из неравенства $y + |x - 1| < 1$ следует $y < 1$. Итого имеем $-1 \leqslant y < 1$. Целых значений y в полуинтервале $[-1; 1)$ всего два: $y_1 = -1$ и $y_2 = 0$. Найдём целочисленные значения x, соответствующие найденным значениям y.

$$y = -1: \begin{cases} |x^2 - 2x| \leqslant 0, \\ |x - 1| < 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; 2, \\ x \in (-1; 3); \end{cases} \Leftrightarrow x = 0; 2.$$

$$y = 0: \begin{cases} |x^2 - 2x| \leqslant 1, \\ |x - 1| < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \leqslant 0, \\ x^2 - 2x + 1 \geqslant 0, \end{cases} \\ x \in (0; 2); \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}] \\ x \in (0; 2); \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Получаем, что решением задачи являются пары чисел $(0; -1), (2; -1)$, $(1; 0)$.

Ответ: $(0; -1), (2; -1), (1; 0)$..

1159. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(\sin x - 2)\sqrt{16 - x^2}}{\log_2(x + 1) - 4} > 0, \\ \dfrac{\log_3^2(x + 2) - 2\log_3(x + 2)}{3\sqrt{x - 2} - x} \leqslant 0. \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ.} \begin{cases} 16 - x^2 \geqslant 0, \\ x + 1 > 0, \\ \log_2(x + 1) - 4 \neq 0, \\ x + 2 > 0, \\ x - 2 \geqslant 0, \\ 3\sqrt{x - 2} - x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ x > -1, \\ x \neq 15, \\ x > -2, \\ x \geqslant 2, \\ \left[\begin{array}{l} x \neq 3, \\ x \neq 6; \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 4.$$

Заметим, что первое неравенство системы строгое, значит $x \neq 4$, то есть $x \in [2; 4)$.

$$\begin{cases} \dfrac{(\sin x-2)\sqrt{16-x^2}}{\log_2(x+1)-4}>0, \\ \dfrac{\log_3(x+2)(\log_3(x+2)-2)}{3\sqrt{x-2}-x}\leqslant 0, \\ 2\leqslant x<4. \end{cases}$$

Так как $|\sin x|\leqslant 1$, то $\sin x-2<0$. При $2\leqslant x<4$ имеем: $\sqrt{16-x^2}>0$, $1<\log_3(x+2)<2$, $-1<\log_3(x+2)-2<0$. Тогда $(\sin x-2)\cdot\sqrt{16-x^2}<0$, $\log_3(x+2)(\log_3(x+2)-2)<0$.

Исходная система равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} \log_2(x+1)-4<0, \\ 3\sqrt{x-2}-x>0, \\ 2\leqslant x<4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<15, \\ 9(x-2)>x^2, \\ 2\leqslant x<4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9x+18<0, \\ 2\leqslant x<4. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-6)<0, \\ 2\leqslant x<4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3<x<6, \\ 2\leqslant x<4; \end{cases} \Leftrightarrow 3<x<4.$$

Учитывая условие, что все найденные значения x удовлетворяют неравенству $2x^2-21x+40\leqslant 0$, имеем: $\begin{cases} 2(x-2{,}5)(x-8)\leqslant 0, \\ 3<x<4; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2{,}5\leqslant x\leqslant 8, \\ 3<x<4; \end{cases} \Leftrightarrow 3<x<4.$$

Ответ: $(3;4)$.

1160. 1. $\dfrac{\log_3(3^x-1)}{x-1}\geqslant 1,$

$$\frac{\log_3(3^x-1)-x+1}{x-1}\geqslant 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x-1>0, \\ \log_3(3^x-1)-x+1\geqslant 0, \\ x-1>0, \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x-1>0, \\ \log_3(3^x-1)-x+1\leqslant 0, \\ x-1<0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x-1\geqslant 3^{x-1}, \\ x>1, \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x-1\leqslant 3^{x-1}, \\ x>0, \\ x<1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x\geqslant \dfrac{3}{2}, \\ x>1, \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x<\dfrac{3}{2}, \\ x>0, \\ x<1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1, \\ 0<x<\log_3\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

2. $27^{2x} - 3\cdot 9^{\frac{3x^2+2}{x}} + 1 \geqslant 1$,

$3^{6x} - 3\cdot 3^{6x+\frac{4}{x}} \geqslant 0$,

$3^{6x}(1 - 3^{1+\frac{4}{x}}) \geqslant 0$,

$1 - 3^{1+\frac{4}{x}} \geqslant 0$,

$3^{1+\frac{4}{x}} \leqslant 3^0$,

$1 + \dfrac{4}{x} \leqslant 0$,

$\dfrac{x+4}{x} \leqslant 0$, $-4 \leqslant x < 0$.

3. Для ответа на вопрос задачи объединим полученные решения:

$[-4;0) \cup \left(0;\log_3\dfrac{3}{2}\right) \cup (1;+\infty)$.

Ответ: $[-4;0) \cup \left(0;\log_3\dfrac{3}{2}\right) \cup (1;+\infty)$.

1161. $\dfrac{1}{2}\log_{4+x}(x^2+2x+1) + \log_{-x-1}(-x^2-5x-4) \leqslant 3$.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+2x+1>0, \\ -x^2-5x-4>0, \\ x+4>0, \\ x+4\neq 1, \\ -x-1>0, \\ -x-1\neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4, \\ x\neq -3, \\ x<-1, \\ x\neq -2, \\ x\neq -1. \end{cases}$

$x \in (-4;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)$.

На ОДЗ неравенство примет вид:

$\log_{4+x}|x+1| + \log_{-x-1}((-x-1)(x+4)) \leqslant 3$;

$\log_{4+x}(-x-1) + \log_{-x-1}(-x-1) + \log_{-x-1}(x+4) \leqslant 3$;

$\log_{x+4}(-x-1) + \dfrac{1}{\log_{x+4}(-x-1)} - 2 \leqslant 0$;

$\dfrac{\log^2_{x+4}(-x-1) - 2\log_{x+4}(-x-1) + 1}{\log_{x+4}(-x-1)} \leqslant 0$;

$\dfrac{(\log_{x+4}(-x-1) - 1)^2}{\log_{x+4}(-x-1)} \leqslant 0; \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\log_{x+4}(-x-1)-1=0,\\ \log_{x+4}(-x-1)<0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x-1=x+4,\\ \left\{\begin{array}{l}0<x+4<1,\\ -x-1>1,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x+4>1,\\ -x-1<1;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2{,}5,\\ \left\{\begin{array}{l}-4<x<-3,\\ x<-2,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x>-3,\\ x>-2;\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2{,}5,\\ -4<x<-3,\\ x>-2.\end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ получаем: $x \in (-4;-3) \cup \{-2{,}5\} \cup (-2;-1)$.

Ответ: $(-4;-3) \cup \{-2{,}5\} \cup (-2;-1)$.

1162. $\log_{1-x}(1-x)(1+2x)+\dfrac{1}{4}\log_{1+2x}(x-1)^4 \geqslant -1$.

ОДЗ. $\left\{\begin{array}{l}1-x>0,\\ 1-x\neq 1,\\ 1+2x>0,\\ 1+2x\neq 1\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}<x<1,\\ x\neq 0;\end{array}\right.$ $x \in (-0{,}5;0)\cup(0;1)$.

$1+\log_{1-x}(1+2x)+\dfrac{1}{4}\cdot 4\log_{1+2x}|x-1| \geqslant -1$;

при $x \in (-0{,}5;0)\cup(0;1)$ $|x-1|=1-x$, тогда имеем

$\log_{1-x}(1+2x)+\log_{1+2x}(1-x) \geqslant -2$; $\log_{1-x}(1+2x)+\dfrac{1}{\log_{1-x}(1+2x)} \geqslant -2$.

Пусть $\log_{1-x}(1+2x)=t$, тогда при $x \in (-0{,}5;0)\cup(0;1)$ $t<0$ (при $x\in(-0{,}5;0)$ $1-x>1$, $0<1+2x<1$, следовательно $\log_{1-x}(1+2x)<0$; при $x\in(0;1)$ $0<1-x<1$, $1+2x>1$, следовательно $\log_{1-x}(1+2x)<0$).

$t+\dfrac{1}{t} \geqslant -2$; $t^2+1 \leqslant -2t$ (так как $t<0$); $t^2+2t+1 \leqslant 0$; $(t+1)^2 \leqslant 0$; $t=-1$.

Вернёмся к замене, получим: $\log_{1-x}(1+2x)=-1$; $1+2x=\dfrac{1}{1-x}$;

$(1+2x)(1-x)=1$; $-2x^2+x=0$; $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{2}$. $x=0$ не принадлежит ОДЗ, поэтому решением исходного неравенства является $x=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: 0,5.

1163. $\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{3}{4}, \\ \sin y \cos x = \dfrac{1}{4}, \\ |x-y| < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \sin x \cos y + \sin y \cos x = 1, \\ \sin x \cos y - \sin y \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ |x-y| < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = \dfrac{1}{2}, \\ |x-y| < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \\ x-y = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \\ |x-y| < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} x+y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \\ x-y = \dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{3} + \pi k; \dfrac{\pi}{6} + \pi k\right), k \in Z.$

1164. $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = -\dfrac{1}{4}, \\ |x| < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 + \cos^2 y - \sin^2 y = \dfrac{1}{2}, \\ \cos^2 x - \sin^2 x + 1 = 1, \\ |x| < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} \cos 2y = -\dfrac{1}{2}, \\ \cos 2x = 0, \\ |x| < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ |x| < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ |x| < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4}, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z. \end{cases}$

Ответ: $\left(\pm\dfrac{\pi}{4}; \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in Z.$

1165. $\dfrac{\sqrt{0{,}5-x}(3x^2-x-2)}{3x+2} \leqslant (x-1)\sin x - x + 1.$

ОДЗ. $\begin{cases} 0{,}5-x \geqslant 0, \\ 3x+2 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 0{,}5, \\ x \neq -\dfrac{2}{3}; \end{cases}$ $x \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; 0{,}5\right].$

$\dfrac{\sqrt{0{,}5-x}(3x+2)(x-1)}{3x+2} \leqslant (x-1)\sin x - (x-1);$

$\sqrt{0{,}5-x}(x-1) \leqslant (x-1)(\sin x - 1).$

Разделим обе части неравенства на $x-1$, учитывая, что при $x \leqslant 0{,}5$ $x-1<0$.

$\sqrt{0{,}5-x} \geqslant \sin x - 1$ — выполняется для всех значений x, принадлежащих ОДЗ, так как $\sin x - 1 \leqslant 0$ и $\sqrt{0{,}5-x} \geqslant 0$. Выполненные преобразования равносильны при всех $x \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; 0{,}5\right)$, значит решением исходного неравенства является множество $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{2}\right]$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{2}\right].$

1166. $\dfrac{\sqrt{3-x}(2x^2+5x+2)}{2x+1} \geqslant (x+2)\sin x - x - 2.$

ОДЗ. $\begin{cases} 3-x \geqslant 0, \\ 2x+1 \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \neq -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $x \in \left(-\infty; -0{,}5\right) \cup \left(-0{,}5; 3\right].$

$\dfrac{\sqrt{3-x}\cdot(2x+1)(x+2)}{2x+1} \geqslant (x+2)\sin x - (x+2);$

$\sqrt{3-x}(x+2) \geqslant (x+2)(\sin x - 1)$; $(x+2)(\sqrt{3-x} - \sin x + 1) \geqslant 0.$

$1-\sin x \geqslant 0$, $\sqrt{3-x} \geqslant 0$, значит $\sqrt{3-x} - \sin x + 1 \geqslant 0$ при любом x из ОДЗ. Последнее неравенство примет вид $x+2 \geqslant 0$, $x \geqslant -2$. Учитывая ОДЗ, получим $x \in [-2; -0{,}5) \cup (-0{,}5; 3]$.

Ответ: $[-2; -0{,}5) \cup (-0{,}5; 3]$.

1167. ОДЗ. $\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ (x-3)^6(\pi^2-x^2) \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ \pi^2 - x^2 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$ $x \in [-2; \pi]$.

Так как $\sqrt{(x-3)^6(\pi^2-x^2)} > 0$ на ОДЗ при $x \neq 3$ и $x^2 \neq \pi^2$, то исходное неравенство равносильно неравенству $(x - \sqrt{x+2})\sin 3x > 0$, при $x \in [-2; 3) \cup (3; \pi)$.

Используя метод интервалов (см. рис. 232), получим решение исходного неравенства.

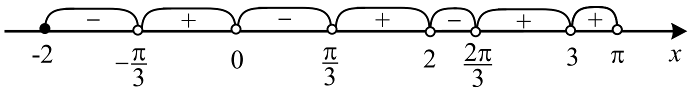


Рис. 232.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3};0\right)\cup\left(\frac{\pi}{3};2\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3};3\right)\cup(3;\pi)$.

1168. ОДЗ исходного неравенства можно найти, решив систему неравенств

$$\begin{cases} x^3-\frac{9}{4}x^2-x\geqslant 0,\\ x^2+2x\geqslant 0,\\ x^3+\frac{7}{4}x^2+x\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l} x\leqslant -2,\\ x\geqslant 0, \end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l} x\geqslant \dfrac{9+\sqrt{145}}{8},\\ \dfrac{9-\sqrt{145}}{8}\leqslant x\leqslant 0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\{0\}\cup\left[\frac{9+\sqrt{145}}{8};+\infty\right).$$

Приведём неравенство к виду $f(x)\geqslant 0$ и решим его методом интервалов, где $f(x)=\sqrt{x^3-\frac{9}{4}x^2-x}+\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^3+\frac{7}{4}x^2+x}$.

Решим уравнение $f(x)=0$. Имеем:

$$\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-9x-4}+\sqrt{x+2}-\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+7x+4}\right)=0.$$

Очевидно, что $x=0$ — корень исходного уравнения. Найдём положительные корни уравнения: $\sqrt{4x^2-9x-4}+2\sqrt{x+2}=\sqrt{4x^2+7x+4}$.

Возведя в квадрат обе части последнего уравнения и упростив, получим уравнение $2x^3-5x^2-11x-4=0$. Его корни $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=4$. Проверкой убеждаемся, что $x=4$ является корнем уравнения $f(x)=0$. При помощи пробных точек убеждаемся, что при $x<4$ функция $f(x)$ не определена или отрицательна, а при $x>4$ функция $f(x)$ положительна.

Ответ: 4.

1169. $\log_{x-2}\log_3\frac{x+3}{x-3}>\log_{\frac{1}{x-2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-3}{x+3}$.

$$\text{ОДЗ.}\ \begin{cases} x-2>0, \\ x-2\neq 1, \\ x\neq 3, \\ x\neq -3, \\ \dfrac{x+3}{x-3}>0, \\ \log_3\dfrac{x+3}{x-3}>0 \end{cases} \Rightarrow x>3.$$

С учётом ОДЗ исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_{x-2}\log_3\dfrac{x+3}{x-3} > -\log_{x-2}\log_3\dfrac{x+3}{x-3}, \\ x>3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3\dfrac{x+3}{x-3} > \dfrac{1}{\log_3\dfrac{x+3}{x-3}}, \\ x>3; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\log_3^2\dfrac{x+3}{x-3}-1}{\log_3\dfrac{x+3}{x-3}}>0, \\ x>3; \end{cases}$$

Полученная система неравенств распадается на две.

$$1)\ \begin{cases} \log_3^2\dfrac{x+3}{x-3}>1, \\ \log_3\dfrac{x+3}{x-3}>0, \\ x>3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3\dfrac{x+3}{x-3}>1, \\ x>3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-3}>3, \\ x>3; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x<6, \\ x>3. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} \log_3^2\dfrac{x+3}{x-3}<1, \\ \log_3\dfrac{x+3}{x-3}<0, \\ x>3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3\dfrac{x+3}{x-3}>-1, \\ \log_3\dfrac{x+3}{x-3}<0, \\ x>3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-3}>\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{x+3}{x-3}<1, \\ x>3. \end{cases}$$

Последняя система не имеет решений.

Ответ: $(3;6)$.

1170. $\log_{x+6}\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-5}{x+5} < \log_{\frac{1}{x+6}}\log_2\dfrac{x+5}{x-5}.$

ОДЗ. $\begin{cases} x+6>0, \\ x+6\neq 1, \\ x\neq 5, \\ x\neq -5, \\ \dfrac{x-5}{x+5}>0, \\ \log_2\dfrac{x+5}{x-5}>0; \end{cases} \qquad \Rightarrow x>5.$

С учётом ОДЗ исходное неравенство равносильно системе неравенств.

$$\begin{cases} \log_{x+6}\log_2\dfrac{x+5}{x-5} < -\log_{x+6}\log_2\dfrac{x+5}{x-5}, \\ x>5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2\dfrac{x+5}{x-5} < \dfrac{1}{\log_2\dfrac{x+5}{x-5}}, \\ x>5; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\log_2^2\dfrac{x+5}{x-5}-1}{\log_2\dfrac{x+5}{x-5}}<0, \\ x>5. \end{cases}$$

Полученная система неравенств распадается на две.

1) $\begin{cases} \log_2^2\dfrac{x+5}{x-5}<1, \\ \log_2\dfrac{x+5}{x-5}>0, \\ x>5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2\dfrac{x+5}{x-5}<1, \\ \log_2\dfrac{x+5}{x-5}>0, \\ x>5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+5}{x-5}<2, \\ \dfrac{x+5}{x-5}>1, \\ x>5; \end{cases} \Rightarrow x>15.$

2) $\begin{cases} \log_2^2\dfrac{x+5}{x-5}>1, \\ \log_2\dfrac{x+5}{x-5}<0, \\ x>5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2\dfrac{x+5}{x-5}<-1, \\ x>5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+5}{x-5}<\dfrac{1}{2}, \\ x>5; \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x>-15, \\ x<5, \\ x>5. \end{cases}$

Последняя система не имеет решений.

Ответ: $(15;+\infty)$.

1171. ОДЗ. $x>0$. $3^{\log_3^2 x}<6$,

$\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}<6, 2x^{\log_3 x}<6, x^{\log_3 x}<3.$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 3. Учитывая, что функция $y=\log_3 t$ возрастающая, получим:

$\log_3 x^{\log_3 x} < \log_3 3,\ \ \log_3^2 < 1,\ \ |\log_3 x| < 1,$

$\log_3 \dfrac{1}{3} < \log_3 x < \log_3 3,\ \ \dfrac{1}{3} < x < 3.$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right)$.

1172. ОДЗ. $x > 0$.
$7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} < 14,$
$\left(7^{\log_7 x}\right)^{\log_7 x} + x^{\log_7 x} < 14,$
$2x^{\log_7 x} < 14,\ \ x^{\log_7 x} < 7.$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 7. Учитывая, что функция $y = \log_7 t$ возрастающая, получим:

$\log_7 x^{\log_7 x} < \log_7 7,\ \log_7^2 x < 1,\ |\log_7 x| < 1,\ \log_7 \dfrac{1}{7} < \log_7 x < \log_7 7,$

$\dfrac{1}{7} < x < 7.$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{7}; 7\right)$.

1173. ОДЗ. $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x > 0, \\ |x+1| - |x-13| \neq 0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 1, \\ |x+1| - |x-13| \neq 0. \end{cases}$

$3^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{4}} = 3^{-\log_3 \frac{x}{4}} = 3^{\log_3 \frac{4}{x}} = \dfrac{4}{x};\ \ |x+1| = x+1$ при $x \geqslant 1$, тогда исходное неравенство примет вид:

$$\frac{2^{\sqrt{x-1}} - \dfrac{4}{x}}{x+1-|x-13|} \geqslant 0.$$

1) Рассмотрим неравенство $2^{\sqrt{x-1}} - \dfrac{4}{x} \geqslant 0$. Функция $f(x) = 2^{\sqrt{x-1}} - \dfrac{4}{x}$ возрастает при $x \geqslant 1$ и $f(2) = 0$, следовательно $2^{\sqrt{x-1}} - \dfrac{4}{x} \geqslant 0$ при $x \geqslant 2$ и $2^{\sqrt{x-1}} - \dfrac{4}{x} \leqslant 0$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$.

2) Решим неравенство $x + 1 - |x-13| > 0$:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1-(x-13)>0,\\ x-13\geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x+1+(x-13)>0,\\ x-13<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0\cdot x>-14,\\ x\geqslant 13,\end{cases}\\ \begin{cases}x>6,\\ x<13;\end{cases}\end{array}\right. \quad x\in(6;+\infty).$$

Решением исходного неравенства являются те значения x, при которых выражения $2^{\sqrt{x-1}}-\dfrac{4}{x}$ и $x+1-|x-13|$ имеют одинаковые знаки. Получаем $x\in[1;2]\cup(6;+\infty)$.

Ответ: $[1;2]\cup(6;+\infty)$.

1174. ОДЗ: $\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x>0,\\ |x+2|-|2x-23|\neq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant 3,\\ |x+2|-|2x-23|\neq 0.\end{cases}$

$5^{\log_{25}x}=5^{\frac{1}{2}\log_5 x}=5^{\log_5\sqrt{x}}=\sqrt{x}$; $|x+2|=x+2$ при $x\geqslant 3$, тогда исходное неравенство примет вид:

$$\frac{\sqrt{x}-2^{\sqrt{x-3}}}{x+2-|2x-23|}\leqslant 0.$$

1) Рассмотрим неравенство $\sqrt{x}-2^{\sqrt{x-3}}\geqslant 0$. Функция $f(x)=\sqrt{x}-2^{\sqrt{x-3}}$ возрастает при $x\geqslant 3$ и $f(4)=0$, следовательно, $\sqrt{x}-2^{\sqrt{x-3}}\geqslant 0$ при $3\leqslant x\leqslant 4$ и $\sqrt{x}-2^{\sqrt{x-3}}\leqslant 0$ при $x\geqslant 4$.

2) Решим неравенство $x+2-|2x-23|>0$:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+2-(2x-23)>0,\\ 2x-23\geqslant 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x+2+(2x-23)>0,\\ 2x-23<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}11{,}5\leqslant x<25,\\ 7<x<11{,}5;\end{array}\right. \quad x\in(7;25).$$

Решением исходного неравенства являются те значения x, при которых выражения $\sqrt{x}-2^{\sqrt{x-3}}$ и $x+2-|2x-23|>0$ имеют разные знаки. Получаем $x\in[3;4]\cup(7;25)$.

Ответ: $[3;4]\cup(7;25)$.

1175. $\dfrac{\sqrt{x^2+0{,}5x}+2x}{x}+\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x}\leqslant 0;$

$$\frac{\sqrt{x^2+0{,}5x}+2x+|x-1|}{x}\leqslant 0;$$

ОДЗ. $\left[\begin{array}{l}x\leqslant -0{,}5,\\ x>0.\end{array}\right.$

1) $x\geqslant 1$; $\dfrac{\sqrt{x^2+0{,}5x}+3x-1}{x}\leqslant 0.$

$\sqrt{x^2+0{,}5x}\geqslant 0$, $3x-1\geqslant 0$ при $x\geqslant 1$, значит вся дробь больше нуля и при $x \geqslant 1$ неравенство решений не имеет.

2) $x < 1$; $\dfrac{\sqrt{x^2+0{,}5x}+x+1}{x} \leqslant 0$.

При $0 < x < 1$ аналогично неравенство решений не имеет.
При $-1 \leqslant x \leqslant -0{,}5$ числитель больше нуля, знаменатель меньше нуля, значит $-1 \leqslant x \leqslant -0{,}5$ — решение.
При $x < -1$: $\sqrt{x^2+0{,}5x}+x+1 > 0$. Неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+0{,}5x > 0, \\ -x-1 \geqslant 0, \\ x^2+0{,}5x > (-x-1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty), \\ x \leqslant -1, \\ x < -\dfrac{2}{3}; \end{cases}$$

отсюда следует, что при $x < -1$ числитель исходной дроби больше 0, знаменатель меньше 0, значит вся дробь меньше 0 и $x < -1$ — решение. Объединив решения $-1 \leqslant x \leqslant -0{,}5$ и $x < -1$, получим $x \leqslant -0{,}5$.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right]$.

1176. $\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+3x}{2x} + \dfrac{\sqrt{(2x-1)^2}}{2x} \leqslant 0$;

$\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+3x+|2x-1|}{2x} \leqslant 0$;

ОДЗ. $\left[\begin{array}{l} x \leqslant -3, \\ x > 0. \end{array}\right.$

1) При $x > 0$ неравенство решений не имеет, так как и числитель, и знаменатель дроби больше нуля.

2) При $x \leqslant -3$ знаменатель дроби меньше нуля, значит, чтобы решения существовали, числитель должен быть неотрицательным:
$\sqrt{x^2+3x}+3x+1-2x \geqslant 0$;
$\sqrt{x^2+3x} \geqslant -x-1$;
$x^2+3x \geqslant x^2+2x+1$;
$x \geqslant 1$ — не удовлетворяет условию $x \leqslant -3$, значит, и при $x \leqslant -3$ неравенство решений не имеет.

Ответ: решений нет.

1177. ОДЗ. $\dfrac{x^3+8}{x} \geqslant 0$; $\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x} \geqslant 0$; $\left\{\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x > 0. \end{array}\right.$

$\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} - x \geqslant 2$; $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^3+8}{x} \geqslant (x+2)^2, \\ x+2 \leqslant 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x} \geqslant (x+2)^2, \\ x \leqslant -2. \end{array}\right.$

Решаем первое неравенство совокупности:

$\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)-x(x+2)^2}{x} \geqslant 0$;

$\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4-x(x+2))}{x} \geqslant 0$; $\dfrac{(x+2)(-4x+4)}{x} \geqslant 0$;

$\dfrac{(x+2)(x-1)}{x} \leqslant 0.$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получим $x \in (-\infty; -2] \cup (0; 1]$ (см. рис. 233). Найденные значения x удовлетворяют ОДЗ.

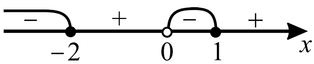


Рис. 233.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (0; 1]$.

1178. ОДЗ. $(x-1)^2 + \dfrac{8}{x-1} \geqslant 0$; $\dfrac{(x-1)^3+8}{x-1} \geqslant 0$;

$\dfrac{(x-1+2)\Big((x-1)^2-2(x-1)+4\Big)}{x-1} \geqslant 0$; $\dfrac{(x+1)\Big(x^2-4x+7\Big)}{x-1} \geqslant 0.$

Дискриминант квадратного уравнения x^2-4x+7 меньше нуля, поэтому для любых значений x выполняется $x^2-4x+7>0$. Тогда $\dfrac{x+1}{x-1} \geqslant 0$.

$\left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x \leqslant -1, \end{array}\right.$ $\sqrt{(x-1)^2 + \dfrac{8}{x-1}} \leqslant x+1$;

$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x+1)(x^2-4x+7)}{x-1} \leqslant (x+1)^2, \\ x+1 \geqslant 0. \end{array}\right.$

Так как $x = -1$ удовлетворяет последней системе, то осталось решить неравенство $\dfrac{x^2-4x+7}{x-1} \leqslant x+1$ при $x > -1$.

$\dfrac{x^2-4x+7-(x^2-1)}{x-1} \leqslant 0;$

$\dfrac{-4x+8}{x-1} \leqslant 0;$

$\dfrac{x-2}{x-1} \geqslant 0$. Так как $x > -1$, то $x \in (-1; 1) \cup [2; +\infty)$.

С учётом ОДЗ получаем: $x \in \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.

1179. Второе неравенство системы можно записать в виде $(x-3)^2+y^2 \leqslant 4^2$. Оно задаёт круг с центром в точке $(3; 0)$ и радиусом 4. Теперь найдём, какие решения первого неравенства находятся в найденном круге.

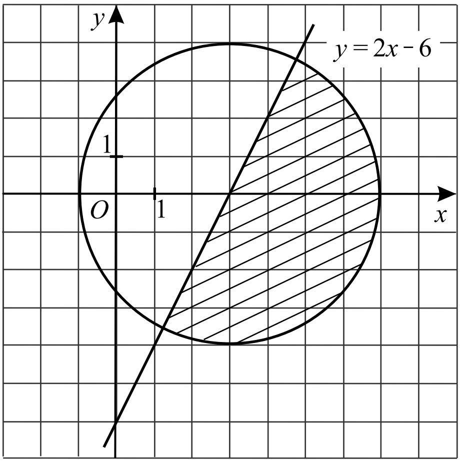


Рис. 234.

Если $x < 0$, то в круге имеем: $|x| \leqslant 1 \Rightarrow |x-y| \geqslant 5 \Rightarrow |x|+|y| \geqslant 5 \Rightarrow |y| \geqslant 4$. Решения первого неравенства, полученные при отрицательных x, не могут находиться в круге.

Если $x \geqslant 0$, то в круге имеем: $|x-y| \geqslant 6-x$. Очевидно выполнение этого неравенства при $x \geqslant 6$. При $x < 6$ имеем: $|x-y| \geqslant 6-x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y \leqslant x-6, \\ x-y \geqslant 6-x; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \geqslant 6, \\ 2x-y \geqslant 6. \end{array}\right.$ Все решения первого неравенства

совокупности находятся вне круга. Второе неравенство определяет часть плоскости, лежащую правее и ниже прямой $y = 2x - 6$. Заметим, что все найденные ранее решения $x \geqslant 6$ также лежат в найденной части плоскости. Кроме того, прямая $y = 2x - 6$ проходит через точку $(3; 0)$, являющуюся центром круга (см. рис. 234). Следовательно, в найденную часть плоскости попадает ровно половина площади круга. Искомая площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 4^2\pi = 8\pi$.

Ответ: 8π.

1180. Пусть высота конической палатки H, $H > 0$. $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, по условию $V_{\text{к}} = \frac{4\pi}{3}$ м^3; $\frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{4\pi}{3}$, $R^2 H = 4$, $R^2 = \frac{4}{H}$, $R = \frac{2}{\sqrt{H}}$ (м); $S_{\text{бок. кон.}} = \pi R l$. Из $\triangle SOB$ (см. рис. 235) имеем:

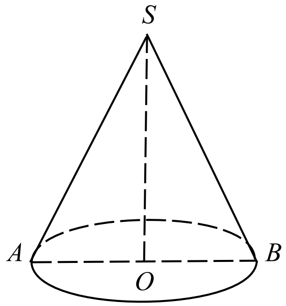


Рис. 235.

$$BS = \sqrt{R^2 + H^2} = \sqrt{\frac{4}{H} + H^2} = \sqrt{\frac{4 + H^3}{H}} \text{ (м)};$$

$$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot \frac{2}{\sqrt{H}} \cdot \sqrt{\frac{4 + H^3}{H^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{4 + H^3}{H^2}} \text{ (м}^2\text{)}.$$

Введём функцию $S(H) = 2\pi\sqrt{\frac{4 + H^3}{H^2}}$. Так как $S(H) > 0$ на интервале $(0; +\infty)$, то функции $S(H)$ и $f(H) = \big(S(H)\big)^2$ принимают наименьшее значение на этом интервале в одной и той же точке. Поэтому найдем, при каком H функция $f(H)$ принимает наименьшее значение при $H > 0$.

$$f(H) = 4\pi^2 \cdot \frac{4 + H^3}{H^2},\ f'(H) = 4\pi^2 \cdot \frac{3H^2 \cdot H^2 - 2H\left(4 + H^3\right)}{H^4},$$

$$f'(H) = 4\pi^2 \cdot \frac{H^3 - 8}{H^3},\ f'(H) = 0,\ \begin{cases} H^3 - 8 = 0, \\ H^3 \neq 0; \end{cases}\ H^3 = 8,\ H = 2.$$

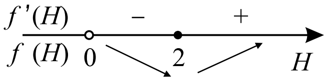


Рис. 236.

$H = 2$ — точка минимума (см. рис. 236). Так как на интервале $(0; +\infty)$ $f(H)$ имеет единственную критическую точку, и она является точкой минимума, то в ней ($H = 2$) функция принимает свое наименьшее значение. Высота палатки 2 м, а радиус $\sqrt{2}$ м.

Ответ: 2 м; $\sqrt{2}$ м.

1181. Пусть длина $KZ = x$ км, $0 < x < 10$, тогда $ZH = \dfrac{10 - x}{2}$ км, $AH = 4$ км (см. рис. 237). Из $\triangle AZH$ имеем: $AZ = \sqrt{AH^2 + ZH^2}$,

$AZ = \sqrt{16 + \dfrac{(10 - x)^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{164 - 20x + x^2}$,

$DK + KC + AZ + BZ + KZ = 2\sqrt{164 - 20x + x^2} + x$.

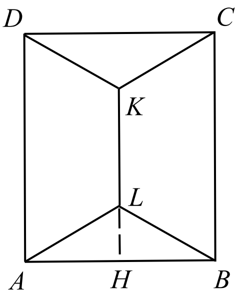


Рис. 237.

Введём функцию $f(x) = 2\sqrt{164 - 20x + x^2} + x,\ x \in (0; 10)$ и найдем ее наименьшее значение на $(0; 10)$:

$f'(x) = \left(2\sqrt{164 - 20x + x^2} + x\right)',\ f'(x) = \dfrac{-20 + 2x}{\sqrt{164 - 20x + x^2}} + 1;$

$$f'(x)=0,\ \frac{-20+2x}{\sqrt{164-20x+x^2}}=-1,\ -2x+20=\sqrt{164-20x+x^2},$$

$$\begin{cases}164-20x+x^2=4x^2-80x+400,\\ -2x+20\geqslant 0;\end{cases}\qquad \begin{cases}3x^2-60x+236=0,\\ x\leqslant 10;\end{cases}$$

$$x_{1,2}=\frac{30\pm\sqrt{192}}{3},\ x_1=10+\frac{8\sqrt3}{3}\notin(0;10),\ x_2=10-\frac{8\sqrt3}{3}\in(0;10).$$

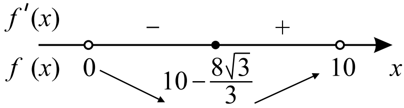


Рис. 238.

$x=10-\dfrac{8\sqrt3}{3}$ — точка минимума (см. рис. 238). Так как на интервале $(0;10)$ функция имеет единственную критическую точку, и она является точкой минимума, то в ней функция принимает свое наименьшее значение.

Наименьшее $f(x)=f\left(10-\dfrac{8\sqrt3}{3}\right)=$

$$=2\sqrt{164-20\left(10-\frac{8\sqrt3}{3}\right)+\left(10-\frac{8\sqrt3}{3}\right)^2}+10-\frac{8\sqrt3}{3}=$$

$$=2\sqrt{164-200+\frac{160\sqrt3}{3}+100-\frac{160\sqrt3}{3}+\frac{64\cdot 3}{9}}+10-\frac{8\sqrt3}{3}=$$

$$=2\sqrt{64+\frac{64\cdot 3}{9}}+10-\frac{8\sqrt3}{3}=\frac{2\cdot 8}{3}\sqrt{9+3}+10-\frac{8\sqrt3}{3}=10+8\sqrt3.$$

Общая минимальная длина пяти участков $10+8\sqrt3$ км.

Ответ: $10+8\sqrt3$.

1182. Стена DD_1C_1C изготовлена из стекла (см. рис. 239). Пусть $DC=x$ м, $x>0$. Площадь DD_1C_1C $4x$ м^2. Стоимость стеклянной стены $750\cdot 4x=$ $=3000x$ рублей. Ширина комнаты $AD=\dfrac{80}{x}$ м, площадь стен из обычного материала $4x+\dfrac{2\cdot 80\cdot 4}{x}=4x+\dfrac{640}{x}$ (м^2). Стоимость стен из обычного материала $500\left(4x+\dfrac{640}{x}\right)$ рублей. Общая стоимость постройки:

$3000x + 500\left(4x + \dfrac{640}{x}\right)$ рублей. Введём функцию

$f(x) = 3000x + 500\left(4x + \dfrac{640}{x}\right),\ x > 0$, и найдем ее наименьшее значение.

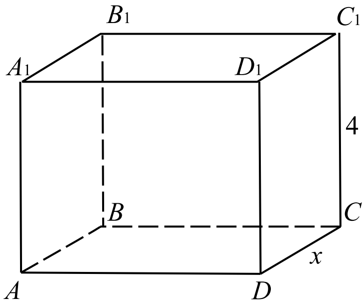


Рис. 239.

$f'(x) = 3000 + 500 \cdot 4 - \dfrac{500 \cdot 640}{x^2}$; $f'(x) = 0,\ 3000 + 500 \cdot 4 - \dfrac{500 \cdot 640}{x^2} = 0,$

$3 + 2 - \dfrac{320}{x^2} = 0,\ x^2 = 64,\ x = 8.$

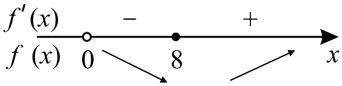


Рис. 240.

$x = 8$ — точка минимума (см. рис. 240). Так как функция $f(x)$ на $(0; +\infty)$ имеет единственную критическую точку, и она является точкой минимума, то в ней функция принимает наименьшее значение:

$f(8) = 3000 \cdot 8 + 500\left(4 \cdot 8 + \dfrac{640}{8}\right) = 24000 + 56000 = 80000$. Наименьшая общая стоимость постройки 80000 рублей.

Ответ: 80000.

1183. Велосипедист уменьшает скорость в пункте C на a км/ч

$(0 < a < 15)$. Он едет $\dfrac{2}{9}$ пути со скоростью $(15 - a)$ км/ч. Путь от C до B равен S км. $\dfrac{2}{9}$ этого пути велосипедист прошел за $\dfrac{2S}{9(15-a)}$ часов, а оставшийся путь $\dfrac{7S}{9}$ со скоростью $(15+2a)$ км/ч он прошел за $\dfrac{7S}{9(15+2a)}$ часа. Весь путь от C до B велосипедист прошел за $\dfrac{S}{9}\left(\dfrac{2}{15-a}+\dfrac{7}{15+2a}\right)$ часа. Введём функцию $f(a)=\dfrac{S}{9}\left(\dfrac{2}{15-a}+\dfrac{7}{15+2a}\right)$, $0<a<15$ и найдем, при каком a эта функция принимает наименьшее значение на промежутке $(0;15)$.

$f'(a)=\dfrac{S}{9}\left(\dfrac{2}{(15-a)^2}-\dfrac{14}{(15+2a)^2}\right)=\dfrac{2S}{9}\cdot\dfrac{(15+2a)^2-7(15-a)^2}{(15-a)^2(15+2a)^2}$.

$f'(a)=0;\ (15+2a)^2-7(15-a)^2=0;\ (15-a)^2(15+2a)\neq 0;$

$\big(15+2a-\sqrt{7}(15-a)\big)\big(15+2a+\sqrt{7}(15-a)\big)=0;$

$\big(a(2+\sqrt{7})+15-15\sqrt{7}\big)\big(a(2-\sqrt{7})+15+15\sqrt{7}\big)=0.$

1) $a\big(2+\sqrt{7}\big)=15\big(\sqrt{7}-1\big)$, $a=\dfrac{15\big(\sqrt{7}-1\big)}{2+\sqrt{7}}=\dfrac{15\big(\sqrt{7}-1\big)\big(2-\sqrt{7}\big)}{-3}=$ $=-5\big(3\sqrt{7}-9\big)=45-15\sqrt{7};\ 45-15\sqrt{7}\in(0;15)$. Заметим, что $a=45-15\sqrt{7}$ удовлетворяет условию $(15-a)^2(15+2a)^2\neq 0$.

2) $a=\dfrac{-15\big(1+\sqrt{7}\big)}{2-\sqrt{7}}=\dfrac{-15\big(1+\sqrt{7}\big)\big(2+\sqrt{7}\big)}{-3}=5\big(9+3\sqrt{7}\big)=45+$ $+15\sqrt{7},\ 45+15\sqrt{7}\notin(0;15)$.

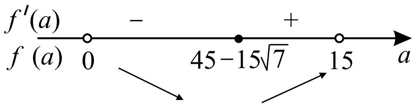


Рис. 241.

$a=45-15\sqrt{7}$ — точка минимума (см. рис. 241). Так как на интервале $(0;15)$ функция имеет единственную критическую точку, и она является точкой минимума функции $f(a)$, то в ней функция принимает наименьшее значение на интервале $(0;15)$.

При $a=\big(45-15\sqrt{7}\big)$ км велосипедист быстрее всего проделает путь от C до B.

Ответ: $45-15\sqrt{7}$.

1184. Пусть x — радиус основания конуса, $x>0$. Выразим через x высоту конуса, зная его объем: $\dfrac{1}{3}\pi x^2h=3$, $h=\dfrac{9}{\pi x^2}$. Рассмотрим функцию

$f(x) = x + \dfrac{9}{\pi x^2}$. Найдём её наименьшее значение на промежутке $x > 0$.

$f'(x) = \left(x + \dfrac{9}{\pi x^2}\right)'$, $f'(x) = 1 - \dfrac{18}{\pi x^3}$, $f'(x) = \dfrac{\pi x^3 - 18}{\pi x^3}$; $f'(x) = 0$, если $x = \sqrt[3]{\dfrac{18}{\pi}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{18}{\pi}} \in (0; +\infty)$. На промежутке $\left(0; \sqrt[3]{\dfrac{18}{\pi}}\right)$ $f'(x) < 0$, на промежутке $\left(\sqrt[3]{\dfrac{18}{\pi}}; +\infty\right)$ $f'(x) > 0$. Значит, $x = \sqrt[3]{\dfrac{18}{\pi}}$ — точка минимума. Так как непрерывная функция $f(x)$ имеет на промежутке $x > 0$ единственную критическую точку, которая является точкой минимума, то в ней функция принимает свое наименьшее значение.

Таким образом, радиус основания конуса равен $\sqrt[3]{\dfrac{18}{\pi}}$. Радиус шара $R_{\text{ш}} = \sqrt[3]{\dfrac{18}{\pi}}$, его объём — $V_{\text{ш}} = \dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{18}{\pi}}\right)^3 = 24$.

Ответ: 24.

1185. По условию в шар вписан прямоугольный параллелепипед. Обозначим через x ($x>0$) длину меньшей стороны основания прямоугольного параллелепипеда, $2x$ — длина большей стороны основания (см. рис. 242). Тогда $AB = x$, $AD = 2x$. Выразим через x высоту параллелепипеда AA_1, зная, что диагональ AC_1 равна двум радиусам шара, описанного около параллелепипеда, то есть $AC_1 = 2R_{\text{ш}}$, $R_{\text{ш}} = AE = \dfrac{1}{2}AC_1$.

$\triangle ADC$: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{4x^2 + x^2} = x\sqrt{5}$ $AO = \dfrac{1}{2}AC$, $AO = \dfrac{x\sqrt{5}}{2}$; $\triangle AOE$: $OE = \sqrt{AE^2 - AO^2} = \sqrt{\dfrac{35}{\pi} - \dfrac{5x^2}{4}}$;

$AA_1 = OO_1 = 2OE$, $AA_1 = 2\sqrt{\dfrac{35}{\pi} - \dfrac{5x^2}{4}}$.

Запишем сумму длин всех ребер параллелепипеда:

$P = 4\left(x + 2x + 2\sqrt{\dfrac{35}{\pi} - \dfrac{5x^2}{4}}\right)$. По смыслу задачи длины ребер — положительные числа, значит должна выполняться система неравенств:

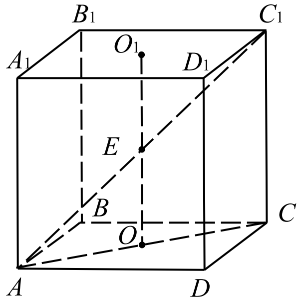


Рис. 242.

$$\begin{cases} \dfrac{35}{\pi} - \dfrac{5x^2}{4} > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \sqrt{\dfrac{28}{\pi}}\right)\left(x + \sqrt{\dfrac{28}{\pi}}\right) < 0, \\ x > 0; \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 2\sqrt{\dfrac{7}{\pi}}.$$

Введём функцию $p(x) = 4\left(x + 2x + 2\sqrt{\dfrac{35}{\pi} - \dfrac{5x^2}{4}}\right)$. Найдём с помощью производной наибольшее значение функции $p(x)$ на интервале $\left(0; 2\sqrt{\dfrac{7}{\pi}}\right)$:

$$4\left(x + 2x + 2\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}}\right)' = 4\left(1 + 2 + \frac{-\frac{5}{2}x}{\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}}}\right) =$$

$$= 4\left(3 - \frac{5x}{2\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}}}\right) = 12 - \frac{10x}{\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}}} = \frac{12\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}} - 10x}{\sqrt{\frac{35}{\pi} - \frac{5x^2}{4}}};$$

$p'(x) = 0 \Leftrightarrow 12\sqrt{\dfrac{35}{\pi} - \dfrac{5x^2}{4}} - 10x = 0$ (1), так как $\sqrt{\dfrac{35}{\pi} - \dfrac{5x^2}{4}} > 0$ при всех $x \in \left(0; 2\sqrt{\dfrac{7}{\pi}}\right)$. $\sqrt{\dfrac{35}{\pi} - \dfrac{5x^2}{4}} = \dfrac{5x}{6}$; $\dfrac{35}{\pi} - \dfrac{5x^2}{4} = \dfrac{25}{36}x^2$; $\dfrac{70x^2}{36} = \dfrac{35}{\pi}$; $x^2 = \dfrac{18}{\pi}$; $x_1 = \sqrt{\dfrac{18}{\pi}}$, $x_2 = -\sqrt{\dfrac{18}{\pi}}$. Проверка показывает, что уравнение (1) имеет только один корень $x = \sqrt{\dfrac{18}{\pi}}$, $\sqrt{\dfrac{18}{\pi}} \in \left(0; 2\sqrt{\dfrac{7}{\pi}}\right)$. На промежутке $\left(0; \sqrt{\dfrac{18}{\pi}}\right)$ $p'(x) > 0$, на промежутке $\left(\sqrt{\dfrac{18}{\pi}}; 2\sqrt{\dfrac{7}{\pi}}\right)$ $p'(x) < 0$.

Значит, $x = \sqrt{\dfrac{18}{\pi}}$ — точка максимума. Так как функция $p(x)$ имеет на промежутке $\left(0; 2\sqrt{\dfrac{7}{\pi}}\right)$ единственную критическую точку, которая является точкой максимума, то в ней функция принимает наибольшее значение на этом промежутке. Меньшая сторона основания параллелепипеда равна $\sqrt{\dfrac{18}{\pi}}$. Радиус круга равен $\sqrt{\dfrac{18}{\pi}}$. $S_{\text{кр}} = \pi\left(\sqrt{\dfrac{18}{\pi}}\right)^2 = 18$.

Ответ: 18.

1186. По условию куб вневписан в конус. Проведем осевое сечение конуса, параллельное одной из граней куба (см. рис. 243). Пусть x — радиус основания конуса ($x > 0$). Выразим через x высоту конуса, зная его объем: $\dfrac{1}{3}\pi x^2 h = \dfrac{17}{3}$, $h = \dfrac{17}{\pi x^2}$. Обозначим ребро вневписанного в конус куба через a и выразим его через x. $\triangle SOK \sim \triangle SO_1C_1$ ($\angle S$ — общий, $\angle SKO = \angle SC_1O_1$ как соответственные при $OK \parallel O_1C_1$ и SK секущей), $\dfrac{OK}{O_1C_1} = \dfrac{SO}{SO_1}$, где $OK = x$, $O_1C_1 = \dfrac{a}{2}$, $SO = \dfrac{17}{\pi x^2}$,

$SO_1 = SO - OO_1 = \dfrac{17}{\pi x^2} - a$. $\dfrac{x}{\dfrac{a}{2}} = \dfrac{\dfrac{17}{\pi x^2}}{\dfrac{17}{\pi x^2} - a}$; $2x\left(17 - a\pi x^2\right) = 17a$;

$34x - 2a\pi x^3 = 17a$; $a\left(17 + 2\pi x^3\right) = 34x$; $a = \dfrac{34x}{17 + 2\pi x^3}$.

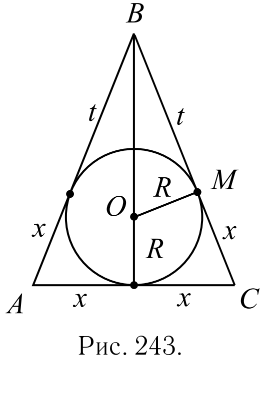


Рис. 243.

Введём функцию $a(x) = \dfrac{34x}{17+2\pi x^3}$. Найдём с помощью производной наибольшее значение функции $a(x)$ при $x > 0$:

$$\left(\frac{34x}{17+2\pi x^3}\right)' = \frac{34\left(17+2\pi x^3\right) - 6\pi x^2 \cdot 34x}{\left(17+2\pi x^3\right)^2} = \frac{34\left(17-4\pi x^3\right)}{\left(17+2\pi x^3\right)^2};$$

$a'(x) = 0$ при $x = \sqrt[3]{\dfrac{17}{4\pi}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{17}{4\pi}} \in (0; +\infty)$.

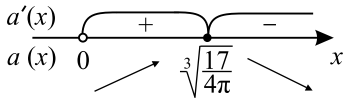


Рис. 244.

При переходе через точку $x = \sqrt[3]{\dfrac{17}{4\pi}}$ производная меняет знак с «$+$» на «$-$» (см. рис. 244). $x = \sqrt[3]{\dfrac{17}{4\pi}}$ — точка максимума. Функция $a(x)$ имеет единственную критическую точку на промежутке $(0; +\infty)$, которая является точкой максимума, значит, принимает в ней наибольшее значение на этом промежутке. Радиус основания конуса равен $\sqrt[3]{\dfrac{17}{4\pi}}$. Радиус шара равен $\sqrt[3]{\dfrac{17}{4\pi}}$, $V_{\text{ш}} =$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{17}{4\pi}}\right)^3 = \frac{17}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{17}{3}$.

1187. Составим план решения задачи.

1) Обозначим через x радиус основания конуса, описанного около шара (на рис. 245 приведено осевое сечение конуса). Выразим через x величину t. Отметим, что t (см. рис. 245) есть расстояние от вершины конуса до окружности касания шара и конуса.

2) Пусть $f(x)$ — полупериметр осевого сечения. Находим x_0, при котором функция $f(x)$ принимает наименьшее значение на промежутке $(0; +\infty)$.

3) Находим $t(x_0)$.

Решение.

1) Найдём R — радиус шара.

$\dfrac{256\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $64 = R^3$, $R = 4$.

Из подобия треугольников $\triangle DBC$ и $\triangle OBM$:

$\dfrac{x}{R} = \dfrac{x+t}{\sqrt{R^2+t^2}}$; $\dfrac{x}{4} = \dfrac{x+t}{\sqrt{16+t^2}}$;

$x\sqrt{16+t^2} = 4x + 4t$;

$16x^2 + t^2x^2 = 16x^2 + 16t^2 + 32xt$;

$tx^2 = 16t + 32x$;

$t(x^2-16) = 32x$; $t = \dfrac{32x}{x^2-16}$.

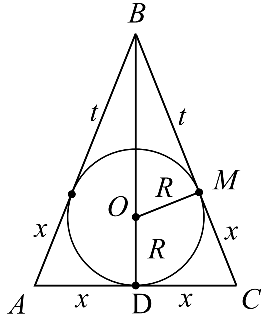


Рис. 245.

2) $f(x) = 2x + t = 2x + \dfrac{32x}{x^2-16} = \dfrac{2x^3 - 32x + 32x}{x^2-16} = \dfrac{2x^3}{x^2-16}$.

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2-16) - 2x^3\cdot 2x}{(x^2-16)^2} = \frac{6x^4 - 96x^2 - 4x^4}{(x^2-16)^2} = \frac{2x^4 - 96x^2}{(x^2-16)^2}.$$

$2x^4 - 96x^2 = 0$;

$x^2 - 48 = 0$; $x^2 = 48$;

$x = 4\sqrt{3}$.

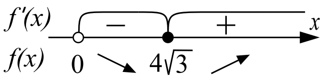


Рис. 246.

3) $t(4\sqrt{3}) = \dfrac{32\cdot 4\sqrt{3}}{48-16} = \dfrac{32\cdot 4\sqrt{3}}{32} = 4\sqrt{3}$.

Ответ: $4\sqrt{3}$.

1188. Пусть x, y, z — координаты точки B_1. Так как x, y и z положительные числа, то длины сторон прямоугольного параллелепипеда равны x, y, z, а объем $V = xyz$. $V = x\cdot 2x\cdot\left(\dfrac{1}{x^2} + x\cdot e^{3-2x}\right) = 2 + 2x^3e^{3-2x}$, $1 \leqslant x \leqslant 7$. Введём функцию $v(x) = 2 + 2x^3e^{3-2x}$. Найдём с помощью производной наибольшее и наименьшее значение функции $v(x)$ на отрезке $[1; 7]$:

$\left(2 + 2x^3e^{3-2x}\right)' = 6x^2e^{3-2x} - 4x^3e^{3-2x} = 2x^2e^{3-2x}(3-2x)$. $v'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 1{,}5$. $0 \notin [1; 7]$, $1{,}5 \in [1; 7]$. Найдём значение функции в концах отрезка и в стационарной точке:

$v(1) = 2 + 2e$; $v(7) = 2 + \dfrac{686}{e^{11}}$; $v(1{,}5) = 2 + 2\cdot 1{,}5^3e^0 = 8{,}75$. Из чисел

$2+2e,\ 2+\dfrac{686}{e^{11}}$ и 8,75 наибольшее 8,75, наименьшее $2+\dfrac{686}{e^{11}}$.

Ответ: 8,75; $2+\dfrac{686}{e^{11}}$.

1189. Пусть $x,\ y,\ z$ — координаты точки B_1. Так как $x,\ y$ и z положительные числа, то длины сторон прямоугольного параллелепипеда равны $x,\ y,\ z,$ а $S_{\text{полн. пов.}} = 2(x+y)\cdot z+2xy,$

$$S_{\text{полн. пов.}} = 2(x+2x)\cdot\left(x+\frac{36}{(2x)^2}\right)+2x\cdot 2x = 6x\left(x+\frac{9}{x^2}\right)+4x^2=$$

$$=6x^2+\frac{54}{x}+4x^2=10x^2+\frac{54}{x},\ 1\leqslant x\leqslant 2.$$

Введём функцию $S(x) = 10x^2+\dfrac{54}{x}$. Найдём с помощью производной на отрезке $[1;2]$ наименьшее значение функции $S(x)$:

$S'(x)=\left(10x^2+\dfrac{54}{x}\right)'$; $S'(x)=20x-\dfrac{54}{x^2}$; $S'(x)=\dfrac{20x^3-54}{x^2}$. $S'(x)=0$ при $x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{10}}$, $\dfrac{3}{\sqrt[3]{10}}\in[1;2]$.

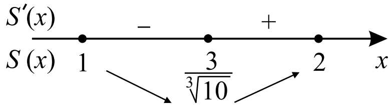


Рис. 247.

$x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{10}}$ — точка минимума (см. рис. 247). Так как функция $S(x)$ на отрезке $[1;2]$ имеет единственную критическую точку, а именно, точку минимума, то в этой точке функция принимает наименьшее значение на отрезке $[1;2]$. Длина меньшего ребра параллелепипеда равна $\dfrac{3}{\sqrt[3]{10}}$.

Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt[3]{10}}$.

1191. Так как точка A — ближайшая на автотрассе к точке M, автотрасса прямолинейна, то треугольник MAB — прямоугольный, (см. рис. 248), AB — участок автотрассы. $AM=60$, $MB=110$, $AB=\sqrt{110^2-60^2}=$ $=10\sqrt{11^2-6^2}=10\sqrt{85}$. Пусть $C\in AB$ и $AC=x$. Путь от M до C прямолинеен по условию, $MC=\sqrt{60^2+x^2}$.

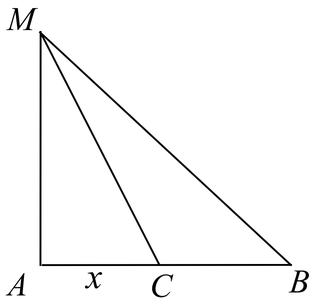


Рис. 248.

$t_1(x) = \dfrac{\sqrt{60^2 + x^2}}{30}$ — время движения от точки M до точки C.

$t_2(x) = \dfrac{10\sqrt{85} - x}{50}$ — время движения от точки C до точки B.

$t(x) = \dfrac{\sqrt{60^2 + x^2}}{30} + \dfrac{10\sqrt{85} - x}{50}$ — общее время.

Так как $0 \leqslant x \leqslant 10\sqrt{85}$, то найдем наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $\left[0; 10\sqrt{85}\right]$. $t'(x) = \dfrac{2x}{30 \cdot 2\sqrt{60^2 + x^2}} - \dfrac{1}{50}$; $t'(x) =$

$= \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{x}{3\sqrt{60^2 + x^2}} - \dfrac{1}{5}\right)$. $t'(x) = 0$; $\dfrac{x}{3\sqrt{60^2 + x^2}} - \dfrac{1}{5} = 0$, $\sqrt{60^2 + x^2} \neq 0$; $5x - 3\sqrt{60^2 + x^2} = 0$; $25x^2 = 9(60^2 + x^2)$; $16x^2 = 9 \cdot 60^2$; $4x = 3 \cdot 60 = 180$; $x = 45$ (так как $x \geqslant 0$).

$t'(x)$ определена для любого x. При $x < 45$, $t'(x) < 0$, а при $x > 45$, $t'(x) > 0$. Следовательно, $x = 45$ — точка минимума функции $t(x)$, а так как $45 \in \left[0; 10\sqrt{85}\right]$ и это единственная критическая точка на отрезке $\left[0; 10\sqrt{85}\right]$, то при $x = 45$ функция $t(x)$ принимает наименьшее значение на этом отрезке.

Ответ: 45.

1192. Пусть координаты точки $A(x; y_1)$, координаты точки $B(x; y_2)$, координаты точки $C(x; 0)$ (см. рис. 249). В силу того, что $1{,}7 \leqslant x \leqslant 4{,}1$ и отрезок AB параллелен оси ординат, длина отрезка $OC = x$, длина отрезка $AB = |y_1 - y_2|$, так как $y_1 > y_2$, то $AB = y_1 - y_2$.

$$S = \frac{1}{2}OC \cdot AB;\ S = \frac{1}{2}x\left(\frac{5x+8}{x-1} - \frac{1-4x}{x-1}\right) = \frac{1}{2}x\left(\frac{9x+7}{x-1}\right) = \frac{9x^2+7x}{2(x-1)}.$$

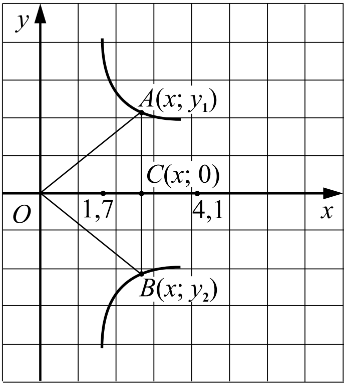


Рис. 249.

Введём функцию $S(x) = \dfrac{9x^2+7x}{2x-2}$. Найдём с помощью производной на отрезке $[1{,}7; 4{,}1]$ наименьшее значение функции $S(x)$.

$$\left(\frac{9x^2+7x}{2x-2}\right)' = \frac{(18x+7)(2x-2)-2\big(9x^2+7x\big)}{4(x-1)^2} =$$

$$= \frac{36x^2-22x-14-18x^2-14x}{4(x-1)^2} = \frac{18x^2-36x-14}{4(x-1)^2} =$$

$$= \frac{9x^2-18x-7}{2(x-1)^2} = \frac{9\left(x-\frac{7}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{2(x-1)^2};$$ $S'(x)=0$ при $x=-\dfrac{1}{3}$ и $x=\dfrac{7}{3}$; $-\dfrac{1}{3} \notin [1{,}7; 4{,}1]$, $\dfrac{7}{3} \in [1{,}7; 4{,}1]$. На промежутке $1{,}7 \leqslant x < \dfrac{7}{3}$ $S'(x) < 0$, на промежутке $\dfrac{7}{3} < x \leqslant 4{,}1$ $S'(x) > 0$. Значит, $x = \dfrac{7}{3}$ — точка минимума. Так как $x=\dfrac{7}{3}$ — единственная критическая точка функции $S(x)$ на отрезке $[1{,}7; 4{,}1]$, и эта точка является точкой минимума, то в ней функция принимает наименьшее значение.

$$S\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{9\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 7\cdot\frac{7}{3}}{2\left(\frac{7}{3}-1\right)} = 24{,}5.$$

Ответ: 24,5.

1193. Пусть призма вписана в полушар. Выполним чертеж осевого сечения (см. рис. 250) и введем обозначения: AD — диагональ основания призмы, OB — радиус полушара, AB — высота призмы.

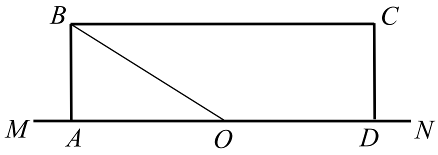


Рис. 250.

Пусть a — длина стороны квадрата, лежащего в основании призмы, $a > 0$. Тогда $AD = a\sqrt{2}$, $AO = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Объем полушара $V = \dfrac{2}{3}\pi R^3$,

$R = OB$, $\dfrac{2}{3}\pi R^3 = \dfrac{2}{3}\pi$, значит, $R = 1$.

$\triangle OAB$: $AB = \sqrt{OB^2 - AO^2} = \sqrt{1 - \dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - 2a^2}$. Запишем сумму длин всех ребер призмы:

$P = 4\left(a + a + \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - 2a^2}\right) = 4\left(2a + \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - 2a^2}\right)$.

По смыслу задачи длины ребер — положительные числа, значит, должна выполняться система неравенств:

$\begin{cases} 4 - 2a^2 > 0, \\ a > 0; \end{cases} \Rightarrow 0 < a < \sqrt{2}$. Введём функцию $p(a) = 8a + 2\sqrt{4 - 2a^2}$.

Найдём с помощью производной наибольшее значение функции $p(a)$ на интервале $\left(0; \sqrt{2}\right)$:

$p'(a) = 8 - \dfrac{4a}{\sqrt{4 - 2a^2}}$, $p'(a) = \dfrac{4\left(2\sqrt{4 - 2a^2} - a\right)}{\sqrt{4 - 2a^2}}$.

$p'(a) = 0$, $2\sqrt{4 - 2a^2} - a = 0$ (1), $4 - 2a^2 > 0$ при всех $a \in \left(0; \sqrt{2}\right)$,

$4\left(4 - 2a^2\right) = a^2$, $9a^2 = 16$, $a_1 = \dfrac{4}{3}$, $a_2 = -\dfrac{4}{3}$. Проверка показывает,

что только $a = \dfrac{4}{3}$ является корнем уравнения (1), $\dfrac{4}{3} \in \left(0; \sqrt{2}\right)$. $p'(a) > 0$

на промежутке $0 < x < \dfrac{4}{3}$ и $p'(a) < 0$ на промежутке $\left(\dfrac{4}{3}; \sqrt{2}\right)$. Значит,

$a = \dfrac{4}{3}$ — точка максимума. Так как функция $p(a)$ на интервале $\left(0; \sqrt{2}\right)$ имеет единственную критическую точку, которая является точкой максимума, то в ней она принимает наибольшее значение.

$p\left(\dfrac{4}{3}\right) = 8 \cdot \dfrac{4}{3} + 2\sqrt{4 - 2 \cdot \dfrac{16}{9}} = \dfrac{32}{3} + \dfrac{4}{3} = 12.$

Ответ: 12.

1194. Пусть прожектор установлен в точке $A(3; 0)$ (см. рис. 251). Объект находится на границе в точке $C\left(x; \sqrt{77 + \ln(4x - 3)}\right)$. Проекция точки C на ось абсцисс – точка $B(x; 0)$. AC — расстояние от места расположения прожектора до объекта. $\triangle ABC$: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

По условию $AC^2 = l^2$, $AB^2 = (3 - x)^2$, $BC^2 = 77 + \ln(4x - 3)$, $l^2 = (3 - x)^2 + 77 + \ln(4x - 3) = 9 - 6x + x^2 + 77 + \ln(4x - 3) =$ $= x^2 - 6x + 86 + \ln(4x - 3)$. Введём функцию $f(x) = x^2 - 6x + 86 + \ln(4x - 3)$. Найдём с помощью производной наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[0{,}9; 2{,}1]$.

$f'(x) = 2x - 6 + \dfrac{4}{4x - 3}$, $f'(x) = \dfrac{8x^2 - 30x + 22}{4x - 3}$,

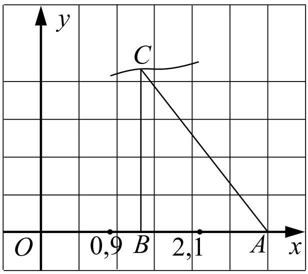


Рис. 251.

$f'(x) = \dfrac{8\left(x - \dfrac{11}{4}\right)(x - 1)}{4x - 3}$, $f'(x) = 0$ при $x = \dfrac{11}{4}$ и $x = 1$; $\dfrac{11}{4} \notin [0{,}9; 2{,}1]$, $1 \in [0{,}9; 2{,}1]$. $x = 1$ — точка максимума (см. рис. 252).

Так как функция $f(x)$ на отрезке $[0{,}9; 2{,}1]$ имеет единственную критическую точку, и она является точкой максимума, то в ней функция принимает наибольшее значение на этом отрезке. $f(1) = 1 - 6 + 86 = 81$, $l^2 = 81$,

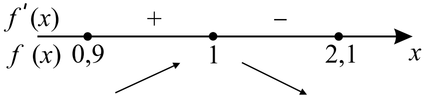


Рис. 252.

$l = 9$, тогда минимальная мощность прожектора $5l = 5 \cdot 9 = 45$.

Ответ: 45.

1195. Следует отметить, что на отрезке $[-1; 3]$ данная в условии функция отрицательна (см. рис. 253). Пусть точка A располагается левее точки B на оси абсцисс и имеет координаты $(t; 0)$. Так как AB является высотой трапеции, то есть $AB = 2$.
Тогда точка B задается координатами $(t + 2; 0)$. Тогда точка C имеет координаты $(t + 2, y(t + 2))$,
а точка D — координаты $(t, y(t))$. Найдём площадь трапеции $ABCD$ в зависимости от параметра t, то есть как функцию от t.

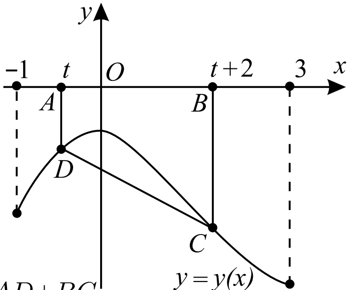


Рис. 253.

Итак, $S = S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AD+BC)\cdot AB = AD+BC$.
Так как $AD = -y(t)$, а $BC = -y(t+2)$ (в силу отрицательности данной функции), то $S(t) = -y(t) - y(t + 2)$. Учитывая вид заданной функции, получаем, что $S(t) = -t^3 + 5t^2 + 1 - \big((t + 2)^3 - 5(t + 2)^2 - 1\big)$;
$S(t) = -t^3 + 5t^2 + 1 - \big(t^3 + 6t^2 + 12t + 8 - 5t^2 - 20t - 20 - 1\big)$;
$S(t) = -2t^3 + 4t^2 + 8t + 22$.

Так как C и D принадлежат графику функции $y(x)$, заданному на отрезке $[-1; 3]$, то $t \geqslant -1$, а $t + 2 \leqslant 3$, следовательно, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Таким образом, наибольшее значение площади трапеции $ABCD$ совпадает с наибольшим значением функции $S(t) = -2t^3 + 4t^2 + 8t + 22$ на отрезке $[-1; 1]$. Найдём это значение, исследовав на экстремумы функцию $S(t)$ на отрезке $[-1; 1]$. Для этого найдем производную функции $S(t)$:

$S'(t) = (-2t^3 + 4t^2 + 8t + 22)' = -6t^2 + 8t + 8$.

Найдём нули производной, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.

$S'(t) = 0; 6t^2 - 8t - 8 = 0; 3t^2 - 4t - 4 = 0;$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 3\cdot(-4)}}{3} = \frac{2 \pm 4}{3};$$

$t_1 = -\dfrac{2}{3} \in [-1;1], t_2 = 2 \notin [-1;1]$. $S'(t) = -6(t-2)\left(t+\dfrac{2}{3}\right)$,следовательно, что $S'(t) < 0$ на промежутке $\left[-1;-\dfrac{2}{3}\right)$ и $S'(t) > 0$ на промежутке $\left(-\dfrac{2}{3};1\right]$. Значит, $t = -\dfrac{2}{3}$ — точка минимума функции $S(t)$.

Таким образом, из проведенного анализа следует, что на отрезке $[-1;1]$ имеется единственная критическая точка $t = -\dfrac{2}{3}$ функции $S(t)$, которая является точкой минимума. Следовательно, в силу непрерывности функции $S(t)$ ее наибольшее значение на отрезке $[-1;1]$ достигается на одном из концов этого отрезка. Поэтому найдем значения $S(-1)$ и $S(1)$ и выберем из них наибольшее. Итак, $S(-1) = 2 + 4 - 8 + 22 = 20$, $S(1) = -2 + 4 + 8 + 22 = 32$. Следовательно, наибольшее значение площади трапеции $ABCD$ равно 32.

Ответ: 32.

1196. $2 \cdot \dfrac{2x\cdot(x+2)+(1-x)\cdot(1+x+x^2)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+1)} = 2\cdot\dfrac{2x^2+4x+1-x^3}{x\cdot(x-3)\cdot(x+1)} =$

$= 2\cdot\dfrac{-x^3+2x^2+4x+1}{x^3-2x^2-3x} = 2\cdot\dfrac{-\left(x^3-2x^2-3x\right)+x+1}{x^3-2x^2-3x} =$

$= \dfrac{2\cdot(x+1)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+1)} - 2 = \dfrac{2}{x\cdot(x-3)} - 2$. $y = \dfrac{2}{x\cdot(x-3)} - 2$.

Пусть $AH = x$, тогда $AK = \dfrac{2}{x\cdot(x-3)} - 2$.

$AB = \dfrac{AK+MD}{2} = \dfrac{1}{x\cdot(x-3)} + 1$. $S_{ABCD} = S_{ABMH}$ (см. рис. 254). $S_{ABMH} = x\cdot\left(\dfrac{1}{x\cdot(x-3)}+1\right) = \dfrac{1}{x-3} + x$. Чтобы найти наименьшую возможную площадь, нужно найти минимум функции $s(x) = \dfrac{1}{x-3}+x$ при $x > 2$. $s(x) = \dfrac{1}{x-3}+x$, $s'(x) = 1 - \dfrac{1}{(x-3)^2}$. $s'(x) = 0$, $1 - \dfrac{1}{(x-3)^2} = 0$, $x = 4$ (так как $x = 2$ не удовлетворяет условию $x > 2$).
При $x > 4$ $s'(x) > 0$, при $2 < x < 4$ $s'(x) < 0$, значит, $x = 4$ — точка минимума функции $s(x)$, минимум функции равен $s(4) = 5$, значит, наименьшая S_{ABCD} равна 5.

Ответ: 5.

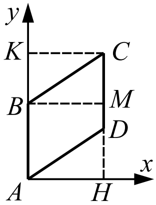


Рис. 254.

1197. Пусть v км/ч — собственная скорость лодки. Так как при переправе лодка всегда направлена перпендикулярно берегам, то в направлении, перпендикулярном берегам, скорость движения при переправе равна v км/ч, а в направлении, параллельном берегам, скорость движения совпадает со скоростью течения реки. Следовательно, рыбак переправляется через реку за $\dfrac{1}{v}$ часов, при этом вдоль берегов он продвигается на $10 \cdot \dfrac{1}{v}$ км. Оставшийся путь до пункта M в $3 - \dfrac{10}{v}$ км он проходит за $\dfrac{3 - \dfrac{10}{v}}{v} = \dfrac{3v - 10}{v^2}$ часов. Следовательно общее время, затраченное рыбаком на передвижение из пункта N в пункт M равно
$T(v) = \dfrac{1}{v} + \dfrac{3v - 10}{v^2} = \dfrac{4v - 10}{v^2}$. Исходя из формулировки задачи, заметим, что должны выполняться условия $3 - \dfrac{10}{v} \geqslant 0$ и $v > 0 \Rightarrow v \geqslant \dfrac{10}{3}$.
Найдём максимальное значение функции $T(v) = \dfrac{1}{v} + \dfrac{3v - 10}{v^2} = \dfrac{4v - 10}{v^2}$ на промежутке $\left[\dfrac{10}{3}; +\infty\right)$. Для этого исследуем на экстремумы функцию $T(v)$. $T'(v) = \dfrac{4 \cdot v^2 - 2v \cdot (4v - 10)}{v^4} = \dfrac{20v - 4v^2}{v^4} = \dfrac{4(5 - v)}{v^3}$. $T'(v) = 0$ $\Rightarrow$
$v = 5 \in \left[\dfrac{10}{3}; +\infty\right)$. Таким образом, $T'(v) > 0$ при $\dfrac{10}{3} \leqslant v < 5$, $T'(v) = 0$ при $v = 5$ и $T'(v) < 0$ при $5 < v$. Значит, точка $v = 5$ — единственная критическая точка, и она является точкой максимума функции $T(v)$ на

промежутке $\left[\frac{10}{3};+\infty\right)$. Поэтому максимальное значение функции $T(v)$ на промежутке $\left[\frac{10}{3};+\infty\right)$ достигается в точке $v=5$. Следовательно, максимальное количество времени, которое может занять передвижение рыбака из пункта N в пункт M, равно $T(5)=\frac{10}{25}=0{,}4$ часа $=24$ минуты.

Ответ: 24.

1198. Ключевая идея: Если непрерывная на промежутке функция имеет единственную критическую точку — точку минимума (максимума), то в ней достигается наименьшее (наибольшее) значение функции.

1. Из уравнения $x^3y = a$ следует, что $y = \frac{a}{x^3}$. Обозначим через $g(x)=f(x,\frac{a}{x^3})=48x+\frac{a}{x^3}-a$, $a\in[1;+\infty]$, $x>0$.

2. Для нахождение наименьшего значения $g(x)$ найдем ее производную. Имеем $g'(x)=48-\frac{3a}{x^4}$. Ясно, что $g'(x)<0$ при $0<x<\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{a}$ и $g'(x)>0$ при $x>\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{a}$. Следовательно, $x_0=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{a}$ — точка минимума, а $g(x_0)=32\sqrt[4]{a}-a$ — минимум и наименьшее значение функции при $x>0$.

3. Найдём наибольшее значение $p(a)=g(x_0)$ как функции от a на промежутке $[1;+\infty)$. Для этого найдем производную. Получаем:
$p'(a)=\frac{8}{a^{\frac{3}{4}}}-1$. Ясно, что $p'(a)>0$ при $1<x<16$ и $p'(x)<0$ при $x>16$. Следовательно, $a=16$ — точка максимума, и наибольшее значение $g(x_0)$ достигается на промежутке $[1;+\infty)$ при $a=16$. Таким образом, наибольшее значение $g(x_0)$ равно 48, а соответствующие значения $x_0=1$ и $y_0=\frac{a}{x_0^3}=16$.

Ответ: $\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

1199. План решения:
1) Выразим y через x и рассмотрим $f(x,y)$ как функцию от x.
2) Найдём наименьшее значение этой функции, зависящее от параметра a.
3) Найдём наибольшее значение минимума как функции от a.

Ключевая идея: Если непрерывная функция на промежутке имеет единственную критическую точку — точку минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции.

1) Из уравнения $x^2y = a$ следует, что $y = \dfrac{a}{x^2}$. Обозначим через

$g(x) = f\Big(x, \dfrac{a}{x^2}\Big) = 3x + \dfrac{2a}{x^2}$; $a \in [6; 48]$, $x > 0$.

2) Для нахождение наименьшего значения $g(x)$ найдем ее производную. Имеем, $g'(x) = 3 - \dfrac{4a}{x^3}$. Ясно, что $g'(x) < 0$ при $0 < x < \sqrt[3]{\dfrac{4a}{3}}$ и

$g'(x) > 0$ при $x > \sqrt[3]{\dfrac{4a}{3}}$, Следовательно, $x_0 = \sqrt[3]{\dfrac{4a}{3}}$ — единственная

критическая точка, и она является точкой минимума, а $g(x_0) = \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{36a}$ — минимум и наименьшее значение функции при $x > 0$.

3) Заметим, что $g(x_0)$ — возрастающая функция от a на отрезке $[6; 48]$. Следовательно, наибольшее значение $g(x_0)$ достигается в правой границе отрезка $[6; 48]$, то есть при $a = 48$. Таким образом, наибольшее значение $g(x_0)$ равно 18, а соответствующие значения $x_0 = 4$ и $y_0 = \dfrac{a}{x_0^2} = 3$.

Ответ: 18 при $a = 48$, $x = 4$, $y = 3$.

1200. Ключевая идея: Если непрерывная на промежутке функция имеет единственную критическую точку — точку минимума (максимума), то в ней достигается наименьшее (наибольшее) значение функции.

1. Из уравнения $x^3y = a$ следует, что $y = \dfrac{a}{x^3}$. Обозначим через

$g(x) = f(x, \dfrac{a}{x^3}) = 48x + \dfrac{a}{x^3} - a$,$a \in [1; +\infty]$, $x > 0$.

2. Для нахождение наименьшего значения $g(x)$ найдем ее производную. Имеем, $g'(x) = 48 - \dfrac{3a}{x^4}$. Ясно, что $g'(x) < 0$ при $0 < x < \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{a}$ и

$g'(x) > 0$ при $x > \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{a}$. Следовательно, $x_0 = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{a}$ — точка минимума, а $g(x_0) = 32\sqrt[4]{a} - a$ — минимум и наименьшее значение функции при $x > 0$.

3. Найдём наибольшее значение $p(a) := g(x_0)$ как функции от a на

промежутке $[1; +\infty)$. Для этого найдем производную. Получаем, $p'(a) = \frac{8}{a^{\frac{3}{4}}} - 1$. Ясно, что $p'(a) > 0$ при $1 < x < 16$ и $p'(x) < 0$ при $x > 16$. Следовательно, $a = 16$ — точка максимума, и наибольшее значение $g(x_0)$ достигается на промежутке $[1; +\infty)$ при $a = 16$. Таким образом, наибольшее значение $g(x_0)$ равно 48, а соответствующие значения $x_0 = 1$ и $y_0 = \frac{a}{x_0^3} = 16$.

Ответ: 48 при $a = 16$, $x = 1$, $y = 16$.

1201. План решения:
1) Выразим y через x и рассмотрим $f(x, y)$ как функцию от x.
2) Найдём наибольшее значение этой функции, зависящее от параметра a.
3) Найдём наибольшее значение максимума как функции от a.

Ключевая идея: Если непрерывная функция на промежутке имеет единственную критическую точку — точку максимума, то в ней достигается наибольшее значение функции.

1) Из уравнения $x^3y = a$ следует, что $y = \frac{a}{x^3}$. Обозначим через $g(x) = f\left(x, \frac{a}{x^3}\right) = 20 + \frac{a^2 - 4a}{x} - 12x$; $a \in [1; 3]$, $x > 0$.

2) Для нахождения наибольшего значения $g(x)$ найдем ее производную. Имеем, $g'(x) = \frac{4a - a^2}{x^2} - 12$. Ясно, что $4a - a^2 > 0$ при $a \in [1; 3]$, поэтому $g'(x) > 0$ при $0 < x < \frac{1}{6}\sqrt{12a - 3a^2}$ и $g'(x) < 0$ при $x > \frac{1}{6}\sqrt{12a - 3a^2}$. Следовательно, $x_0 = \frac{1}{6}\sqrt{12a - 3a^2}$ — единственная критическая точка, и она является точкой максимума, а $g(x_0) = 20 - 4\sqrt{12a - 3a^2}$ — максимум и наибольшее значение функции при $x > 0$.

3) Найдём наибольшее значение $p(a) = g(x_0)$ как функции от a на промежутке $[1; 3]$. Ясно, что $p(a)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[1; 3]$ в тех точках, в которых принимает наименьшее значение функция $12a - 3a^2$, графиком которой на отрезке $a \in [1; 3]$ является парабола с ветвями, направленными вниз, и вершиной $a = 2$. Следовательно, наибольшее значение $p(a)$ достигается на границах промежутка $[1; 3]$, то есть при $a = 1$ или $a = 3$. Таким образом, наибольшее значение $g(x_0) = p(1) = p(3) = 8$, а соответствующие значения $x_0 = 0{,}5$ и

$y_0 = \dfrac{a}{x_0^3} = 8.$

Ответ: 8 при $a = 1$, $x = 0{,}5$, $y = 8$.

1202. План решения:
1) Докажем, что периметр многоугольника $ABCEFGH$ будет минимальным при $GH = 50$ м.
2) Представим периметр многоугольника $ABCEFGH$ как функцию от некоторого параметра и найдем ее минимум с помощью первой производной.

1) Обозначим AB через x, а EF через y. Покажем, что при фиксированном x периметр фигуры $ABCEFGH$ уменьшается при уменьшении GH. Это будет означать, что если рассмотреть фигуру $ABCEFGH$, удовлетворяющую условиям задачи, у которой $GH \neq 50$ м (то есть $GH > 50$ м), то можно уменьшить GH всегда так, чтобы выполнялись все требования задачи, но при этом периметр фигуры $ABCEFGH$ уменьшится. Таким образом, доказав указанный выше факт, мы докажем, что периметр фигуры $ABCEFGH$ будет наименьшим при $GH = 50$ м. Рассмотрим такие две фигуры $ABCEFGH$ и $A_1B_1C_1E_1FGH_1$ (см. рис. 255), удовлетворяющие всем требованиям задачи, что $GH_1 < GH$.

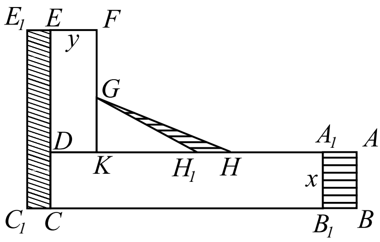


Рис. 255.

Так как $S_{ABCEFGH} = S_{A_1B_1C_1E_1FGH_1} = 3500$ м^2, то $S_{ABCEFGH} = S_{A_1B_1CEFGH_1} + S_{A_1B_1BA} + S_{GHH_1}$ и $S_{A_1B_1C_1E_1FGH_1} = S_{A_1B_1CEFGH_1} + S_{ECC_1E_1}$, то $S_{A_1B_1BA} + S_{GHH_1} = S_{ECC_1E_1}$. Так как $S_{GHH_1} = \dfrac{1}{2}GK \cdot HH_1$, $S_{A_1B_1BA} = AB \cdot AA_1$, а $S_{ECC_1E_1} = EC \cdot CC_1$ и $AA_1 = HH_1$ (это следует из $AA_1 = AH = 40$ м), то

$(15 + x) \cdot HH_1 = (65 + x) \cdot CC_1 \Rightarrow HH_1 = \dfrac{65 + x}{15 + x} \cdot CC_1.$

$P_{A_1B_1C_1E_1FGH_1} - P_{ABCEFGH} = 2CC_1 - 2AA_1 + GH_1 - (GH + HH_1) =$

$= 2CC_1 - AA_1 + GH_1 - GH$. Найдём знак выражения $2CC_1 - AA_1 + GH_1 - GH$. Так как $GH_1 < GH$, $AA_1 = HH_1$ и по условию $x \leqslant 35$, то $2CC_1 - AA_1 + GH_1 - GH < 2CC_1 - HH_1 =$

$$= 2CC_1 - \frac{65+x}{15+x} \cdot CC_1 = \frac{x-35}{15+x} \cdot CC_1 \leqslant 0.$$

Значит, $P_{A_1B_1C_1E_1FGH_1} < P_{ABCEFGH}$, что и требовалось доказать.

2) Так как $GH = 50$, то из $\triangle GKH \Rightarrow KH = \sqrt{GH^2 - GK^2} = 40$ м. Выразим периметр и площадь фигуры $ABCEFGH$ через параметры x и y, получим: $P_{ABCEFGH} = 2(x+y) + 270$,

$S_{ABCEFGH} = S_{ABCD} + S_{EFKD} + S_{GKH} =$

$$= AB \cdot (AH + HK + EF) + EF \cdot FK + \frac{1}{2} GK \cdot KH = x(80+y) + 65y + 600 =$$

$= 3500 \Rightarrow y = \dfrac{2900 - 80x}{65+x}$. Поэтому $P_{ABCEFGH} = P(x) =$

$= 2\left(\dfrac{2900-80x}{65+x} + x\right) + 270$. Найдём минимальное значение функции $P(x)$ на промежутке $(0; 35]$. $P'(x) = 2 \cdot \dfrac{-80(65+x) - (2900-80x)}{(65+x)^2} + 2 =$

$$= 2 - 2 \cdot \frac{8100}{(65+x)^2} = 2 \cdot \frac{(65+x)^2 - 90^2}{(65+x)^2} =$$

$= 2 \cdot \dfrac{(x-25)(x+155)}{(65+x)^2}$. Следовательно $P'(x) < 0$ при $x \in (0; 25)$, $P'(x) = 0$ при $x = 25$ и $P'(x) > 0$ при $25 < x \leqslant 35$. Следовательно, функция $P(x)$ при $x \in (0; 35]$ имеет единственную критическую точку $x = 25$, при этом $x = 25$ — точка минимума. Поэтому наименьшее значение периметра $P_{ABCEFGH}$ равно $P(25) = 340$.

Ответ: 340.

1203. План решения: 1. Докажем, что периметр многоугольника $ACDFGHM$ будет минимальным при $AM = 130$ м.

2. Представим периметр многоугольника $ACDFGHM$ как функцию от некоторого параметра и найдем ее минимум с помощью первой производной.

1. Обозначим BC через x, а FG через y. Покажем, что при фиксированном y периметр фигуры $ACDFGHM$ уменьшается при уменьшении AM. Это будет означать, что если рассмотреть фигуру $ACDFGHM$, удовлетворяющую условиям задачи, у которой $AM \neq 130$ м (то есть $AM > 130$ м), то можно уменьшить AM всегда так, чтобы остались вы-

полняться все требования задачи, но при этом периметр фигуры $ACDFGHM$ уменьшится. Таким образом, доказав указанный выше факт, мы докажем, что наименьший периметр фигуры $ACDFGHM$ будет при $AM = 130$ м. Рассмотрим такие две фигуры $ACDFGHM$ и $A_1C_1D_1FGHM$ (см. рисунок 256), удовлетворяющие всем требованиям задачи, что $A_1M < AM$. Так как $S_{ACDFGHM} = S_{A_1C_1D_1FGHM} = 6700$ м^2,

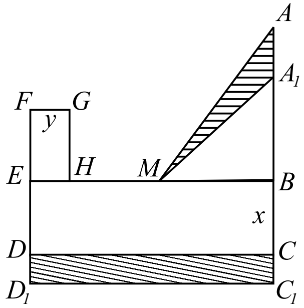


Рис. 256.

$S_{ACDFGHM} = S_{A_1CDFGHM} + S_{A_1AM}$ и $S_{A_1C_1D_1FGHM} = S_{A_1CDFGHM} + {}$ $+ S_{CC_1D_1D}$, то $S_{MAA_1} = S_{CC_1D_1D}$. Так как $S_{MAA_1} = \dfrac{1}{2}MB \cdot AA_1$, $S_{CC_1D_1D} = CC_1 \cdot CD$, то $25AA_1 = CC_1 \cdot (60 + y) \Rightarrow AA_1 = \dfrac{60 + y}{25} \cdot CC_1$. $P_{A_1C_1D_1FGHM} - P_{ACDFGHM} = 2CC_1 - AA_1 + MA_1 - MA$. Найдём знак выражения $2CC_1 - AA_1 + MA_1 - MA$. Так как $MA_1 < MA$, то $2CC_1 - AA_1 + MA_1 - MA < 2CC_1 - AA_1 = 2CC_1 - \dfrac{60 + y}{25} \cdot CC_1 =$ $= \dfrac{-y - 10}{60 + y} \cdot CC_1 < 0$. Значит, $P_{A_1C_1D_1FGHM} < P_{ACDFGHM}$, что и требовалось доказать.

2. Так как $AM = 130$, то из $\triangle AMB \Rightarrow AB = \sqrt{AM^2 - MB^2} = 120$ м. Выразим периметр и площадь фигуры $ACDFGHM$ через параметры x и y.

$P_{ACDFGHM} = 2(x+y) + 360$. $S_{ACDFGHM} = S_{ABM} + S_{BCDE} + S_{EFGH} =$ $= \dfrac{1}{2}AB \cdot BM + BC \cdot CD + FG \cdot GH = 3000 + x(60 + y) + 20y = 6700 \Rightarrow$

$x = \dfrac{3700 - 20y}{60 + y}$. Поэтому $P_{ACDFGHM} = P(y) = 2\left(\dfrac{3700 - 20y}{60 + y} + y\right) + 360$. Найдём минимальное значение функции $P(y)$ на промежутке $(0; +\infty)$.

$P'(y) = 2 \cdot \dfrac{-20(60 + y) - (3700 - 20y)}{(60 + y)^2} + 2 = 2 - 2 \cdot \dfrac{4900}{(60 + y)^2} =$

$= 2 \cdot \dfrac{(60 + y)^2 - 70^2}{(60 + y)^2} = 2 \cdot \dfrac{(y - 10)(y + 130)}{(60 + y)^2}$. Из вида производной $P'(y)$ следует, что $P'(y) < 0$ при $y \in (0; 10)$, $P'(y) = 0$ при $y = 10$ и $P'(y) > 0$ при $y > 10$. Следовательно, функция $P(y)$ при $y > 0$ имеет единственную критическую точку $y = 10$, при этом $y = 10$ — точка минимума. Поэтому наименьшее значение периметра $P_{ACDFGHM}$ равно $P(10) = 480$.

Ответ: 480.

1206. Пусть $M_1P_1 = x$, а $AA_1 = y$. Введём параметр $B_1E = A_1B_1 = a$. Так как $S_{A_1B_1EF} = a^2 \geqslant 16$, то $a \geqslant 4$. Объем всей фигуры равен сумме объемов параллелепипедов $NMPQN_1M_1P_1Q_1$, $FEC_1D_1F_1E_1PQ$, $ABCDA_1B_1C_1D_1$:
$V = 96 = a[y \cdot (a + 1 + x) + 5 \cdot (1 + x) + 1 \cdot x] = a[y \cdot (x + a + 1) + 6x + 5]$, откуда получаем, что $y = \dfrac{\dfrac{96}{a} - 6x - 5}{x + a + 1}$.

Сварить надо все ребра фигуры, не принадлежащие прямоугольникам $ABCD$ и Q_1P_1DC, поэтому общая длина сварочного шва L равна:
$L = 2M_1P_1 + 2MM_1 + 2ME_1 + 2E_1E + 2EB_1 + 2BB_1 + 5A_1B_1 = 2(x+y) + 7a + 14$. Подставим выражение для y:

$L(x) = 2x + \dfrac{\dfrac{192}{a} - 12x - 10}{x + a + 1} + 7a + 14$. Найдём производную:

$$L'(x) = 2 + \frac{-12(x + a + 1) - \left(\dfrac{192}{a} - 12x - 10\right)}{(x + a + 1)^2} = 2 - \frac{\dfrac{192}{a} + 12a + 2}{(x + a + 1)^2}.$$

$L'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+a+1)^2 = \dfrac{96}{a} + 6a + 1 \Rightarrow x + a + 1 = \sqrt{\dfrac{96}{a} + 6a + 1} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_* = -a - 1 + \sqrt{\dfrac{96}{a} + 6a + 1}$. В точке минимума вторая производная функции положительна. Так как $L''(x) = 2 \cdot \dfrac{\dfrac{192}{a} + 12a + 2}{(x+a+1)^3}$ и $L''(x_*) > 0$. $L'(x)$ возрастает в точке x_*, значит при переходе через точку x_* меняет знак с << $-$ >> на << $+$ >>. Тогда x_* — точка минимума функции $L(x)$.

Найдём минимальную длину сварочного шва $L(x)$:

$$L(x_*) = 14 + 5a + \frac{2(x_*+a)(x_*+a+1) - 12x_* + \dfrac{192}{a} - 10}{x_* + a + 1} = 14 + 5a +$$

$$+\frac{\dfrac{192}{a} + 12a + 2 - 2\sqrt{\dfrac{96}{a} + 6a + 1} - 12\left(-a - 1 + \sqrt{\dfrac{96}{a} + 6a + 1}\right) + \dfrac{192}{a} - 10}{\sqrt{\dfrac{96}{a} + 6a + 1}} =$$

$$= 14 + 5a + \frac{4\left(\dfrac{96}{a} + 6a + 1\right) - 14\sqrt{\dfrac{96}{a} + 6a + 1}}{\sqrt{\dfrac{96}{a} + 6a + 1}} = 5a + 4\sqrt{\frac{96}{a} + 6a + 1}.$$

Таким образом, мы получили зависимость минимальной длины сварочного шва от параметра $a \geqslant 4$. Рассмотрим функцию $g(a) = \dfrac{96}{a} + 6a$. Так как $g'(a) = 6 - \dfrac{96}{a^2} > 0$ при $a > 4$ и $g'(4) = 0$, то $g(a)$ не убывает на промежутке $[4; \infty)$ и принимает на нем минимальное значение в точке $a = 4$. Следовательно, общая длина сварочного шва будет минимальной, если $a = 4$. В этом случае

$$L(x_*) = 5 \cdot 4 + 4 \cdot \sqrt{\frac{96}{4} + 6 \cdot 4 + 1} = 48 \text{ дм}.$$

Ответ: 48.

1207. Пусть $BB_1 = x$, $EG = y$. Введём параметр $C_1Q = PQ = A_1B_1 = b$. Так как $S_{PQC_1D_1} = b^2 \geqslant 25$, то $b \geqslant 5$.

$V = 125 = b[5x + 2(x+b) + y(x+b+2)] = b[y(x+b+2) + 7x + 2b] \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{\dfrac{125}{b} - 7x - 2b}{x + b + 2}$. Общая длина сварочного шва L равна:

$L = 2KG_1 + 2KE_1 + 2E_1Q + 2C_1Q + 2C_1B_1 + 2BB_1 + 5A_1B_1 = 2(x+y) +$

$$+ 7b + 18 \Rightarrow L(x) = 2x + \frac{\frac{250}{b} - 14x - 4b}{x + b + 2} + 7b + 18.$$

$$L'(x) = 2 + \frac{-14(x+b+2) - \left(\frac{250}{b} - 14x - 4b\right)}{(x+b+2)^2} = 2 - \frac{\frac{250}{b} + 10b + 28}{(x+b+2)^2}.$$

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+b+2)^2 = \frac{125}{b} + 5b + 14 \Rightarrow x+b+2 = \sqrt{\frac{125}{b} + 5b + 14} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_* = -b - 2 + \sqrt{\frac{125}{b} + 5b + 14}.$$

Так как $L''(x) = 2 \cdot \dfrac{\frac{250}{a} + 10b + 28}{(x+b+2)^3}$ и $L''(x_*) > 0$, то x_* — точка минимума функции $L(x)$.

Минимальная длина сварочного шва $L(x)$:

$$L(x_*) = 18 + 5b + \frac{2(x_* + b)(x_* + b + 2) - 14x_* + \frac{250}{b} - 4b}{x_* + b + 2} =$$

$$= 18 + 5b + \frac{4\left(\frac{125}{b} + 5b + 14\right) - 18\sqrt{\frac{125}{b} + 5b + 14}}{\sqrt{\frac{125}{b} + 5b + 14}} = 5b +$$

$$+ 4\sqrt{\frac{125}{b} + 5b + 14}.$$

Функция $f(b) = \dfrac{125}{b} + 5b$ не убывает на промежутке $[5; \infty)$, так как $f'(b) = 5 - \dfrac{125}{b^2} > 0$ при $b > 5$ и $f'(5) = 0$, и принимает минимальное значение в точке $b = 5$. $L_{\min} = L(x_*)$ также принимает минимальное значение при $b = 5$.

$L_{\min} = L(x_*) = 5 \cdot 5 + 4 \cdot \sqrt{\dfrac{125}{5} + 5 \cdot 5 + 14} = 57$ дм.

Ответ: 57.

1208. 1) Обозначим $LM = x\ (> 0)$, $DC = y\ (> 0)$, $BC = z\ (z \leqslant 15)$. Площадь участка $ABDEHFLM$ $S = 1700 = S_{DEHC} + S_{CFGB} + S_{AGLM} = $ $= y \cdot (x + 10) + (x + 30) \cdot z + 20x \Rightarrow\ y = \dfrac{1700 - 20x - xz - 30z}{x + 10}$; $y > 0$.

Полупериметр участка $\dfrac{P}{2} = x + y + z + 30 + 20 = x + y + z + 50 =$

$$= x + \frac{1700 - 20x - xz - 30z}{x + 10} + z + 50 =$$

$$= \frac{x^2 + 10x + 1700 - 20x - xz - 30z + xz + 50x + 10z + 500}{x + 10} =$$

$$= \frac{x^2 + 40x + 2200 - 20z}{x + 10} = x + 30 + \frac{1900 - 20z}{x + 10} = f(x).$$

2) Исследуем функцию $f(x)$ при $x > 0$ с помощью производной. Пусть $z_0 \leqslant 15$; $f'(x) = 1 - \dfrac{1900 - 20z_0}{(x + 10)^2} = \dfrac{x^2 + 20x + 100 - 1900 - 20z_0}{(x + 10)^2}$. Найдём критическую точку $x_0 > 0$ при данном z_0. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 + 20x - 1800 + 20z_0 = 0$ (1); $x_0 = -10 + \sqrt{1900 - 20z_0} \geqslant$ $\geqslant -10 + \sqrt{1900 - 20 \cdot 15} = -10 + 40 = 30$. Далее, при $0 < x < x_0$ $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, так как x_0 — больший из корней квадратного трёхчлена (1) со старшим коэффициентом 1, то есть ветви параболы направлены вверх. Следовательно, x_0 — точка минимума функции $f(x)$ при $x > 0$.

3) Полупериметр $\dfrac{P}{2}$ данного участка принимает наименьшее значение для заданного z_0 в точке $x_0 = -10 + \sqrt{1900 - 20z_0}$, равное $f_{\text{наим.}} = f(x_0) = -10 + \sqrt{1900 - 20z_0} + 30 + \dfrac{1900 - 20z_0}{-10 + \sqrt{1900 - 20z_0} + 10} =$ $= 20 + \sqrt{1900 - 20z_0} + \sqrt{1900 - 20z_0} = 20 + 2\sqrt{1900 + 20z_0}$. Заметим, что чем меньше z_0, тем больше $\dfrac{P}{2} = 20 + 2\sqrt{1900 - 20z_0}$. Следовательно, наименьший из наименьших периметров будет при наибольшем из допустимых $z_0 \in (0; 15]$, то есть при $z_0 = 15$. Отсюда $20 + 2\sqrt{1900 - 20z_0} =$ $= 20 + 2\sqrt{1600} = 20 + 2 \cdot 40 = 100$, $x_0 = 30$. Значит $BC = z = 15$, пери-

метр $P = 2 \cdot 100 = 200$, $KL = y + 15 + 20 =$
$= \dfrac{1700 - 20 \cdot 30 - 30 \cdot 15 - 30 \cdot 15}{30 + 10} + 15 + 20 = \dfrac{200}{40} + 15 + 20 =$
$= 5 + 15 + 20 = 40$, $KD = LN = 30 + 30 = 60$.

Ответ: 200; 40; 60; 15.

1212. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{5}\left(2^{-x+1} + 2^{x-1}\right)$, равную отношению времени, требуемому на остывание станка, ко времени работы. С помощью производной найдем ее минимум на отрезке $[1; 5]$.

$f'(x) = \dfrac{\ln 2}{5}\left(2^{x-1} - 2^{1-x}\right)$. При $x < 1$ $f'(x) < 0$, а при $x > 1$ $f'(x) > 0$, то есть $x = 1$ — точка минимума. Таким образом, минимальное значение функции f равно $f(1) = \dfrac{2}{5}$. Теперь изобразим схематично на рис. 257 промежутки работы станка (соответствуют a_1, a_2, …, a_{n+1}) и перерывы

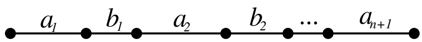


Рис. 257.

между ними (b_1, …, b_n), и запишем условия, которые на них накладываются:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = 10, \\ b_k \geqslant \dfrac{2}{5} a_k, \text{ при всех } k = 1, \dots, n, \\ a_{n+1} \leqslant 5. \end{cases}$$

Отсюда: $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 10 - a_{n+1} \geqslant 5$;

$b_1 + \dots + b_n \geqslant \dfrac{2}{5}(a_1 + \dots + a_n) \geqslant \dfrac{2}{5} \cdot 5 = 2$.

Итого $a_1 + b_1 + \dots + a_n + b_n + a_{n+1} \geqslant 12$, причем равенство здесь достигается, когда во всех неравенствах оно достигалось, то есть при $a_1 = 1, \dots, a_n = 1$, $a_{n+1} = 5$, $n = 5$ время работы минимально и составляет 12 часов.

Ответ: 12.

1214. Замена $4^x = t$, $t \in \left(\dfrac{1}{4}; 4\right]$ приводит выражения к виду $t^2 + 5at$ и $5 + 4at + 4t$. Найдём, при каких значениях a выполняется условие $t^2 + 5at \neq 5 + 4at + 4t$, $t \in \left(\dfrac{1}{4}; 4\right]$; $-t^2 + 4t + 5 \neq at$. Разделив обе части неравенства на t ($t \neq 0$), получим $\dfrac{5}{t} - t + 4 \neq a$. Рассмотрим функцию $f(t) = \dfrac{5}{t} - t + 4$ на промежутке $\left(\dfrac{1}{4}; 4\right]$. $f'(t) = -\dfrac{5}{t^2} - 1$, $f'(t) < 0$, значит функция $f(t)$ убывает. $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 23{,}75$; $f(4) = 1{,}25$.

Имеем: $\dfrac{5}{t} - t + 4 \neq a$ при $a \in (-\infty; 1{,}25) \cup [23{,}75; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 1{,}25) \cup [23{,}75; +\infty)$.

1216. Сделаем замену $3^{x^2} = t$, $t \geqslant 1$. Задача сводится к следующей: найдите все значения a, при которых неравенство $t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 2 > 0$ выполняется при всех значениях $t \in [1; +\infty)$. Так как ветви параболы направлены вверх, это возможно в случаях 1) и 2) (см. рис. 258).

Пусть $f(t) = t^2 + 2(a-1)t + a^2 - 2$, D — дискриминант уравнения $f(t) = 0$.

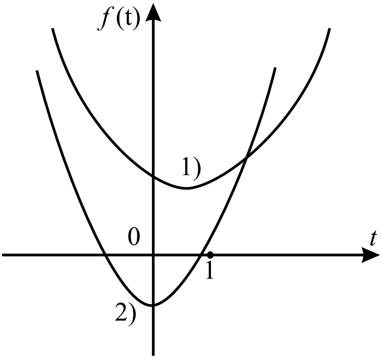


Рис. 258.

Случай 1). $D < 0$, $4\left(a^2 - 2a + 1\right) - 4a^2 + 8 < 0$; $-8a < -12$; $a > \dfrac{3}{2}$; $a \in \left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$.

Случай 2). $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ t_{\text{в}} < 1, \\ f(1) > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a \leqslant \dfrac{3}{2}, \\ a > 0, \\ (a-1)(a+3) > 0; \end{cases}$ $\Rightarrow a \in \left(1; \dfrac{3}{2}\right]$.

Объединяя решения случаев 1) и 2), получим ответ $a \in (1; +\infty)$.

Ответ: $(1; +\infty)$..

1217. Сделаем замену $\log_3 x = t$. При $x \in [3;9)$ $t \in [1;2)$. Задача сводится к следующей: найдите все значения a, для которых парабола $f(t) = t^2 - (3a+2)t - 6$ не пересекает ось абсцисс на промежутке $[1;2)$. Это условие может выполняться только в указанных на рисунке 259 четырёх случаях (ветви параболы направлены вверх). Рассмотрим эти случаи. Пусть D — дискриминант уравнения $f(t) = 0$.

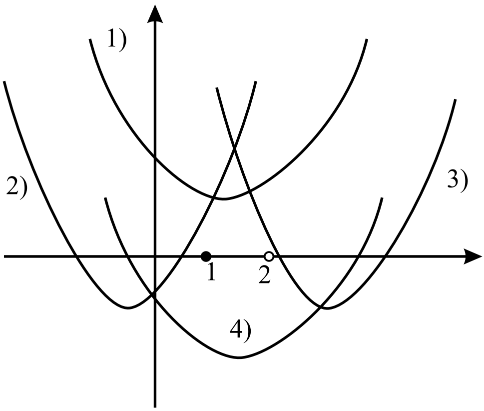


Рис. 259.

1) $D < 0$; $D = (3a+2)^2 + 24 > 0 \Rightarrow$ решений нет. Так как $D > 0$ для любых a, в случаях 2), 3), 4) мы не будем писать условие $D \geqslant 0$.

$$2)\begin{cases} t_{\text{в}} < 1, \\ f(1) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3a+2}{2} < 1, \\ 1 - (3a+2)\cdot 1 - 6 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ a < -\dfrac{7}{3}; \end{cases} \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right).$$

$$3)\begin{cases} t_{\text{в}} \geqslant 2, \\ f(2) \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3a+2}{2} \geqslant 2, \\ 4 - (3a+2)\cdot 2 - 6 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geqslant \dfrac{2}{3}, \\ a \leqslant -1; \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$$

$$4)\begin{cases} f(1) < 0, \\ f(2) \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -\dfrac{7}{3}, \\ a \geqslant -1; \end{cases} \Rightarrow a \in [-1; +\infty).$$

Объединяя решения всех случаев, получим ответ.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{7}{3}\right) \cup [-1; +\infty)$..

1218. Сделаем замену $2^x = t$, $t \in (4;8]$. Задача сводится к следующей: найдите все значения a, при которых парабола $f(t) = t^2 + (1-a)t - 1$ не пересекает ось абсцисс на промежутке $t \in (4;8]$. Так как ветви параболы

направлены вверх, то условие задачи выполняется только в четырёх случаях, указанных на рис. 260.
Пусть D — дискриминант уравнения $f(t)=0$. 1) $D<0$; $D=(1-a)^2+4>0$

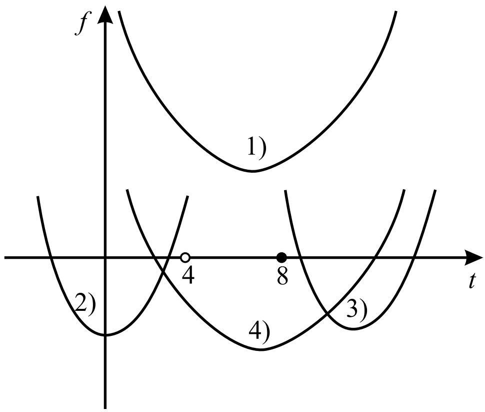


Рис. 260.

для любого a $\Rightarrow$ решений нет. В дальнейшем зная, что $D>0$, будем опускать это условие.

2) $\begin{cases} t_{\text{В}}=\dfrac{a-1}{2}\leqslant 4, \\ f(4)\geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a\leqslant 9, \\ a\leqslant\dfrac{19}{4}; \end{cases}$ $\Leftrightarrow a\in\left(-\infty;\dfrac{19}{4}\right]$.

3) $\begin{cases} t_{\text{В}}>8, \\ f(8)>0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>17, \\ a<\dfrac{71}{8}; \end{cases}$ $\Rightarrow$ нет решений.

4) $\begin{cases} f(4)\leqslant 0, \\ f(8)<0; \end{cases}$ $\begin{cases} a\geqslant\dfrac{19}{4}, \\ a>\dfrac{71}{8}; \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $a\in\left(\dfrac{71}{8};+\infty\right)$.

Объединяя решения всех случаев, получим ответ.

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{19}{4}\right]\cup\left(\dfrac{71}{8};+\infty\right)$..

1219. Преобразуем наше неравенство: $\left|\dfrac{1}{2}\sin 2x+1-a\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right|\leqslant\dfrac{3}{2}$, $-3\leqslant\sin 2x+2-a+a\cos 2x\leqslant 3$, $a-5\leqslant\sin 2x+a\cos 2x\leqslant a+1$, $\dfrac{a-5}{\sqrt{a^2+1}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\sin 2x+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}\cdot\cos 2x\leqslant\dfrac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}$. В середине двойного неравенства стоит функция $\cos\varphi\sin 2x + \sin\varphi\cos 2x = \sin(2x+\varphi)$, где φ удовлетворяет условиям:

$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}. \end{cases}$ Поэтому $\dfrac{a-5}{\sqrt{a^2+1}} \leqslant \sin(2x+\varphi) \leqslant \dfrac{a+1}{\sqrt{a^2+1}}$. Так как это неравенство должно выполняться для любых значений x, то

$$\begin{cases} \dfrac{a-5}{\sqrt{a^2+1}} \leqslant -1, \\ \dfrac{a+1}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+1} \leqslant 5-a, \\ \sqrt{a^2+1} \leqslant a+1. \end{cases}$$

Решим каждое из неравенств системы:

1) $\sqrt{a^2+1} \leqslant 5-a \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+1 \leqslant a^2-10a+25, \\ a \leqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant 2{,}4, \\ a \leqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow a \leqslant 2{,}4$.

2) $\sqrt{a^2+1} \leqslant a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+1 \leqslant a^2+2a+1, \\ a \geqslant -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0, \\ a \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow a \geqslant 0$.

Решением системы неравенств будет $0 \leqslant a \leqslant 2{,}4$.

Ответ: $[0; 2{,}4]$.

1220. Неравенство имеет смысл при $a > 0$, $x \neq \pm 1$.

1. При $a = 1$, $1^{\frac{2x+4}{x-1}} \geqslant 1^{\frac{4x+8}{x+1}}$ верно для любого x, кроме $x = \pm 1$. Но при $a = 1$, $2^a - 1 = 1$. Значит, этот случай невозможен.

2. При $0 < a < 1$, $a^{\frac{2x+4}{x-1}} \geqslant a^{\frac{4x+8}{x+1}} \Leftrightarrow \dfrac{2x+4}{x-1} - \dfrac{4x+8}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 1) \cup [3; +\infty)$.

Так как $\begin{cases} 2^a > 0 \\ 3^a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^a - 1 > -1 \\ 3^a - 3 > -3 \end{cases}$, то

а) $\begin{cases} -1 < 2^a - 1 < 1 \\ -3 < 3^a - 3 \leqslant -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2^a < 2 \\ 0 < 3^a \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \leqslant 0$. Так как $0 < a < 1$, то этот случай невозможен.

б) $\begin{cases} -1 < 2^a - 1 < 1 \\ -1 < 3^a - 3 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ \log_3 2 < a < \log_3 4 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (\log_3 2; 1)$.

в) Если $3^a - 3 \geqslant 3$, то $a \geqslant \log_3 6$, но $0 < a < 1 \Rightarrow$ этот случай невозможен.

г) Если $2^a - 1 \geqslant 3$, то $a \geqslant 2$ — также невозможно.

3. При $a > 1$, $\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2;-1) \cup (1;3]$.

а) $\begin{cases} -2 \leqslant 3^a - 3 < -1 \\ 1 < 2^a - 1 \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant 3^a < 2 \\ 2 < 2^a \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant \log_3 2 \\ 1 < a \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$a \in \varnothing$.

б) $\begin{cases} 1 < 3^a - 3 \leqslant 3 \\ 1 < 2^a - 1 \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < 3^a \leqslant 6 \\ 2 < 2^a \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 4 < a \leqslant \log_3 6 \\ 1 < a \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$a \in (\log_3 4; \log_3 6]$.

Объединяя рассмотренные случаи, получим
$a \in (\log_3 2; 1) \cup (2\log_3 2; 1 + \log_3 2]$.

Ответ: $(\log_3 2; 1) \cup (2\log_3 2; 1 + \log_3 2]$.

1221. Неравенство имеет смысл при $a > 0$, $x \neq \pm 2$.

1. При $a = 1$, $1^{\frac{3x-1}{x-2}} \geqslant 1^{\frac{2x+1}{x+2}}$ верно для любого x, кроме $x = \pm 2$. Но при $a = 1$, $4^a - 2 = 2$. Значит, этот случай невозможен.

2. При $a > 1$, $a^{\frac{3x-1}{x-2}} \geqslant a^{\frac{2x+1}{x+2}} \Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{x-2} - \dfrac{2x+1}{x+2} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x(x+8)}{(x-2)(x+2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -8] \cup (-2; 0] \cup (2; +\infty)$.

Так как при $a > 1$ $\begin{cases} 4^a - 2 > 0 \\ 2^a - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^a - 2 > 2 \\ 2^a - 1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a > \log_2 3 \end{cases} \Leftrightarrow$
$a \in (\log_2 3; +\infty)$.

3. При $0 < a < 1$, $\dfrac{x(x+8)}{(x-2)(x+2)} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-8; -2) \cup [0; 2)$. Так как при $0 < a < 1$ $\begin{cases} 2^a - 1 > 0 \\ 4^a - 2 > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2^a - 1 < 2 \\ 0 \leqslant 4^a - 2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < \log_2 3 \\ \log_4 2 \leqslant a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$a \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right)$.

Объединяя все случаи, получим $a \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (\log_2 3; +\infty)$.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (\log_2 3; +\infty)$.

1223. Запишем исходное неравенство в виде неравенства относительно a: $a(x^2+8x+3) + 12x^2 + 6x - 54 < 0$. Для решения неравенства достаточно, чтобы $f(-2) \leqslant 0$, $f(3) \leqslant 0$, и если $x^2 + 8x + 3 = 0$, то $12x^2 + 6x - 54 < 0$, где $f(a) = a(x^2 + 8x + 3) + 12x^2 + 6x - 54$. Решив первое неравенство, получим $x \in [-2; 3]$, решением второго будет $x \in [-3; 1]$. $x^2 + 8x + 3 = 0$, $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{13}$. $f(-4 - \sqrt{13}) > 0$, значит $x = -4 - \sqrt{13}$ не удовлетворяет поставленным условиям. $f\left(-4+\sqrt{13}\right) < 0$ и $-4+\sqrt{13} \in [-2; 1]$.

Ответ: $[-2; 1]$.

1225. Рассмотрим неравенство $(k-2)x^2+(2k-5)x+2k-3 > 0$. Введём функцию $y(x) = (k-2)x^2 + (2k-5)x + 2k-3$.

1) Пусть $k-2=0$, $k=2$. Неравенство имеет вид $-x+1>0$, $x<1$. Значит $k=2$ удовлетворяет условию.

2) Пусть $k-2>0$. При $k>2$ ветви параболы $y(x)$ направлены вверх, значит найдутся такие $x<2$, при которых выполняется $y(x)>0$.

3) Пусть $k-2<0$. В этом случае условие задачи выполняется, когда выполняется система неравенств: $\begin{cases} k-2<0, \\ D>0, \\ x_1<2; \end{cases}$ где D — дискриминант уравнения $y(x)=0$, x_1 — его меньший корень. Тогда

$$\begin{cases} k<2, \\ -4k^2+8k+1>0, \\ \dfrac{-(2k-5)-\sqrt{-4k^2+8k+1}}{2(k-2)} < 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k<2, \\ 1-\dfrac{\sqrt5}{2} < k < 1+\dfrac{\sqrt5}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} k>2{,}1, \\ k<2; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1-\frac{\sqrt5}{2} < k < 2.$$

Объединяя три случая, получаем $k \in \left(1-\dfrac{\sqrt5}{2}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(1-\dfrac{\sqrt5}{2}; +\infty\right)$.

1226. 1. Пусть $a=0$. Неравенство $ax^2+2(1-a)x+a-3<0$ примет вид $2x-3<0$, $x<1{,}5$. При $a=0$ условие задачи выполняется.

2. При $a \in [-2; 0) \cup (0; 3]$ неравенство $ax^2+2(1-a)x+a-3<0$ квадратное. Найдём корни уравнения $ax^2+2(1-a)x+a-3=0$, (1)

$$x_{1,2} = \frac{a-1\pm\sqrt{a^2-2a+1-a^2+3a}}{a} = \frac{a-1\pm\sqrt{a+1}}{a}.$$

При $a+1<0$ уравнение (1) не имеет действительных корней. Старший коэффициент $a<-1$, значит, квадратный трёхчлен, стоящий в левой части неравенства, отрицателен на всей числовой прямой. Учитывая, что $a \in [-2; 0) \cup (0; 3]$ получаем $a \in [-2; -1)$.

3. Рассмотрим два случая $a \in [-1; 0)$ и $a \in (0; 3]$.

3.1. $a \in [-1; 0)$, тогда $x_1 < x_2$. Знак старшего коэффициента совпадает со знаком неравенства, следовательно $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. По условию $x \in [-4; 1]$, тогда либо $x_1 > 1$, либо $x_2 < -4$. Случай $x_2 < -4$ невозможен, так как на рассматриваемом промежутке $x_2 > 0$. Случай $x_1 > 1$ возможен, рассмотрим его. $\dfrac{a-1+\sqrt{a+1}}{a} > 1$; $\dfrac{\sqrt{a+1}-1}{a} > 0$; $a \in [-1; 0)$, значит $\sqrt{a+1}-1 < 0$; $\sqrt{a+1} < 1$; $a < 0$, следовательно $a \in [-1; 0)$.

3.2. $a \in (0; 3]$, тогда $x_1 > x_2$. Знак старшего коэффициента противоположен знаку неравенства, следовательно $x \in (x_2; x_1)$. По условию $x \in [-4; 1]$. Условие задачи выполняется, если:

$$\begin{cases} x_2 < -4, \\ x_1 > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a-1-\sqrt{a+1}}{a} < -4, \\ \dfrac{a-1+\sqrt{a+1}}{a} > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5a-1-\sqrt{a+1}}{a} < 0, \\ \dfrac{\sqrt{a+1}-1}{a} > 0. \end{cases}$$

На промежутке $(0; 3]$ система равносильна неравенству $5a-1 < \sqrt{a+1}$.

а) $\begin{cases} 5a-1 < 0, \\ a+1 \geqslant 0, \\ 0 < a \leqslant 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{1}{5}, \\ a \geqslant -1, \\ 0 < a \leqslant 3; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{1}{5}.$

б) $\begin{cases} 5a-1 \geqslant 0, \\ 25a^2-10a+1 < a+1, \\ 0 < a \leqslant 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant \dfrac{1}{5}, \\ a(25a-11) < 0, \\ 0 < a \leqslant 3; \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{5} \leqslant a < \dfrac{11}{25}.$

Из а) и б) следует, что $a \in \left(0; \dfrac{11}{25}\right)$. Учитывая все рассмотренные случаи, получаем $a \in \left[-2; \dfrac{11}{25}\right)$.

Ответ: $\left[-2; \dfrac{11}{25}\right)$..

1227. 1. Если $a = 0$, то неравенство примет вид $2x - 2 < 0$, $x < 1$ и верно при любых $x \in [-2; 0]$.

2. Если $0 < a \leqslant 4$, то неравенство выполняется для любых $x \in [-2; 0]$, для $f(x) = ax^2 + (2-3a)x + 2a - 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} f(-2) < 0, \\ f(0) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + (2-3a)(-2) + 2a - 2 < 0, \\ 2a - 2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 12a < 6, \\ a < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \dfrac{1}{2}, \\ a < 1. \end{cases} \text{ Итак, } \begin{cases} 0 < a \leqslant 4, \\ a < \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{1}{2}.$$

3. Если $-3 \leqslant a < 0$ и $x_0 = \dfrac{3a-2}{2a}$ — координаты вершины параболы $y = f(x)$, то $f(x) < 0$ для любых $x \in [-2; 0] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -3 \leqslant a < 0 \\ f(-2) < 0 \\ f(0) < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_0 > 0 \\ x_0 < -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leqslant a < 0 \\ a < \dfrac{1}{2} \\ a < 1 \\ \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \\ 0 < a < \dfrac{2}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leqslant a < 0.$$

4. $\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ -3 \leqslant a < 0, \\ 0 < a < \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ Итак, $-3 \leqslant a < \dfrac{1}{2}$.

Ответ: $a \in \left[-3; \dfrac{1}{2}\right)$.

1228. 1) Сделаем замену $t = \sin^2 x$. Тогда $\cos^2 x = 1 - t$, $\cos^4 x = (1-t)^2$. Неравенство принимает вид: $a(1-t)^2 + 2t + 4a > 5$, $t \in [0; 1]$. Или $a[(1-t)^2 + 4] > 5 - 2t$, $t \in [0; 1]$. Так как $(1-t)^2 + 4 > 0$, то должно выполняться неравенство $a > \dfrac{5-2t}{(1-t)^2+4}$ при всех $t \in [0; 1]$.

2) Найдём наибольшее значение функции $f(t) = \dfrac{5-2t}{(1-t)^2+4}$ на отрезке $[0; 1]$.

$f'(t) = \dfrac{-2(t^2-2t+5) - (5-2t)(2t-2)}{[(1-t)^2+4]^2} = \dfrac{2t(t-5)}{[(1-t)^2+4]^2}$, $f'(t) < 0$ при $t \in (0; 5)$. Следовательно, на отрезке $[0; 1]$ функция $f(t)$ убывает и достигает своего наибольшего значения при $t = 0$. $f_{\text{наиб}} = f(0) = 1$.

3) Очевидно, что решением неравенства будут все значения a, при которых $a > f_{\text{наиб}}$, то есть $a > 1$.

Ответ: $(1; +\infty)$.

1229. Обозначим $f(x) = (a-1)x^2 + (2a-3)x - 3 + a - 3$;

Пусть D — дискриминант уравнения $f(x) = 0$ $(a \neq 0)$.

$D = (2a-3)^2 - 4(a-1)(a-3) = 4a - 3$, $x_{\text{в}} = \dfrac{3-2a}{2(a-1)}$.

Возможны два случая.

1) $a < 1$. Ветви параболы $y = f(x)$ направлены вниз (см. рис. 261).

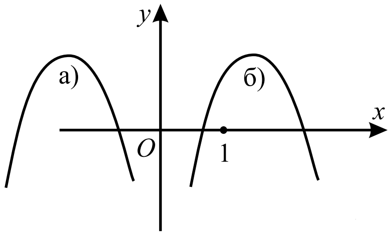


Рис. 261.

$$\text{а)} \begin{cases} a < 1, \\ D > 0, \\ x_{\text{в}} < 1, \\ f(1) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ 4a - 3 > 0, \\ \dfrac{3 - 2a}{2(a-1)} < 1, \\ 4a - 7 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ a > \dfrac{3}{4}, \\ a < \dfrac{5}{4}, \\ a < \dfrac{7}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{3}{4}; 1\right).$$

$$\text{б)} \begin{cases} a < 1, \\ D > 0, \\ f(1) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1, \\ a > \dfrac{3}{4}, \\ a > \dfrac{7}{4}; \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$$

2) $a > 1$. В этом случае ветви параболы $y = f(x)$ направлены вверх и условие задачи выполняется.

Теперь рассмотрим $a = 1$. Подставим это значение в неравенство $f(x) > 0$. Получим: $-x - 2 > 0$, то есть $x < -2$. Значит при $a = 1$ условие задачи выполняется.

Объединяя решения всех рассмотренных случаев получим, что условия задачи выполняются при $a > \dfrac{3}{4}$.

Ответ: $\left(\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$..

1230. Рассмотрим функцию $f(a) = \left(7x^2 - 5x - 8\right)a - 3x^2 + 4x + 11$. Так как $f(a)$ — линейная функция, $a \in [2; 4]$, то для выполнения исходного неравенства достаточно выполнения двух условий: $\begin{cases} f(2) \leqslant 0, \\ f(4) \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{5}{11} \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{8-\sqrt{589}}{25} \leqslant x \leqslant \dfrac{8+\sqrt{589}}{25}; \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{11} \leqslant x \leqslant 1.$$

Ответ: $\left[-\dfrac{5}{11}; 1\right]$..

1231. Неравенство $3^{a^2+ax} \leqslant 81$ равносильно неравенству $a^2 + ax \leqslant 4$, то есть $ax \leqslant 4 - a^2$. Рассмотрим три случая:

1) $a > 0$: $x \leqslant \dfrac{4-a^2}{a}$. Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно выполнения условия: $\dfrac{4-a^2}{a} \geqslant 3$; $\dfrac{4-a^2-3a}{a} \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2+3a-4 \leqslant 0 \Leftrightarrow a \in [-4; 1]$. Учитывая условие $a > 0$, получаем $a \in (0; 1]$.

2) $a < 0$: $x \geqslant \dfrac{4-a^2}{a}$. Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно выполнения условия $\dfrac{4-a^2}{a} \leqslant 0$. Учитывая условие $a < 0$, получаем $a \in [-2; 0)$.

3) $a = 0 \Rightarrow 4 \geqslant 0$ верно, значит $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Объединяя решения всех случаев, получим $a \in [-2; 1]$.

Ответ: $[-2; 1]$..

1232. Решим первое неравенство. Рассмотрим уравнение $x^2 - (2a+3)x + a^2 + 3a + 2 = 0$ как квадратное относительно x. Получим $x_{1,2} = \dfrac{2a+3 \pm 1}{2}$; $x_1 = a+1$, $x_2 = a+2$. Решение первого неравенства: $a+1 < x < a+2$ (так как $a+1 < a+2$ для любых a). Таким образом, задача сводится к следующей: найти все значения a, при которых решение неравенства $x^2 + (a+1)x + 6a < 0$ содержит интервал $(a+1;\ a+2)$. Так как ветви параболы $f(x) = x^2 + (a+1)x + 6a$ направлены вверх, то это возможно только в случае, изображенном на рис. 262. Таким образом должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} f(a+1) \leqslant 0, \\ f(a+2) \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (a+1)^2 + 6a \leqslant 0, \\ (a+2)^2 + (a+1)(a+2) + 6a \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 5a + 1 \leqslant 0, \\ 2a^2 + 13a + 6 \leqslant 0. \end{cases}$$

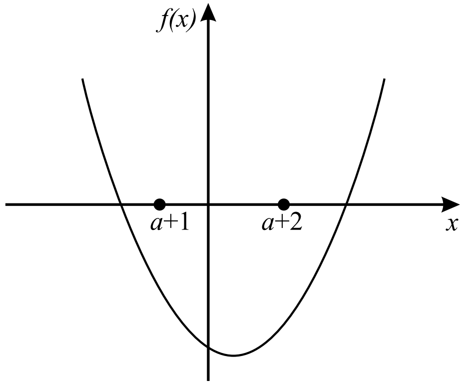


Рис. 262.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-5-\sqrt{2}}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{\sqrt{21}-5}{2}, \\ -6 \leqslant a \leqslant -\dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}; -\dfrac{1}{2}\right] \text{ (см. рис. 263).}$$

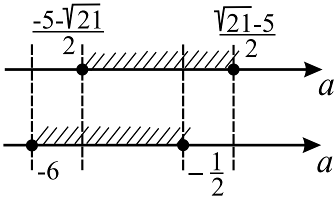


Рис. 263.

Ответ: $\left[\dfrac{-5-\sqrt{21}}{2}; -\dfrac{1}{2}\right]$..

1233. Исследуем неравенство $x^2(2a-1)-(a+2)x-10a<0$. Найдём корни уравнения $x^2(2a-1)-(a+2)x-10a=0$:

$x_{1,2} = \dfrac{a+2 \pm \sqrt{(a+2)^2+40a(2a-1)}}{2(2a-1)}$ (при $a \in (2;3)$ знаменатель не обращается в ноль); $x_{1,2} = \dfrac{a+2 \pm \sqrt{81a^2-36a+4}}{2(2a-1)}$;

$x_{1,2} = \dfrac{a+2 \pm \sqrt{(9a-2)^2}}{2(2a-1)}$; $x_{1,2} = \dfrac{a+2 \pm (9a-2)}{2(2a-1)}$, (так как при $a \in (2;3)$

$|9a-2| = 9a-2)$; $x_1 = -2$, $x_2 = \dfrac{5a}{2a-1}$. Значения x из интервала $\left(-2; \dfrac{5a}{2a-1}\right)$ удовлетворяют исходному неравенству. Функция $f(a) = \dfrac{5a}{2a-1}$ на интервале $(2;3)$ монотонно убывает и принимает значения из интервала $\left(3; \dfrac{10}{3}\right)$. Таким образом, значения $x \in (-2;3]$ удовлетворяют исходному неравенству при любом $a \in (2;3)$.

Ответ: $(-2;3]$..

1234. $2^{a^2-ax} \leqslant 16 \Leftrightarrow a^2-ax \leqslant 4$; $a^2-ax-4 \leqslant 0$; $ax-a^2+4 \geqslant 0$. Пусть $f(x) = ax-a^2+4$ — линейная функция x.

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geqslant 0, \\ f(3) \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2+4 \geqslant 0, \\ 3a-a^2+4 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4 \leqslant 0, \\ a^2-3a-4 \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leqslant a \leqslant 2, \\ -1 \leqslant a \leqslant 4; \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant a \leqslant 2.$$

Ответ: $[-1;2]$..

1235. Решим первое неравенство относительно x:

$$x \in \left(\frac{3a+2-|a-4|}{2}; \frac{3a+2+|a-4|}{2}\right).$$

Пусть $f(x;a) = x^2+(2a+1)x+20a = a(2x+20)+x^2+x$. Тогда исходная задача равносильна системе:

$$\begin{cases} f(a+3;a) \leqslant 0, \\ f(2a-1;a) \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2+33a+12 \leqslant 0, \\ 8a^2+16a \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+11a+4 \leqslant 0, \\ a(a+2) \leqslant 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-11-\sqrt{105}}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{-11+\sqrt{105}}{2}, \\ -2 \leqslant a \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leqslant a \leqslant \frac{-11+\sqrt{105}}{2}.$$

Ответ: $\left[-2; \dfrac{\sqrt{105}-11}{2}\right]$.

1237. $x^4-x^2+3 = a\left(x^2-2\right) \Leftrightarrow x^4-(a+1)x^2+(3+2a) = 0$. $t = x^2$, $t \in [1;9)$. $t^2-(a+1)t+(3+2a) = 0$.

Данная задача эквивалентна следующей. Найдите все a, для которых квадратный трёхчлен $f(t) = t^2-(a+1)t+(3+2a)$ имеет ровно один корень на промежутке $[1;9)$. Это имеет место в следующих случаях:

1) $D = 0$, $1 \leqslant x_0 < 9$, где x_0 — абсцисса вершины графика функции $y = f(t)$;

2) $f(1) \cdot f(9) < 0$;

3) $f(1)=0$, $\left[\begin{array}{l} t_1t_2=(3+2a)\geqslant 9, \\ t_1t_2=(3+2a)<1. \end{array}\right.$

1) $\left\{\begin{array}{l} (a+1)^2-4(3+2a)=0, \\ 1\leqslant \dfrac{a+1}{2}<9; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} a^2+2a+1-12-8a=0, \\ a+1<18, \\ a+1\geqslant 2; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} a^2-6a-11=0, \\ 1\leqslant a<17; \end{array}\right.$ $a_{1,2}=3\pm\sqrt{9+11}=3\pm\sqrt{20}=3\pm 2\sqrt{5}.$

$1<3+2\sqrt{5}<17$; $3-2\sqrt{5}<1\Rightarrow 3+2\sqrt{5}$ — удовлетворяет условию задачи.

2) $\big(1-(a+1)+3+2a\big)\big(81-9(a+1)+(3+2a)\big)<0$, $(a+3)(-7a+75)<0$,

$(a+3)(7a-75)>0$, $\left[\begin{array}{l} a<-3, \\ a>10\dfrac{5}{7}. \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{l} 1-(a+1)+(3+2a)=0, \\ \left[\begin{array}{l} 3+2a<1, \\ 3+2a\geqslant 9; \end{array}\right. \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} a=-3, \\ \left[\begin{array}{l} a<-1, \\ a\geqslant 3; \end{array}\right. \end{array}\right.$

$a=-3$ — удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $(-\infty;-3]\cup\left\{3+2\sqrt{5}\right\}\cup\left(10\dfrac{5}{7};+\infty\right)$.

1238. Пусть $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x-2$, а $g(x)=a^2x+2$. Построим эскизы графиков функций $y=\big|f(x)\big|$ и $y=g(x)$ на промежутке $(0;3]$.
$f'(x)=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ (см. рис. 264).

$f(0)=-2$, $f(1)=-3\dfrac{2}{3}$, $f(3)=7$.

Видим, что для выполнения условий задачи необходимо и достаточно, чтобы угловой коэффициент прямой $y=g(x)$ был не меньше, чем $|f'(0)|$ и $g(3)>7$ (см. рис. 265). $f'(0)=-3\Rightarrow a^2\geqslant 3$, $\left[\begin{array}{l} a\leqslant -\sqrt{3}, \\ a\geqslant \sqrt{3}. \end{array}\right.$

$g(3)=2+3a^2>2+9=11$.

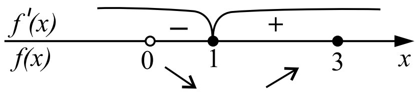


Рис. 264.

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

1240. Найдём множество значений функции $y=0{,}5^{3x^2-a}=2^{a-3x^2}$. Так

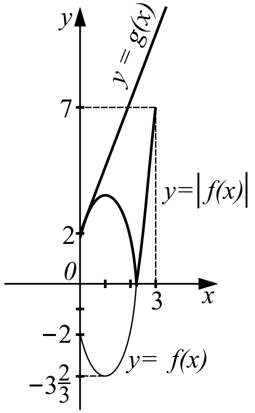


Рис. 265.

как $a - 3x^2 \leqslant a$, то $0 < 2^{a-3x^2} \leqslant 2^a \Rightarrow E(y) = (0; 2^a]$.
Таким образом, задача эквивалентна следующей. Найдите все a, при каждом из которых промежутки $(0; 2^a]$ и $[3 - 2^{1-a}; 16)$ имеют непустое пересечение.
А это имеет место тогда и только тогда, когда $2^a \geqslant 3 - 2^{1-a}$.

Решаем полученное неравенство: $2^a + \dfrac{2}{2^a} - 3 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; (2^a)^2 - 3 \cdot 2^a + 2 \geqslant 0; \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} 2^a \leqslant 1, \\ 2^a \geqslant 2; \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{l} a \leqslant 0, \\ a \geqslant 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

1241. Найдём множество значений функции $y = \dfrac{5}{\log_2(a + |x|)}$. Так как $a > 1$, то $\log_2(a + |x|) > 0, \;\Rightarrow\; E(y) = \left(0; \dfrac{5}{\log_2 a}\right]$.
Таким образом, необходимо найти все значения $a > 1$, при которых промежуток $\left(0; \dfrac{5}{\log_2 a}\right]$ лежит внутри промежутка $[-7; \log_2 a - 4)$.
Это имеет место тогда и только тогда, когда
$\dfrac{5}{\log_2 a} < \log_2 a - 4, \;\dfrac{\log_2^2 a - 4\log_2 a - 5}{\log_2 a} > 0.$
Учитывая, что $\log_2 a > 0$, получаем $\log_2 a^2 - 4\log_2 a - 5 > 0$,

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2 a < -1, \\ \log_2 a > 5, \end{array}\right. \\ a > 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < \dfrac{1}{2}, \\ a > 32, \end{array}\right. \\ a > 1; \end{cases} \Leftrightarrow a > 32.$$

Ответ: $(32; +\infty)$.

1242. $k\log_3 x^2 + 3k\log_x 3 + \log_x 9 = 2k + 8$.

ОДЗ. $x > 0$, $x \neq 1$.

Преобразуем уравнение к виду

$2k\log_3 x + 3k\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{2}{\log_3 x} = 2k + 8.$

1. Пусть $t = \log_3 x$, тогда $t \neq 0$,

$2kt + \dfrac{3k}{t} + \dfrac{2}{t} - 2k - 8 = 0;$

$2kt^2 - (2k+8)t + 3k + 2 = 0.$ $(*)$

$k \neq 0$, так как в противном случае уравнение линейно и имеет один корень.

2. Пусть x_1, x_2 — корни исходного уравнения и $x_2 = 3x_1$, тогда $\log_3 x_2 = \log_3 3x_1$, $\log_3 x_2 = 1 + \log_3 x_1$. Для $t = \log_3 x$ получаем $t_2 = 1 + t_1$.

Из уравнения $(*)$ по теореме Виета

$$\begin{cases} t_2 \cdot t_1 = \dfrac{3k+2}{2k}, \\ t_2 + t_1 = \dfrac{2k+8}{2k}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1(1+t_1) = \dfrac{3k+2}{2k}, \\ t_1 + 1 + t_1 = \dfrac{2k+8}{2k}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} {t_1}^2 + t_1 = \dfrac{3k+2}{2k}, \\ 2t_1 + 1 = \dfrac{2k+8}{2k}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем два случая.

1) $t = -\dfrac{3}{2}$, $k = -\dfrac{4}{3}$. Тогда $\log_3 x_1 = -\dfrac{3}{2}$; $x_1 = 3^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3^3}} = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$;

$x_2 = 3x_1 = \dfrac{3\sqrt{3}}{9} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

2) $t = 1$; $k = 2$. Тогда $\log_3 x_1 = 1$; $x_1 = 3$; $x_2 = 3x_1 = 9$.

Проверка. При подстановке значений $k = -\dfrac{3}{4}$ и $k = 2$ в уравнение $(*)$ в обоих случаях оно имеет два корня.

Ответ: $k = -\dfrac{4}{3}, x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}, x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}; k = 2, x_1 = 3, x_2 = 9.$

1243. ОДЗ. $x > 0$, $x \neq 1$; $p \geqslant \dfrac{1}{5}$.

Преобразуем исходное уравнение к виду

$$\sqrt{5p-1}\log_3 x + \frac{2p}{\log_3 x} - \frac{5}{\log_3 x} - 7 + 5p = 0.$$

Пусть $t = \log_3 x$. Тогда $\sqrt{5p-1}t + \dfrac{2p-5}{t} - 7 + 5p = 0$;

$\sqrt{5p-1}t^2 - (7-5p)t + 2p - 5 = 0$. $(*)$ Это уравнение является квадратным и, следовательно, имеет не более двух корней, а значит и исходное уравнение имеет не более двух корней.

1. Пусть исходное уравнение не имеет корней. Тогда должно выполняться $5p^2 - 6p + 2 = 0$. $D = 36 - 40 < 0$, следовательно в этом случае нет значений p, удовлетворяющих условию.

2. Пусть исходное уравнение имеет один корень. Тогда

$5p^2 - 6p + 2 = 1$; $5p^2 - 6p + 1 = 0$; $p_1 = 1$; $p_2 = \dfrac{1}{5}$.

При $p = 1$ уравнение $(*)$ принимает вид $2t^2 - 2t - 3 = 0$;
$D = 4 + 24 = 28 > 0$, следовательно это уравнение, а значит, и исходное имеет два различных корня. Пришли к противоречию.

При $p = \dfrac{1}{5}$ уравнение $(*)$ принимает вид $-6t + \dfrac{2}{5} - 5 = 0$. Это уравнение, а значит и исходное, имеет один корень. Следовательно $p = \dfrac{1}{5}$ — удовлетворяет условию задачи.

3. Пусть исходное уравнение имеет два корня. Тогда $5p^2 - 6p + 2 = 2$; $p(5p-6) = 0$; $p_1 = 0$; $p_2 = \dfrac{6}{5}$.

Значение $p = 0$ не удовлетворяет условию $p \geqslant \dfrac{1}{5}$.

При $p = \dfrac{6}{5}$ уравнение $(*)$ принимает вид $\sqrt{5}t^2 - t + \dfrac{12}{5} - 5 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot \dfrac{13}{5}\sqrt{5} > 0$, следовательно это уравнение, а значит, и исходное имеет два различных корня. Таким образом, $p = \dfrac{6}{5} = 1\dfrac{1}{5}$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $\dfrac{1}{5}; 1\dfrac{1}{5}$.

1244. Для того, чтобы графики функций $y = x^{10} - px^2 + 4x + p$ и $y = x^{10} - 4x^2 + px$, имели ровно две точки пересечения , необходимо, чтобы уравнение $x^{10} - px^2 + 4x + p = x^{10} - 4x^2 + px$, имело два корня.
$x^{10} - px^2 + 4x + p - px + p = 0$; $(4 - p)x^2 + (4 - p)x + p = 0$.
Полученное уравнение имеет два корня если $\begin{cases} 4 - p \neq 0, \\ D > 0; \end{cases}$
$D = (4 - p)^2 - 4(4 - p) \cdot p = 16 - 8p + p^2 - 16p + 4p^2 = 5p^2 - 24p + 16$;
$5p^2 - 24p + 16 > 0$; $5p^2 - 24p + 16 = 0$; $p_{1,2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{5}$;

$p_1 = \dfrac{12 + 8}{5} = 4$, $p_2 = \dfrac{12 - 8}{5} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$;
$5(p - 4)(p - 0{,}8) > 0$; $p < 0{,}8$, $p > 4$ (см. рис.266).

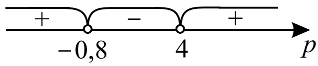


Рис. 266.

Ответ: $(-\infty;\ 0{,}8) \cup (4;\ +\infty)$.

1245. Найдём количество корней уравнения $\dfrac{3a + 8 - (a - 1)x}{x + 1} =$
$= a^2 + 2a + 3$ (1) и уравнения $(a - 3)x^2 - (a - 2)x - 1 = 0$ (2) при различных значениях a и выберем те, при которых это количество совпадает.
1. При $a = 3$ уравнения примут вид:
а) $\dfrac{17 - 2x}{x + 1} = 18$, $20x = -1$, $x = -\dfrac{1}{20}$;
б) $-x - 1 = 0$, $x = -1$.

Уравнение (1) и уравнение (2) имеют только по одному корню, что удовлетворяет условию задачи.
2. При $a \neq 3$. Рассмотрим каждое уравнение.
а) $\dfrac{3a + 8 - (a - 1)x}{x + 1} = a^2 + 2a + 3$.
ОДЗ. $x \neq -1$.
$3a + 8 - (a - 1)x = (a^2 + 2a + 3)x + a^2 + 2a + 3$,
$x(a^2 + 3a + 2) = a + 5 - a^2$.
Если $a^2 + 3a + 2 = 0$, то $a = -1$, $a = -2$ — уравнение корней не имеет.
Если $a^2 + 3a + 2 \neq 0$, то $x = \dfrac{a + 5 - a^2}{a^2 + 3a + 2}$.

Найдём значения a, при которых $x = -1$. $-1 = \dfrac{a+5-a^2}{a^2+3a+2}$,

$-a^2 - 3a - 2 = a + 5 - a^2$, $a = -\dfrac{7}{4}$. При $a = -\dfrac{7}{4}$ уравнение корней не имеет.

Получаем: при $a = -2$, $a = -\dfrac{7}{4}$, $a = -1$ уравнение (1) не имеет корней.

При $a \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\dfrac{7}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{7}{4}; -1\right) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$ уравнение (1) имеет только один корень.

б) $(a-3)x^2 - (a-2)x - 1 = 0$.
$D = b^2 - 4ac = (a-2)^2 + 4(a-3) = a^2 - 4a + 4 + 4a - 12 = a^2 - 8$.
$D < 0$: $a^2 - 8 < 0$, $a \in (-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, уравнение корней не имеет.
$D = 0$: $a^2 - 8 = 0$, $a = \pm 2\sqrt{2}$, уравнение имеет один корень.
$D > 0$: $a^2 - 8 > 0$, $a \in (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty)$, уравнение имеет два различных корня.

Вывод: учитывая 1) и 2) число различных корней уравнения $\dfrac{3a+8-(a-1)x}{x+1} = a^2 + 2a + 3$ равно числу различных корней уравнения $(a-3)x^2 - (a-2)x - 1 = 0$ при $a = -2$, $a = -\dfrac{7}{4}$, $a = -1$, $a = \pm 2\sqrt{2}$, $a = 3$.

Ответ: $-2, -\dfrac{7}{4}, -1, \pm 2\sqrt{2}, 3$.

1247. Пусть u и v — корни уравнения $x^3 - 5x^2 + 7x - a = 0$, $u \neq v$. Тогда $x^3 - 5x^2 + 7x - a = (x-u)^2(x-v)$. Раскрывая скобки и приводя подобные, получим: $-(v+2u)x^2 + (2uv+u^2)x - u^2v = -5x^2 + 7x - a$. Приравнивая коэффициенты многочленов при одинаковых степенях, получим систему
$$\begin{cases} v + 2u = 5, \\ 2uv + u^2 = 7, \\ u^2v = a. \end{cases}$$
Из первого уравнения выражаем $v = 5 - 2u$ и подставляем это выражение во второе уравнение системы: $2u(5-2u) + u^2 = 7$; $3u^2 - 10u + 7 = 0$; $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{7}{3}$. Соответствующими значениями v будут $v_1 = 3$, $v_2 = \dfrac{1}{3}$.

Кроме того, каждое из чисел пары (u, v) должно быть решением уравнения $x^3 - 13x + b = 0$ при некотором b. Для этого необходимо выполнение $b = 13u - u^3 = 13v - v^3$. Проверим для пары (u_1, v_1): $13 \cdot 1 - 1^3 = 13 \cdot 3 - 3^3$

соответствующие значения параметров: $b = 12$, $a = 1^3 \cdot 3 = 3$. Теперь проверим для пары (u_2, v_2): $13 \cdot \frac{7}{3} - \left(\frac{7}{3}\right)^3 \neq 13 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Поэтому u_2 и v_2 не могут одновременно быть корнями уравнения $x^3 - 13x + b = 0$.

Ответ: $a = 3,\ b = 12$.

1248. Из заданного уравнения следует $16 + a \geqslant 0$; $a \geqslant -16$. Преобразуем исходное уравнение к виду $\sqrt{16-x} = 16 + a - \sqrt{a^2 - x}$.
Пусть $g(x) = \sqrt{16-x}$, $f(x) = 16 + a - \sqrt{a^2 - x}$. Рассмотрим графики функций $y = g(x)$ и $y = f(x)$ (см. рис. 267).

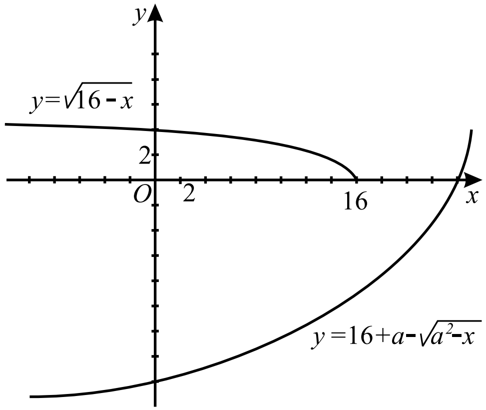


Рис. 267.

1) Областью определения функции $y=g(x)$ является промежуток $(-\infty;16]$. На всей области определения функция убывает.

2) Областью определения функции $y = f(x)$ является промежуток $(-\infty; a^2]$. На этом промежутке функция возрастает.
График функции $y = f(x)$ должен пересекать ось Ox в точке с абсциссой $x = a^2 - (16+a)^2 = -32a - 16^2$. Поскольку $-32a - 16^2 \leqslant a^2$ для всех $a \in \mathbb{R}$, то такое пересечение графика с осью Ox всегда имеет место.

3) Заданное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики рассматриваемых функций имеют единственную точку пересечения. Это возможно лишь в том случае, когда абсцисса точки пересечения функции $y = f(x)$ с осью Ox принадлежит области определения функции $y = g(x)$, то есть $-32a - 16^2 \leqslant 16$, откуда $a \geqslant -8{,}5$.

Ответ: $[-8{,}5; +\infty)$.

1250. $\sqrt{a}x^3 - \left|a^3 + 2 - |2a^2 + a|\right|x = 0$ (1).

Заметим, что при $a = 0$ уравнение имеет вид $-2x = 0$, то есть имеет ровно один корень. При любом значении параметра $a > 0$ исходное уравнение имеет корень $x = 0$.

При $x \neq 0$ получим уравнение $\sqrt{a}x^2 - \left|a^3 + 2 - |2a^2 + a|\right| = 0$ (2).

Уравнение (1) имеет ровно один корень тогда и только тогда, когда уравнение (2) не имеет корней, отличных от нуля, то есть тогда и только тогда, когда $a^3 + 2 - |2a^2 + a| = 0$, $a > 0$.

При $a > 0$ $|2a^2 + a| = 2a^2 + a$, тогда имеем: $a^3 - 2a^2 - a + 2 = 0$; $a^2(a-2) - (a-2) = 0$; $(a^2 - 1)(a-2) = 0$; $(a+1)(a-1)(a-2) = 0$; $a = -1$ — не удовлетворяет условию $a > 0$; $a = 1$, $a = 2$.

Ответ: $0; 1; 2$.

1251. $\sqrt{a}x^6 - \left|a^3 + 4 - |4a + a^2|\right|x^4 = 0$ (1).

Заметим, что при $a = 0$ уравнение (1) имеет вид $-4x^4 = 0$, то есть имеет ровно один корень. Рассмотрим уравнение (1) при $a > 0$.

При любом значении $a > 0$ уравнение (1) имеет корень $x = 0$. При $x \neq 0$ получим уравнение $\sqrt{a}x^2 - \left|a^3 + 4 - |4a + a^2|\right| = 0$ (2).

Уравнение (1) имеет один корень тогда и только тогда, когда уравнение (2) не имеет корней, отличных от нуля, то есть тогда и только тогда, когда $a^3 + 4 - |4a + a^2| = 0$. При $a > 0$ $|4a + a^2| = 4a + a^2$, тогда имеем: $a^3 - a^2 - 4a + 4 = 0$; $a^2(a-1) - 4(a-1) = 0$; $(a-1)(a^2-4) = 0$; $(a-1)(a-2)(a+2) = 0$; $a = -2$ — не удовлетворяет условию $a > 0$; $a = 1$, $a = 2$.

Ответ: $0; 1; 2$.

1252. Преобразуем данное уравнение.

$(a+3)(a+8x-x^2-10) - |x-4|(a+8x-x^2-10) = 10$,

$(a+8x-x^2-10)(a+3-|x-4|) = 0$,

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 8x + 10 = a, \\ |x-4| - 3 = a. \end{array}\right.$$

Построим графики функций $y = x^2 - 8x + 10$ и $y = |x-4| - 3$ (см. рис. 268).

По графику определяем: исходное уравнение имеет ровно два корня при $-6 < a < -3$ и при тех значениях x, при которых выполняется равенство $x^2 - 8x + 10 = |x-4| - 3$,

$(x^2 - 8x + 16) - 16 + 10 - |x-4| + 3 = 0$,

$(x-4)^2 - |x-4| - 3 = 0$.

Обозначим $|x-4| = t$, $t \geqslant 0$. Уравнение примет вид:

$t^2 - t - 3 = 0$,

$t_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$,

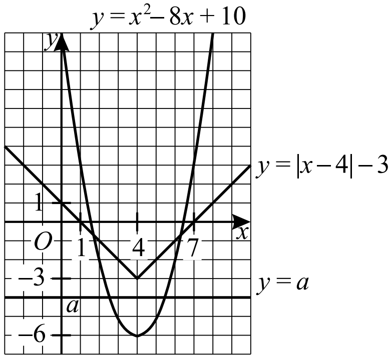


Рис. 268.

$t_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ — не удовлетворяет условию $t \geqslant 0$.

Вернёмся к замене.

$|x-4| = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$,

$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} + 4, x_2 = -\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} + 4$.

Функции $y = x^2 - 8x + 10$ и $y = |x-4| - 3$ симметричны относительно прямой $x = 4$, поэтому для каждой из них справедливо $y(x_1) = y(x_2)$.

Найдём $y(x_2) = y\Big(-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} + 4\Big)$ функции $y = |x-4| - 3$.

$$\Big|-\frac{1+\sqrt{13}}{2} + 4 - 4\Big| - 3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} - 3 = \frac{\sqrt{13}-5}{2}.$$

Следовательно, $a = \dfrac{\sqrt{13}-5}{2}$.

Ответ: $(-3; -6) \cup \Big\{\dfrac{\sqrt{13}-5}{2}\Big\}$.

1253. Преобразуем данные уравнение
$(a+2)(a+4x-x^2-1) - |x-2|(a+4x-x^2-1) = 0$,
$(a+4x-x^2-1)(a+2-|x-2|) = 0$,
$$\left[\begin{array}{l} x^2-4x+1 = a, \\ |x-2|-2 = a. \end{array}\right.$$

Построим графики функций $y = x^2 - 4x + 1$ и $y = |x-2| - 2$ (см. рис. 269).

По графику определяем: исходное уравнение имеет ровно два корня

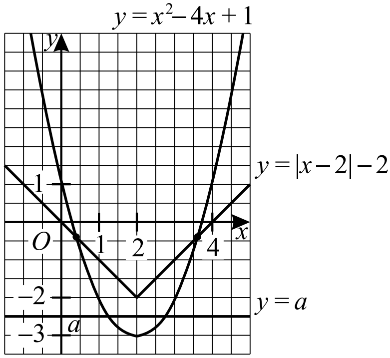


Рис. 269.

при $-3 < a < -2$ и при тех значениях x, при которых выполняется равенство $x^2 - 4x + 1 = |x - 2| - 2$,
$(x^2 - 4x + 4) - 4 + 1 - |x - 2| + 2 = 0$,
$(x - 2)^2 - |x - 2| - 1 = 0$.

Обозначим $|x - 2| = t$, $t \geqslant 0$. Уравнение примет вид $t^2 - t - 1 = 0$,
$t_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$,

$t_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ — не удовлетворяет условию $t \geqslant 0$.

Вернёмся к замене:
$|x - 2| = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$,

$x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2$, $x_2 = -\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2$.

Функции $y = x^2 - 4x + 1$ и $y = |x - 2| - 2$ симметричны относительно прямой $x = 2$, поэтому для каждой из них справедливо $y(x_1) = y(x_2)$.

Найдём $y(x_1) = y\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2\right)$ функции $y = |x - 2| - 2$:

$$\left|\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2 - 2\right| - 2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 2 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}.$$

Следовательно, $a = \dfrac{\sqrt{5} - 3}{2}$.

Ответ: $(-3; -2) \cup \left\{\dfrac{\sqrt{5} - 3}{2}\right\}$.

1254. $|x+a|+||x-3|-4|=1$; $||x-3|-4|-1=-|x+a|$.

Данное уравнение имеет два корня тогда и только тогда, когда графики функций $f(x)=||x-3|-4|-1$ и $g(x)=-|x+a|$ имеют две общие точки.

Построим графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ (см. рис. 270).

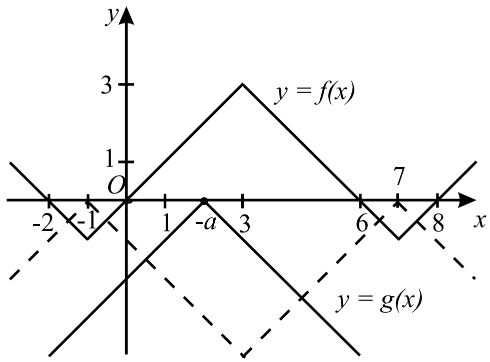


Рис. 270.

При изменении параметра a график функции $y=g(x)$ движется вдоль оси Ox. Из рисунка видно, что графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют ровно две точки пересечения, когда график функции $y=g(x)$ расположен так, как показано пунктирными линиями, то есть $-a\in(-2;0)$ и $-a\in(6;8)$. Таким образом, $a\in(-8;-6)\cup(0;2)$.

Ответ: $(-8;-6)\cup(0;2)$.

1256. Обозначим $f(x)=9^{4x^2-4ax-6a-8}-8$ и $g(x)=\left|\dfrac{a+3}{2x-a}\right|$.

1) Функция $f(x)$ определена при всех $x\in R$. Пусть $t=4x^2-4ax-6a-8$; $x_0=\dfrac{4a}{2\cdot4}=\dfrac{1}{2}a$, график функции симметричен относительно прямой $x=\dfrac{1}{2}a$. Найдём $f(-1{,}5)=9^{9+6a-6a-8}-8=1$,значит при любом значении a график функции проходит через точку с координатами $(-1{,}5;\ 1)$.

2)Функция $g(x)$ определена при всех значениях x, кроме $x=\dfrac{1}{2}a$, имеет вертикальную асимптоту $x=\dfrac{1}{2}a$, относительно которой симметричен ее график

$g(-1{,}5) = \left|\dfrac{a+3}{-3-a}\right| = 1,\ a \neq -3.$

3) Графики функций имеют общую точку с координатами $(-1{,}5;\ 1)$.
$-1{,}5 \notin [-1;\ 1]$, значит $x = -1{,}5$ не является корнем данного уравнения на заданном отрезке.

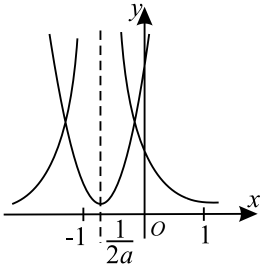


Рис. 271.

Так как графики функций симметричны относительно прямой $x = \dfrac{1}{2}a$, то абсциссу второй общей точки найдем, решив систему уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}a + \Delta x = -1{,}5, \\ \dfrac{1}{2}a - \Delta x = x; \end{cases} \Leftrightarrow a = -1{,}5 + x;\ x = a + 1{,}5;\ \Delta x = -1{,}5 - 0{,}5a.$$

По условию корень уравнения принадлежит отрезку $[-1;\ 1]$, значит
$-1 \leqslant a + 1{,}5 \leqslant 1;\ -2{,}5 \leqslant a \leqslant -0{,}5$. (см. рис. 271)

4) Если $a = -3$, то данное уравнение не имеет корней в силу того что $f(x)$ принимает только положительные значения, а $g(x) = 0$ при всех значениях x, кроме $x = -1{,}5$, следовательно графики функций не имеют общих точек (см. рис. 272).

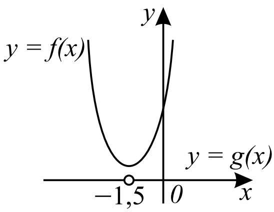


Рис. 272.

Ответ: $[-2{,}5;\ -0{,}5]$.

1257. 1) Так как по условию $p \neq -2$, то домножим обе части второго уравнения на $(p+2)$: $(p+2)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-300} = \sqrt{x+3}$; $(p+2)^2 > 0$; слева в уравнении стоит убывающая функция, справа — возрастающая на $[-3; +\infty)$ функция, поэтому число n корней второго уравнения $n = 0$ либо $n = 1$. При $x \to \infty$, каким бы большим ни было p, левая часть стремится к нулю, а правая — к бесконечности; с другой стороны, при $x = -3$ $(p+2)^2 \cdot 3^{303} > 0$, а $\sqrt{x+3} = 0$. Значит, на луче $[-3; +\infty)$ у этого уравнения существует корень, и он единственный: $n = 1$.

2) Так как $x^2 + p \neq 0$ при всех $x \neq \pm\sqrt{-p}$, то можно преобразовать первое уравнение. $x^4 - 2(3+p)x + (2p^2 - 3p + 4) = x^4 - p^2 + 17x^2 + 17p$; $17x^2 + 2(3+p)x - (3p^2 - 20p + 4) = 0$. Это квадратное уравнение. Число его корней $k = 0$; $k = 1$ или $k = 2$.

3) Итак, $p + 1 + n = k$, но так как $n = 1$, то $p + 2 = k$; $p = k - 2$.

Возможны варианты:

а) $p = -2$, но этот случай невозможен по условию.

б) $p = -1$, первое уравнение примет вид:
$17x^2 + 4x - 27 = 0$, $D = 4 + 17 \cdot 27 \neq 0$. Это противоречит рассматриваемому случаю числа корней этого уравнения $k = 1$. Поэтому $p = -1$ не удовлетворяет условиям задачи.

в) $p = 0$, $k = 2$; $\frac{x^4 - 6x + 4}{x^2} = x^2 + 17$; $x^4 - 6x + 4 = x^4 + 17x^2$; $17x^2 + 6x - 4 = 0$, $D = 9 + 68 > 0$, число корней в самом деле равно 2, поэтому этот случай удовлетворяет условиям. Сумма корней по обратной теореме Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{6}{17}$.

Ответ: $p = 0$; $x_1 + x_2 = -\frac{6}{17}$.

1258. $\sqrt{4(p+1)x - 8p - 12} = 2x + p - 1$ и $\left(2 + 2^{\frac{p+2}{p-1}}\right)^x = 21 - 6x$, $p \neq 1$.

1) Пусть $a = 2 + 2^{\frac{p+2}{p-1}}$, тогда $a > 1$ и показательная функция $y = a^x$ возрастает. Линейная функция $y = 21 - 6x$ убывает, так как коэффициент $-6 < 0$. Поэтому число n корней второго уравнения $n = 0$ или $n = 1$.

2) Если $x < 0$, то $a^x < 1 < 21 - 6x$, то есть график $y = a^x$ лежит ниже прямой $y = 21 - 6x$. Если $x > 3{,}5$, то $a^x > 0 > 21 - 6x$, то есть график $y = a^x$ расположен выше этой прямой. Таким образом, в интервале $(0;\ 3{,}5)$ второе уравнение с необходимостью имеет корень, и он

единственный: $n = 1$. 3) После возведения в квадрат первого уравнения получим квадратное уравнение, число корней первого уравнения $k = 0$, $k = 1$ или $k = 2$. По условию, $0{,}5(p+2) = k \cdot n$, зная, что $n = 1$, имеем $0{,}5(p+2) = k$, где $k \in \{0,\ 1,\ 2\}$, значит, p — чётное.

а) Если $k = 0$, то $p = -2$, при этом, очевидно, второе уравнение имеет смысл, а первое примет вид $\sqrt{-4x+4} = 2x - 3$. ОДЗ: $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant 1{,}5; \end{cases}$ система несовместна, поэтому первое уравнение имеет смысл и число его корней действительно равно нулю.

б) Если $k = 1$, то $p = 0$. Второе уравнение имеет смысл, а первое примет вид:

$\sqrt{4x-12} = 2x - 1$. ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \geqslant \dfrac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x \geqslant 3$. $4x - 12 = 4x^2 - 4x + 1$;

$4x^2 - 8x + 13 = 0$; $D = 16 - 52 < 0$. Нет действительных корней. $p = 0$ не удовлетворяет условиям задачи. в) Если $k = 2$, то $p = 2$. Второе уравнение имеет смысл, а первое: $\sqrt{12x-28} = 2x + 1$.

ОДЗ: $\begin{cases} x \geqslant 2\dfrac{1}{3}, \\ x \geqslant -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $x \geqslant 2\dfrac{1}{3}$; $12x - 28 = 4x^2 + 4x + 1$; $4x^2 - 8x + 29 = 0$;

$D = 16 - 4 \cdot 29 < 0$ — нет действительных корней. Итак, условиям задачи удовлетворяет $p = -2$, при этом второе уравнение $3^x = 21 - 6x$ имеет корень, найденный методом «пристального взгляда», $x = 2$; $9 = 21 - 12$.

Ответ: 2.

1259. 1) Из первого уравнения: $x \neq 0 \Rightarrow y = \dfrac{7}{x} - x^2 \Rightarrow y - 1 = \dfrac{7}{x} - (x^2+1)$.

Так как $y - 1 \geqslant 0$ из второго уравнения, то $\dfrac{7}{x} \geqslant x^2 + 1$. Так как $x \neq 0$, то

$x^2 + 1 > 1 \Rightarrow \dfrac{7}{x} > 1 \Rightarrow 0 < x < 7$.

2) Так как $x > 0$, то второе уравнение равносильно следующему:
$x + \dfrac{\sqrt{y-1}}{x} - \left(1 + \sqrt{y-1}\right) = 0$, $x^2 - \left(1 + \sqrt{y-1}\right)x + \sqrt{y-1} = 0$. Отсюда $x = 1$ и $x = \sqrt{y-1}$.

а) $x = 1$. Из первого уравнения $y = 6$. $(1; 6)$ — решение системы.

б) $x = \sqrt{y-1}$. Из первого уравнения $x^2 + x^2 + 1 = \dfrac{7}{x}$, то есть

$2x^2+1=\dfrac{7}{x}$. Обозначим $f(x)=2x^2+1,\ g(x)=\dfrac{7}{x}$.

График функции $y = f(x)$ — парабола, ветви которой направлены вверх, координаты вершины $(0;\ 1)$. График функции $y = g(x)$ — гипербола, расположенная в первой и третьей четверти.

Очевидно, что графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют единственную точку пересечения с абсциссой x_0, которая удовлетворяет условию $0<x_0<7$. Таким образом имеем еще одно решение.

Ответ: 2 решения..

1260. ОДЗ: $y>-5$, $x\neq -1$.
Попытаемся выразить y через x из первого уравнения системы.
$(x+1)y = -x^3-3x^2-9x = (x+1)\left(-x^2-2x-7\right)+7$. Видим, что $x=-1$ в паре ни с каким y не является решением полученного уравнения. $y=-x^2-2x-7+\dfrac{7}{x+1}$ (*), $y+5=-x^2-2x-2+\dfrac{7}{x+1}>0$

$\Rightarrow \dfrac{7}{x+1}>(x+1)^2+1 \Rightarrow 0<x+1<7$. Пусть $x+1=t$. Учитывая, что $\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|=x+1=t$, преобразуем уравнение (2) к виду: $t^2-\left(1+\sqrt{y+5}\right)t+\sqrt{y+5}=0$; $t=1$, $t=\sqrt{y+5}$. $t=1$ даёт решение $x=y=0$. $t=\sqrt{y+5}$ даёт $x+1=\sqrt{y+5}$, то есть $y=(x+1)^2-5$. В совокупности с уравнением (*) имеем систему $\begin{cases} y=(x+1)^2-5, \\ y=-(x+1)^2-6+\dfrac{7}{x+1}. \end{cases}$

$$(x+1)^2-5=-(x+1)^2-6+\frac{7}{x+1} \Leftrightarrow 2(x+1)^2+1=\frac{7}{x+1}\ (**).$$

Нарисовав эскизы графиков функций $y_1=2(x+1)^2+1$ и $y_2=\dfrac{7}{x+1}$, легко убедиться, что уравнение (**) имеет единственный корень x_0, принадлежащий промежутку $(0;1)$. Действительно, $y_1(0)<y_2(0)$, а
$y_1(1)>y_2(1)$.

Ответ: 2.

1261. Так как $3^{\sin^2\pi x}\geqslant 1$ и $\sqrt{1+\cos\pi y}\geqslant 0$, то первое уравнение системы может быть выполнено тогда и только тогда, когда $\sin^2\pi x=0$ и $1+\cos\pi y=0$, то есть при $x=k$ и при $y=2n+1$; $k,n\in Z$. Значит, x — любое целое число, а y — целое нечётное. Для того, чтобы второе уравнение системы имело смысл, нужно чтобы $11+41x-12x^2>0$. Решением этого неравенства будет интервал: $-\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{11}{3}$.

Так как x может быть только целым числом, то нам нужно рассмотреть лишь случаи: $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$. При этих x $\log_3(11 + 41x - 12x^2) \neq 0$. Значит, остается случай $x^3 - 4xy + y^2 - y - 2x + 1 = 0$.

1) При $x = 0$: $y^2 - y + 1 = 0$. Решений нет.

2) При $x = 1$: $1 - 4y + y^2 - y - 2 + 1 = 0$; $y^2 - 5y = 0$; $y_1 = 0$, $y_2 = 5$. Так как y может быть только целым нечётным числом, то имеем одно решение $x = 1$; $y = 5$.

3) При $x = 2$: $8 - 8y + y^2 - y - 4 + 1 = 0$; $y^2 - 9y + 5 = 0$; $D = 81 - 20 = 61$. Уравнение не имеет целых корней.

4) При $x = 3$: $27 - 12y + y^2 - y - 6 + 1 = 0$; $y^2 - 13y + 22 = 0$; $y_1 = 2$, $y_2 = 11$. Так как y может быть только целым нечётным числом, получаем следующее решение $x = 3$; $y = 11$.

Ответ: $(1;5)$, $(3;11)$..

1262. Из первого уравнения $\cos^2\dfrac{\pi x}{2} = 0$ и $\sqrt{1 - \cos\pi y} = 0 \Rightarrow x = 2k + 1$, $y = 2n$; $k, n \in Z$. То есть x — целое нечётное число; y — целое чётное число. ОДЗ исходной системы: $17y + 10 - 6y^2 \geqslant 0$; $-\dfrac{1}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{10}{3}$. Нам достаточно рассмотреть случаи: $y = 0$ и $y = 2$. При этих значениях $y = 0$ и $y = 2$ $17y + 10 - 6y^2 \neq 0$, тогда $y^3 - 2xy + x^2 - 2x + 1 = 0$. При $y = 0$: $x = 1$ — является решением. При $y = 2$: $x^2 - 6x + 9 = 0$, $x = 3$ — является решением.

Ответ: $(1;0)$, $(3;2)$..

1263. Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x: $x^2 + (2 - 4y)x + 2y^2 + 1 = 0$. Его дискриминант $D = 8\big(y^2 - 2y\big)$. Для того, чтобы это уравнение (и вся система) имело решение, нужно, чтобы $y^2 - 2y \geqslant 0$. Второе уравнение имеет смысл при $2y - y^2 \geqslant 0$. Значит $2y - y^2 = 0$, то есть $y_1 = 0$; $y_2 = 2$. Из первого уравнения находим:

1) $y = 0$: $x^2 + 2x + 1 = 0$; $x = -1$;

2) $y = 2$: $x^2 - 6x + 9 = 0$; $x = 3$. Используя найденные пары x и y, из второго уравнения найдем z:

1) $\sqrt{z - 1} + \sqrt{z} = 1$; $z = 1$; значит $(-1;0;1)$ — решение системы;

2) $\sqrt{z + 3} + \sqrt{z - 2} = 1$ — уравнение корней не имеет.

Ответ: $(-1;0;1)$..

1264. Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x: $x^2+(1-3y)x+2y^2-y+1=0$.
Его дискриминант $D=(1-3y)^2-4\big(2y^2-y+1\big)=y^2-2y-3$. $D\geqslant 0$, иначе первое уравнение системы и, значит, вся система решений не имеет. Для того, чтобы второе уравнение системы удовлетворяло ОДЗ, необходимо, чтобы $3+2y-y^2\geqslant 0$. Эти два неравенства выполняются одновременно, только когда $y^2-2y-3=0$. Решениями этого уравнения будут $y_1=-1$; $y_2=3$. При $y=-1$: $x^2+4x+4=0\Rightarrow x=-2$;
$y=3$: $x^2-8x+16=0\Rightarrow x=4$. Получаем $x_1=-2$, $y_1=-1$ и $x_2=4$, $y_2=3$. Найдём соответствующие этим парам z.

1) При $x=-2$, $y=-1$ второе уравнение системы имеет вид:
$\sqrt{z-1}+z=\sqrt{z-4}$. ОДЗ этого уравнения $z\geqslant 4$. Ясно, что левая часть для любых $z\geqslant 4$ больше правой. Поэтому это уравнение решений не имеет.

2) При $x=4$, $y=3$ имеем: $\sqrt{z+3}+z=\sqrt{z+8}$. Очевидно, что $z=1$ — корень этого уравнения. Покажем, что других корней оно не имеет. Запишем его в виде: $\sqrt{z+8}-\sqrt{z+3}=z$; $\dfrac{5}{\sqrt{z+8}+\sqrt{z+3}}=z$ $(\sqrt{z+8}+\sqrt{z+3}\neq 0)$. Ясно, что правая часть этого уравнения — непрерывная возрастающая функция, а левая его часть — функция непрерывная убывающая. Поэтому уравнение $\sqrt{z+3}+z=\sqrt{z+8}$ не может иметь более одного корня.

Ответ: $(4;3;1)$..

1265. Преобразуем второе уравнение системы:
$x^2y\big(2^{3x}-64\big)+(x+1)^3\big(64-2^{3x}\big)=0$, $\big(2^{3x}-64\big)\big(x^2y-(x+1)^3\big)=0$.
Это равенство возможно в случаях: $2^{3x}=64$ или $x^2y=(x+1)^3$. То есть $x=2$ или $y=\dfrac{(x+1)^3}{x^2}$. При $x=2$ из первого уравнения находим, что $y=8$. Это первое решение системы $(2;8)$.

Рассмотрим систему: $\begin{cases} y=6+\sqrt{4x-x^2}, \\ y=\dfrac{(x+1)^3}{x^2}. \end{cases}$ Ее ОДЗ: $\begin{cases} 0<x\leqslant 4, \\ 6\leqslant y\leqslant 8. \end{cases}$

Построим эскизы графиков первого и второго уравнений системы (см. рис. 273). Из рисунка видно, что эта система имеет два решения, причем x и y попадают в ОДЗ системы. Всего же исходная система имеет три ре-

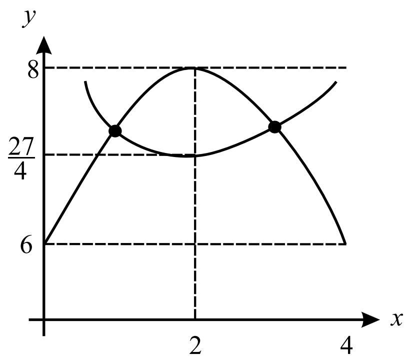


Рис. 273.

шения.

Ответ: 3.

1266. Пусть $t = 3^y > 0$, тогда первое уравнение системы имеет вид: $3x^2 - 12t(x-1) - 3x = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-4t) = 0$. Отсюда $x = 1$ или $x = 4t$.

1) При $x = 1$ второе уравнение имеет вид $1 + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -4$, значит $(1; -4)$ — решение системы.

2) При $x = 4t$ второе уравнение имеет вид $64t^3 + y + 3 = 0$. Но, так как $t = 3^y$, то $y = \log_3 t$. Рассмотрим функцию $f(t) = 64t^3 + \log_3 t + 3$, определенную при $t > 0$. Так как $f'(t) = 64 \cdot 3 \cdot t^2 + \dfrac{1}{t \ln 3} > 0$ при $t > 0$, то $f(t)$ возрастает на своей области определения. Так как $f\left(\dfrac{1}{81}\right) < 0$ и $f(1) > 0$, то промежуток $\left(\dfrac{1}{81}; 1\right)$ содержит единственный корень t_0 уравнения $f(t) = 0$. Тогда $(4t_0; \log_3 t_0)$ — второе решение системы.

Ответ: 2..

1267. 1. ОДЗ: $x \neq -3$. Пусть $t = 4^y > 0$, тогда первое уравнение системы имеет вид $2x^2 - 6tx + 4x - 12t = 0$, $2x(x+2) - 6t(x+2) = 0$, $2(x+2)(x-3t) = 0$. Отсюда $x = -2$ или $x = 3t$.

2. При $x = -2$ второе уравнение имеет вид $1 - |y - 2| = 0$. Отсюда $y = 3$ или $y = 1$. Получим два решения: $(-2; 3)$ и $(-2; 1)$.

3. При $x = 3t$ второе уравнение имеет вид $\dfrac{1}{(3t+3)^3} - |y - 2| = 0$.

Так как $t = 4^y$, то $y = \log_4 t$. Рассмотрим $f(t) = \dfrac{1}{(3t+3)^3} - |\log_4 t - 2|$, определенную при $t > 0$.

а) При $t \geqslant 16$ $f(t) = \dfrac{1}{(3t+3)^3} + 2 - \log_4 t$. $f'(t) = -\dfrac{9}{(3t+3)^4} - \dfrac{1}{t\ln 4} < 0$ при $t \geqslant 16 \Rightarrow f(t)$ убывает на данном промежутке. Так как $f(16) > 0$ и $f(64) < 0$, то существует единственный корень $t_1 \in (16; +\infty)$ уравнения $f(t) = 0$. Значит, $(3t_1; \log_4 t_1)$ — третье решение системы.

б) При $0 < t < 16$ $f(t) = \dfrac{1}{(3t+3)^3} - 2 + \log_4 t$. $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 4} - \dfrac{9}{(3t+3)^4} =$ $= \dfrac{(3t+3)^4 - 9t\ln 4}{(3t+3)^4 \cdot t \cdot \ln 4}$. Рассмотрим $g(t) = (3t+3)^4 - 9t\ln 4$, $t \in [0; 16)$. $g'(t) = 12(3t+3)^3 - 9\ln 4$. Так как $g''(t) = 12 \cdot 3^2 \cdot (3t+3)^2 > 0$ ($g'(t)$ возрастает) и $g'(0) > 0$, то $g'(t) > 0$. Значит, $g(t)$ возрастает и так как $g(0) > 0$, то $g(t) > 0$ на своей области определения. Отсюда следует, что $f'(t) > 0$, то есть $f(t)$ возрастает при $t \in (0; 16)$. Так как $f(1) < 0$ и $f(16) > 0$, то существует единственный корень $t_2 \in (1; 16)$ уравнения $f(t) = 0$. Значит, $(3t_2; \log_4 t_2)$ — четвертое решение системы.

Ответ: 4.

1268. ОДЗ: $\begin{cases} x > 2, \\ y \neq 0. \end{cases}$

Упростим второе уравнение системы: $\dfrac{y}{2} + \dfrac{\log_2(x-2)}{y} = 1 + \dfrac{1}{2}\log_2(x-2)$;

$\dfrac{y^2 + 2\log_2(x-2) - 2y - y\log_2(x-2)}{2y} = 0$; $(y-2)\big(y - \log_2(x-2)\big) = 0$.

Отсюда $y_1 = 2$, $y_2 = \log_2(x-2)$.

1) Подставим $y = 2$ в первое уравнение: $4\big(x^2 + 2x + 1\big) + 1 - x = 0$; $4x^2 + 7x + 5 = 0$; $D < 0 \Rightarrow$ действительных корней нет.

2) Подставим $y = \log_2(x-2)$ в первое уравнение: $\log_2^2(x-2) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$.

Пусть $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$, $g(x) = \log_2^2(x-2)$; $f'(x) = -\dfrac{x-3}{(x+1)^3}$, значит, на области определения при $x > 3$ $f(x)$ убывает, а при $x < 3$ возрастает; $g'(x) = 2\dfrac{\log_2(x-2)}{(x-2)\ln 2}$, поэтому $g(x)$ возрастает при $x > 3$ и убывает при $x < 3$. Так как $f(2{,}5) - g(2{,}5) < 0$, $f(3) - g(3) > 0$ и $f(4) - g(4) < 0$ и функции монотонны при $x > 3$ и $x < 3$, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет 2 корня.

Ответ: 2.

1269. ОДЗ: $\begin{cases} x > 1, \\ y \neq 0. \end{cases}$ Упростим первое уравнение системы:

$\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}\log_3 3(x-1)^2 = \frac{2\log_3(x-1)}{3y} - 1;$

$\frac{2y^2 - 2y\log_3(x-1) + 2y - 2\log_3(x-1)}{3y} = 0;$

$(y+1)\big(2y - 2\log_3(x-1)\big) = 0$. Отсюда $y_1 = -1$, $y_2 = \log_3(x-1)$.

1. Подставим $y = -1$ во второе уравнение: $(x+3)^2 - 1 - 2x = 0$; $x^2 + 4x + 8 = 0$; $D < 0 \Rightarrow$ действительных корней нет.

2. Подставим $y = \log_3(x-1)$ во второе уравнение: $\log_3^2(x-1) = \frac{2x+1}{(x+3)^2}$.

Рассмотрим функции $f(x) = \frac{2x+1}{(x+3)^2}$ и $g(x) = \log_3^2(x-1)$, определенные при $x > 1$. $f'(x) = \frac{2(2-x)}{(x+3)^3}$, значит, на области определения $f(x)$ убывает при $x > 2$, а при $1 < x < 2$ возрастает; $g'(x) = \frac{2\log_3(x-1)}{(x-1)\ln 3}$, поэтому $g(x)$ возрастает при $x > 2$ и убывает при $1 < x < 2$. Так как $f\left(\frac{4}{3}\right) - g\left(\frac{4}{3}\right) < 0$, $f(2) - g(2) > 0$ и $f(4) - g(4) < 0$ и функции монотонны при $x > 2$ и $1 < x < 2$, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет 2 корня, которым соответствуют 2 решения исходной системы.

Ответ: 2.

1270. ОДЗ: $y \in (0;1) \cup (1;+\infty)$. Упростим первое уравнение системы: $(2x-5)(x - \log_3 y) = 0$. Отсюда $x_1 = 2{,}5$, $x_2 = \log_3 y$.

Подставим $x_1 = 2{,}5$ во второе уравнение: $2{,}5 = 3 - y(2{,}5 - 1)$; $y = \frac{1}{3}$, значит $\left(2{,}5; \frac{1}{3}\right)$ является решением системы.

Подставим $x_2 = \log_3 y$ во второе уравнение: $\log_3 y = 3 - y|\log_3 y - 1|$ (1).

1) $\log_3 y \geqslant 1$, $y \geqslant 3$, тогда $\log_3 y = 1 + \frac{2}{y+1}$. Построим графики функций $f(y) = \log_3 y$; $g(y) = 1 + \frac{2}{y+1}$ (см. рис. 274). Видно, что име-

ется единственное решение $y = y_0$ уравнения (1) , которое удовлетворяет условию $y \geqslant 3$. Тогда $(\log_3 y_0; y_0)$ — второе решение системы.

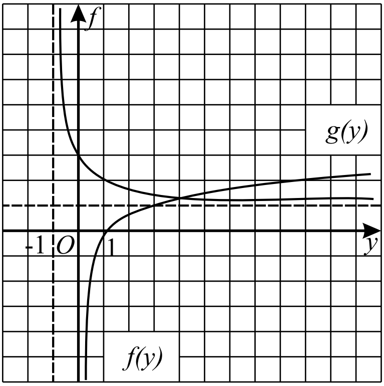


Рис. 274.

2) Рассмотрев аналогично случай, когда $\log_3 y < 1,\ 0 < y < 3$ получаем, что в этом случае уравнение (1) не имеет решений.

Ответ: 2..

1271. ОДЗ: $\begin{cases} y > 0, \\ y \neq 1 \end{cases}$. Упростим первое уравнение системы:
$(x-4)(x-\log_2 y) = 0$. Отсюда $x_1 = 4$, $x_2 = \log_2 y$.
Подставим $x_1 = 4$ во второе уравнение: $8 = 5y + 3$; $y = 1$ — не входит в ОДЗ.
Подставим $x_2 = \log_2 y$ во второе уравнение: $2\log_2 y = y|\log_2 y + 1| + 3$.

1. Проверкой убеждаемся, что $y = \dfrac{1}{2}$ не является решением этого уравнения.

2. $\log_2 y > -1$, $y > \dfrac{1}{2}$, тогда $\log_2 y = \dfrac{y+3}{2-y}$. Построим графики функций $f(y) = \log_2 y$, $g(y) = \dfrac{y+3}{2-y}$ на области определения (см. рис. 275). Видно, что графики $f(y)$ и $g(y)$ не пересекаются. Значит, при $y > \dfrac{1}{2}$ решений нет.

2. Аналогично получаем, что при $0 < y < \dfrac{1}{2}$ также нет решений.

Ответ: 0.

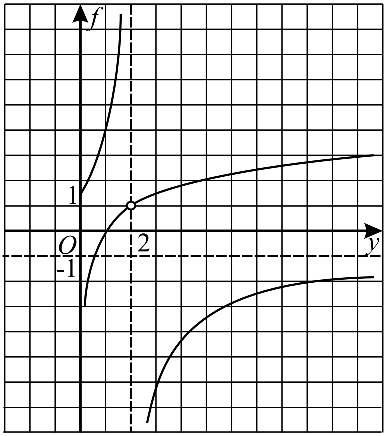


Рис. 275.

1272. 1) Преобразуем сначала второе уравнение системы к более удобному виду:
$x+y=1-\sqrt{4xy+3y-7x-5} \Leftrightarrow \sqrt{4xy+3y-7x-5}=1-x-y.\ (*)$
Возведём обе части (*) в квадрат: $4xy+3y-7x-5=(1-x-y)^2 \Leftrightarrow$
$y^2-2xy-5y+x^2+5x+6=0$. Решим последнее уравнение как квадратное относительно y: $y_{1,2}=\dfrac{2x+5\pm 1}{2}$, $y_1=x+3$, $y_2=x+2$.

2) Прологарифмируем обе части первого уравнения по основанию 3. Получим $x+y\log_3 2=-2$.
3) Решим системы уравнений
$\begin{cases} x+y\log_3 2=-2, \\ y=x+3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y\log_3 2=-2, \\ y=x+2. \end{cases}$
Решением первой системы будет пара $(-\log_6 72; \log_6 3)$. Решением второй — пара $(-2;0)$.
4) Непосредственной проверкой убеждаемся, что обе пары являются решением исходной системы.

Ответ: $(-2;0), (-\log_6 72; \log_6 3)$.

1273. 1) Преобразуем сначала второе уравнение системы к более удобному виду:
$x+y=\sqrt{4xy+9x-y-2}-2 \Leftrightarrow x+y+2=\sqrt{4xy+9x-y-2}.\ (*)$
Возведём обе части (*) в квадрат (ОДЗ находить здесь слишком сложно):
$(x+y+2)^2=4xy+9x-y-2 \Leftrightarrow y^2-2xy+5y+x^2-5x+6=0$. Решим последнее уравнение как квадратное относительно y:

$y_{1,2} = \dfrac{2x - 5 \pm 1}{2}$, $y_1 = x - 2$; $y_2 = x - 3$.

2) Прологарифмируем обе части первого уравнения по основанию 4. Получим $y + x \log_4 5 = -2$.

3) Решим системы уравнений

$\begin{cases} y + x\log_4 5 = -2, \\ y = x - 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} y + x\log_4 5 = -2, \\ y = x - 3. \end{cases}$

Решением первой системы будет пара $(0; -2)$. Решением второй – пара $(\log_{20} 4; \log_{20} 4 - 3)$.

4) Непосредственной проверкой убеждаемся, что вторая пара не принадлежит области определения исходной системы, так как в уравнении (*) при $x = \log_{20} 4$, $y = \log_{20} 4 - 3$ левая часть становится отрицательной.

Ответ: $(0; -2)$.

1274. а) Преобразуем подкоренное выражение во втором уравнении системы: $x^3 + 5x^2 + 8x + 4 = (x+1)(x+2)^2$. Подкоренное выражение должно быть неотрицательно: $(x+1)(x+2)^2 \geqslant 0$, но так как $x + 1 \neq 0$, то $x \in \{-2\} \cup (-1; +\infty)$.

б) Исследуем функцию $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 2$ (найдем графически число возможных корней). Производная $f'(x) = 12x^2 + 18x - 12$. Стационарные точки $f'(x) = 0$. $x = -2$, $x = \dfrac{1}{2}$. Точки экстремума: $f'(x) = 6(x+2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$. $x = -2$ — точка максимума, $x = \dfrac{1}{2}$ — точка минимума (см. рис. 276).

$f(-2) = 30$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1\dfrac{1}{4}$, $f(0) = 2$ (см. рис. 277).

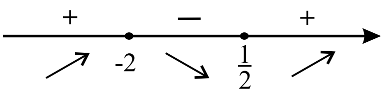


Рис. 276.

$x_3 < -2$, $x_3 \notin$ ОДЗ. $0 < x_1 < \dfrac{1}{2}$, $x_2 > \dfrac{1}{2}$. x_1 и x_2 — могут быть решениями.

Пусть $x_1 = \alpha_1$, $0 < \alpha_1 < \dfrac{1}{2}$; $x_2 = \alpha_2$, $\alpha_2 > \dfrac{1}{2}$. Проверим, могут ли они быть решениями второго уравнения:

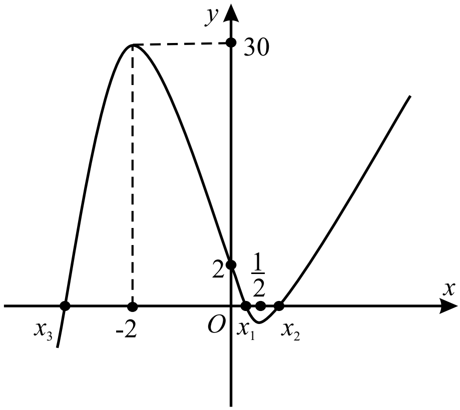


Рис. 277.

$\dfrac{y}{\alpha_1+1}+5=2^{\alpha_1-y}\sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1+5)+4(2\alpha_1+1)}-\alpha_1 y$. Так как $\alpha_1>0$, то корень существует.

$\dfrac{y}{\alpha_1+1}+\alpha_1 y+5=2^{\alpha_1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^y\sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1+5)+4(2\alpha_1+1)}$;

$y\left(\dfrac{1}{\alpha_1+1}+\alpha_1\right)+5=2^{\alpha_1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^y\sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1+5)+4(2\alpha_1+1)}$

Вводя обозначения $B=\left(\dfrac{1}{\alpha_1+1}+\alpha_1\right)$ и

$A=2^{\alpha_1}\cdot\sqrt{\alpha_1^2(\alpha_1+5)+4(2\alpha_1+1)}$, получим уравнение

$By+5=A\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^y$, $A>0$, $B>0$. Левая часть есть линейная возрастающая функция, а правая — показательная убывающая. Следовательно, они пересекаются только один раз, значит, для $x=\alpha_1$ существует единственный y. Аналогично рассуждаем для $x_2=\alpha_2$. Таким образом, система имеет два решения.

Ответ: 2.

1275. а) Преобразуем подкоренное выражение первого уравнения системы:
$4x^3-3x-1=(x-1)(2x+1)^2$ (легко заметить, что $x=1$ корень, так как $4-3-1=0$). Подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$(x-1)(2x+1)^2 \geqslant 0;$ $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$ Так как при $x > 0$, то ОДЗ системы: $x \geqslant 1$.

б) Исследуем функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 3$. Производная:

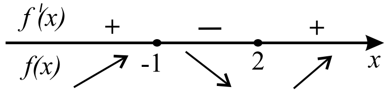


Рис. 278.

$f'(x) = 6(x+1)(x-2)$. Точки экстремума: $x = -1$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума (см. рис. 278). $f(-1) = 4$; $f(2) = 23$.
Обозначим через x_1, x_2, x_3 корни уравнения $f(x) = 0$. Тогда $x_1 < -1$, $-1 < x_2 < 0$, $x_3 > 2$ (см. рис. 279). x_1 и x_2 не удовлетворяют условию

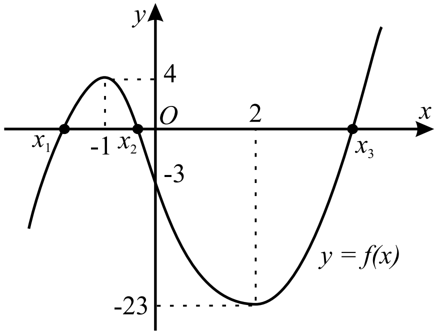


Рис. 279.

$x \geqslant 1$. Пусть $x_3 = \alpha$. Подставим $x_3 = \alpha$ в первое уравнение:
$\alpha^{-y}\sqrt{4\alpha^3 - 3\alpha - 1} = \alpha y - 1$. Обозначим $\sqrt{4\alpha^3 - 3\alpha - 1} = A$.
$A \cdot \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^y = \alpha y - 1$, $(A > 0, \alpha > 2)$. Левая часть равенства есть всюду определенная убывающая, а правая — линейная возрастающая функции. Следовательно, уравнение имеет только один корень. Таким образом, система имеет только одно решение.

1276. Разложим первое уравнение на множители: $y^2(y-2) - 3^x(y-2) = 0$; $(y-2)\left(y^2 - 3^x\right) = 0$, что может быть только, если $y = 2$ или $y^2 = 3^x$. Рассмотрим эти два случая.

1. $y=2$. Тогда из второго уравнения системы получим:
$\frac{1}{3}\cdot 27^x - 2\cdot 9^x + 3\cdot 3^x - 1 = 0,\ 27^x - 6\cdot 9^x + 9\cdot 3^x - 3 = 0$. Обозначим $3^x = t$ $(t > 0)$. Тогда $t^3 - 6t^2 + 9t - 3 = 0$. Определим, сколько корней имеет это уравнение на промежутке $t > 0$. Построим график функции $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 3$ (см. рис. 280).
$f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3\big(t^2 - 4t + 3\big) = 3(t-1)(t-3)$. Причем $f(1) = 1$,

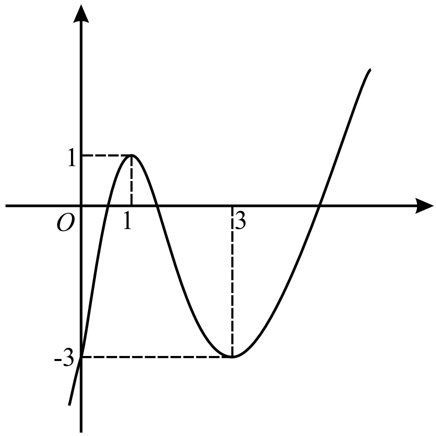


Рис. 280.

$f(3) = -3$, $f(0) = -3$. Из рисунка видно, что уравнение $t^3 - 6t^2 + 9t - 3 = 0$ имеет три положительных $(t > 0)$ решения. Значит, исходная система при $y = 2$ имеет три решения.
2. $y^2 = 3^x$. Тогда из второго уравнения системы получим:
$27^x - 6\cdot 9^x + 12\cdot 3^x - 15 = 0$.
Поступим аналогично случаю 1: $3^x = t$ $(t > 0)$, $t^3 - 6t^2 + 12t - 15 = 0$. $f'(t) = 3t^2 - 12t + 12 = 3\big(t^2 - 4t + 4\big) = 3(t-2)^2$. Так как производная функции при переходе через точку $t = 2$ не меняет знак, то в точке $t = 2$ экстремума нет, и функция $f(t)$ всюду возрастает $(f'(t) \geqslant 0)$. Причем $f(0) = -15$, $f(2) = -7$. Из рисунка 281 видим, что уравнение $t^3 - 6t^2 + 12t - 15 = 0$ имеет один положительный корень $(t > 0)$. Но $y^2 = 3^x$, отсюда $y = \pm 3^{\frac{x}{2}}$. Значит, система имеет еще два решения. А всего их пять.

Ответ: 5.

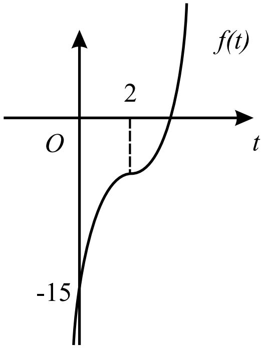


Рис. 281.

1277. ОДЗ: $\begin{cases} \sin x - \cos y > 0, \\ \sin x + \cos y > 0. \end{cases}$ Из второго уравнения получаем:

$\log_2\left(\sin^2 x - \cos^2 y\right) = -1$, $\sin^2 x - \cos^2 y = \dfrac{1}{2}$. Из первого уравнения, преобразовав его к виду $5^{\cos x} = 5^{-\cos y}$, получаем $\cos x = -\cos y$, откуда $\cos^2 x = \cos^2 y$. Далее имеем: $\left(1 - \cos^2 x\right) - \cos^2 y = \dfrac{1}{2}$; $1 - 2\cos^2 y = \dfrac{1}{2}$,

$\cos^2 y = \dfrac{1}{4}$, $\cos y = \pm\dfrac{1}{2}$.

1. $\cos y = \dfrac{1}{2}$, $y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

ОДЗ удовлетворяют решения $\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $k,\ n \in Z$.

2. $\cos y = -\dfrac{1}{2}$, $y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$; $\cos x = \dfrac{1}{2}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

ОДЗ удовлетворяют решения $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $k,\ n \in Z$.

Ответ: $\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\right.$

$\left. pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $k,\ n \in Z$.

1278. 1) ОДЗ: $x^3 - x^2 - 5x - 3 \geqslant 0$; $(x+1)^2(x-3) \geqslant 0$, $\left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x \geqslant 3. \end{array}\right.$.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$. $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$;

$f'(x) = 0 \Rightarrow\ x = 2,\ x = -\dfrac{2}{3}$. При $x \geqslant 3$ $f(x)$ возрастает (см. рис. 282), а, значит, обращается в 0 не более одного раза.

Заметим, что $x_1 = -1$ является корнем первого уравнения. Получим:

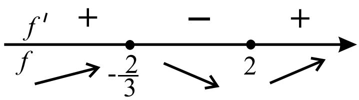


Рис. 282.

$x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = (x+1)(x^2 - 3x - 1)$; $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, $x_3 = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$. $x_3 \in$ ОДЗ.

3) При $x = -1$ второе уравнения системы примет вид: $3 + 11^{-1-y} = y$; $11^{-1-y} = y - 3$.

Пусть $f(y) = \left(\dfrac{1}{11}\right)^y - 11y + 33$ — монотонно убывает. $f(3) = \left(\dfrac{1}{11}\right)^3 > 0$, $f(4) = \left(\dfrac{1}{11}\right)^4 - 44 + 33 < 0$. То есть $f(y)$ обращается в 0 на $(3;4)$, а второе уравнение системы имеет корень $y \in (3;4)$.

Если $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$, то $3 < x_2 < 4$. При этом значении x второе уравнение примет вид: $k^{b-y} = y + c$, где $1 < k < 3,\ 3 < b < 4,\ -3 < c < 2$. В левой части уравнения стоит непрерывная убывающая функция, а в правой — непрерывная возрастающая. При $y = -2$: левая часть $k^{b+2} > 0$, правая часть: $y + c < 0$. При $y = 4$: левая часть $k^{b-4} < 1$, правая часть $y + c > 1$. Это означает, что существует корень y_2, причем $-2 < y_2 < 4$. Получаем еще одно решение: $(x_2; y_2)$. Таким образом, исходная система имеет два решения.

Ответ: 2.

1279. ОДЗ: $\begin{cases} \sin x + \cos y > 0, \\ \cos x - \sin y > 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} \cos x = -\sin y, \\ (\sin x + \cos y)(\cos x - \sin y) = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\sin y, \\ \cos x(\sin x + \cos y) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} |\sin x| = |\cos y|, \\ \cos(\sin x + \cos y) = 1; \end{cases}$$

1. $\begin{cases} \sin x = -\cos y, \\ \cos x(\sin x - \sin x) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\cos y, \\ 0 = 1. \end{cases}$ $0 \neq 1$, решений нет.

2. $\begin{cases} \sin x = \cos y, \\ \cos x(\sin x + \sin x) = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos y, \\ \sin 2x = 1; \end{cases} \quad x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow$

$\cos y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Учитывая ОДЗ: $\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sin y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ отсюда $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$,

$y = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $k,\ n \in Z$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $y = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $k,\ n \in Z$.

1280. Рассматривая первое уравнение данной системы как квадратное относительно y с коэффициентами, зависящими от x, и выражая y через x по формуле корней квадратного уравнения, получаем: $y = x$ или $y = 3x$. Аналогично, рассмотрев второе уравнение как квадратное относительно y и воспользовавшись теоремой Виета, получим: $y = \operatorname{tg} x$ или $y = \sqrt{8 - x^2}$. Таким образом, данная система равносильна совокупности следующих четырёх систем:

$$1)\begin{cases} y = x, \\ y^2 = 8 - x^2, y \geqslant 0 \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} y = 3x, \\ y^2 = 8 - x^2, y \geqslant 0 \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} y = x, \\ y = \operatorname{tg} x, \\ 8 - x^2 \geqslant 0; \end{cases} \qquad 4)\begin{cases} y = 3x, \\ y = \operatorname{tg} x, \\ 8 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что первая и вторая системы имеют по одному решению: $(2; 2)$ и $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}; \dfrac{6}{\sqrt{5}}\right)$ соответственно. Очевидно, что $x = 0$, $y = 0$ является решением третьей системы. Покажем, что это единственное ее решение. В силу нечётности функций $y = x$ и $y = \operatorname{tg} x$ достаточно показать, что система 3) не имеет решений при положительных x. На интервале $\left(\dfrac{\pi}{2}; \pi\right)$ значения $\operatorname{tg} x$ отрицательны, поэтому на этом интервале графики $y = x$ и $y = \operatorname{tg} x$ не пересекаются. Так как $\pi^2 > 9$, то при $x \geqslant \pi$ не выполнено условие $x^2 \leqslant 8$. Чтобы показать, что на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ также нет решений системы 3), исследуем поведение функции $d(x) = \operatorname{tg} x - x$ на этом интервале: $d'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0 \Rightarrow$ при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ функция $d(x)$ возрастает, а поскольку $d(0) = 0$, то $d(x) > 0$, то есть $\operatorname{tg} x > x$ при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, см. рис. 283.

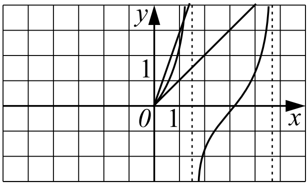


Рис. 283.

Далее, при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ графики $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 3x$ имеют ровно одну общую точку, пусть x_0 ее абсцисса. Тогда четвертая система имеет три решения: $(0; 0)$, $(\pm x_0; \pm \operatorname{tg} x_0)$.

Таким образом, всего исходная система имеет 5 различных решений.

Ответ: 5.

1281. Исследуем функцию $f(x)$. $f'(x) = 4x^3 - 32 = 4(x^3 - 8) = 4(x-2)(x^2 + 2x + 4)$. Так как $x^2 + 2x + 4 > 0$ при всех значениях x, то $f'(x) > 0$ при $x > 2$ и $f'(x) < 0$ при $x < 2$. Поэтому наименьшее значение функция $f(x)$ достигает в точке $x = 2$ и $f(2) = 2^4 - 32 \cdot 2 + 50 = 2$. Следовательно, $f(x) \geqslant 2$, $f(x) + 3 \geqslant 5$.

Тогда $g\big(f(x) + 3\big) = -4$. Уравнение $f\big(g(x) + 1\big) - g\big(f(x) + 3\big) = 6$ примет вид $f\big(g(x) + 1\big) = 2$. Обозначим $t = g(x) + 1$, тогда $f(t) = 2$; $t^4 - 32t + 50 = 2$; $(t-2)^2(t^2 + 4t + 12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t^2 + 4t + 12 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 2$. Тогда $g(x) + 1 = 2$; $g(x) = 1$.

Решим уравнение $\dfrac{2}{5-x} + \log_8(3x - 4) = 1$; $\log_8(3x-4) = 1 - \dfrac{2}{5-x}$.

При $x \in \left(\dfrac{4}{3};\ 5\right)$ функция $\log_8(3x - 4)$ — возрастающая, а функция $1 - \dfrac{2}{5-x}$ — убывающая, следовательно, рассматриваемое уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим $x = 2$. Это единственный корень исходного уравнения.

Ответ: 2.

1282. Рассмотрим функцию $h(x) = 1 - f(x) = 1 - \dfrac{x+8}{x^2+2} = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2+2}$. Так как $x^2+2>0$ при любом значении x, то $h(x)$ всюду определена.

Исследуем $h(x)$ на указанных в определении функции $g(x)$ интервалах:

1. При $h(x) \in (-\infty; -4]$, неравенство $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2+2} \leqslant -4$ не имеет решений.

2. При $h(x) \in (-4;\ 2]$, двойное неравенство $-4 < \dfrac{(x-3)(x+2)}{x^2+2} \leqslant 2$ выполняется для любого значения x.

3. Из предыдущего пункта следует, что неравенство $h(x) > 2$ не имеет решений.

Таким образом, $g\big(1-f(x)\big) = 2 - (1-f(x)) = 1 + f(x)$ для любого значения x. Следовательно, исходное уравнение примет вид: $f\big(g(x)\big) + 1 + f(x) = f(x) + 2$, $f\big(g(x)\big) = 1$.

Введём обозначение $g(x) = t$ и решим уравнение $f(t) = 1$. Тогда $\dfrac{t+8}{t^2+2} = 1$, $t^2 - t - 6 = 0$, $t_1 = -2$, $t_2 = 3$.

Рассмотрим два возможных случая.

1. $g(x) = -2$.

При $x \in (-\infty; -4]$ уравнение имеет вид $-x^2 - 6x - 10 = -2$. Тогда $x^2 + 6x + 8 = 0$, $x_1 = -4$, $x_2 = -2$. Так как $x_2 \notin (-\infty; -4]$, то $x = -4$ — корень исходного уравнения.

При $x \in (-4;\ 2]$ уравнение имеет вид $2 - x = -2$. Его корень $x = 4$ не принадлежит интервалу $(-4;\ 2]$.

При $x \in (2; +\infty)$ уравнение имеет вид $\dfrac{x+1}{2} + \log_3(x+6) - 1 = -2$, $\dfrac{x+1}{2} + \log_3(x+6) = -1$. Это уравнение не имеет решений на рассматриваемом промежутке, так как $\dfrac{x+1}{2} + \log_3(x+6) > 0$ при $x > 2$.

2. $g(x) = 3$.

При $x \in (-\infty; -4]$ уравнение имеет вид $-x^2 - 6x - 10 = 3$, $x^2 + 6x + 13 = 0$. Корней нет.

При $x \in (-4;\ 2]$ уравнение имеет вид $2 - x = 3$. Тогда $x = -1$ — корень исходного уравнения.

При $x \in (2; +\infty)$ уравнение имеет вид $\dfrac{x+1}{2} + \log_3(x+6) - 1 = 3$, $\dfrac{x+1}{2} + \log_3(x+6) = 4$, $\log_3(x+6) = 4 - \dfrac{x+1}{2}$. Функция $\log_3(x+6)$ возрастает на своей области определения, а функция $4 - \dfrac{x+1}{2}$ — убывающая. Следовательно, уравнение $\log_3(x+6) = 4 - \dfrac{x+1}{2}$ имеет не более одного корня. Подбором находим, что $x = 3$ — корень этого уравнения. Так как $3 \in (2; +\infty)$, то $x = 3$ также является корнем исходного уравнения.

Ответ: -4; -1; 3.

1283. Исследуем функцию $f(x) = -x^6 + 32x + 5$. $f'(x) = -6x^5 + 32$, $f'(x) = 0$, $x = \dfrac{2}{\sqrt[5]{6}}$. Так как $f'(x) > 0$ при $x < \dfrac{2}{\sqrt[5]{6}}$ и $f'(x) > 0$ при $x > \dfrac{2}{\sqrt[5]{6}}$, то в точке $x = \dfrac{2}{\sqrt[5]{6}}$ достигается наибольшее значение, которое равно $f\Big(\dfrac{2}{\sqrt[5]{6}}\Big) = \dfrac{320}{6\sqrt[5]{6}} + 5$. Так как $f(x) \leqslant \dfrac{320}{6\sqrt[5]{6}} + 5$, $f(x) - 44 \leqslant \dfrac{320}{6\sqrt[5]{6}} - 39$, $f(x) - 44 \leqslant 1$, то $g\big(f(x) - 44\big) = 3$. Тогда исходное уравнение $g\big(f(x) - 44\big) + f\big(g(x)\big) = 8$ примет вид $f\big(g(x)\big) = 5$.

Обозначим $g(x) = t$, тогда $f(t) = 5$, $-t^6 + 32t + 5 = 5$, $-t^6 + 32t = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$. Так как $g(x) \neq 3$, то исходное уравнение не имеет корней при $x \leqslant 1$. При $x > 1$ возможны два случая.

1. $g(x) = 0$, $\log_2 x + (x-1)^3 = 0$, $\log_2 x = -(x-1)^3$. При $x > 1$ функция $\log_2 x$ возрастает, а функция $-(x-1)^3$ убывает. Следовательно, это уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим $x = 1$. Но $1 \notin (1; \infty)$.

2. $g(x) = 2$, $\log_2 x + (x-1)^3 = 2$, $\log_2 x = 2 - (x-1)^3$. При $x > 1$ функция $\log_2 x$ возрастает, а функция $2 - (x-1)^3$ убывает. Следовательно, это уравнение имеет не более одного корня. Подбором находим $x = 2$. Это единственный корень исходного уравнения.

Ответ: 2.

1287. 1. Так как $a_{30} = 2$, то $f(a_{29}) = 2$. Найдём a_{29} из уравнения $f(x) = 2$.

При $x < 3$ уравнение имеет вид $4 - \dfrac{8}{x+2} = 2$. Его корень $x = 2$ удовлетворяет условию $x < 3$.

При $x \geqslant 3$ уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{x+1} + 1 = -\log_3 \dfrac{x}{2}$. Его ОДЗ $x > 0$. Рассмотрим функции $f_1(x) = \dfrac{x^2}{x+1} + 1$ и $f_2(x) = -\log_3 \dfrac{x}{2}$ при $x \geqslant 3$. Так как $f_1'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2} > 0$ при $x \geqslant 3$, то $f_1(x)$ возрастает при $x \geqslant 3$. Так как $f_2'(x) = -\dfrac{1}{x \ln 3} < 0$ при $x \geqslant 3$, то $f_2(x)$ убывает при $x \geqslant 3$. Так как $f_1(3) = \dfrac{13}{4}$, а $f_2(3) = -\log_3 \dfrac{3}{2} = -1 + \log_3 2 < 0$, то $f_1(3) > f_2(3)$. Следовательно, уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ не имеет корней при $x \geqslant 3$.

Итак, $a_{29} = 2$.

2. Аналогично доказывается, что $a_{28} = a_{27} = a_{26} = \ldots = a_1 = 2$.

Значит, $7a_9 - 2a_{17} = 7 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 10$.

Ответ: 10.

.

1288. Найдём $f(x) + f(-x) = 3^x + 2x - \ln 5 + 3^{-x} + 2(-x) - \ln 5 =$
$= 3^x + 3^{-x} - 2\ln 5$.

$$f(x) + f(-x) = 3^x + \frac{1}{3^x} - 2\ln 5 = \frac{(3^x)^2 + 1 - 2 \cdot 3^x + 2 \cdot 3^x}{3^x} - 2\ln 5 =$$

$$= \frac{(3^x - 1)^2 + 2 \cdot 3^x}{3^x} - 2\ln 5 = \frac{(3^x-1)^2}{3^x} + 2 - 2\ln 5 \geqslant 2 - 2\ln 5.$$ Так как $\ln 5 < 2$, $-2\ln 5 > -4$, то $2 - 2\ln 5 > -2 \Rightarrow f(x) + f(-x) > -2 \Rightarrow$ $g(f(x)+f(-x)) = \ln 5$. Заданное уравнение примет вид: $f(g(x)) + \ln 5 = 5$; $3^g + 2g - \ln 5 + \ln 5 = 5$; $3^g + 2g = 5$, где $g = 5^{x^2+2x-2} - 4$.

$y = 3^g + 2g$ — возрастающая функция как сумма двух возрастающих, значит, любое значение может принимать не более одного раза; $y(1) = 3^1 + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow g = 1$ — единственный корень уравнения $3^g + 2g = 5$.

$g(x) = 1$ может быть только при $x < -2$; $5^{x^2+2x-2} - 4 = 1$; $5^{x^2+2x-2} = 5$; $x^2 + 2x - 2 = 1$; $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = -3$. Так как $x < -2$, $x = -3$ — корень уравнения.

Ответ: -3.

1289. Обозначим $t = x^{\frac{3}{2}}$ и перепишем уравнение в виде

$$\frac{5t^2}{5t^2 - 7t + 6} + \frac{2t^2}{5t^2 - t + 6} = t,\ t\left(\frac{5t}{5t^2 - 7t + 6} + \frac{2t}{5t^2 - t + 6} - 1\right) = 0.$$

Очевидно, что $t = 0$ — корень последнего уравнения, который приводит нас к одному из корней исходного уравнения $x = 0$ (это значение удовлетворяет исходному уравнению).

Решим теперь уравнение $\dfrac{5t}{5t^2-7t+6} + \dfrac{2t}{5t^2-t+6} = 1$.

Поскольку значение $t = 0$ не является его корнем, разделим числитель и знаменатель каждой дроби на t: $\dfrac{5}{5t+\dfrac{6}{t}-7} + \dfrac{2}{5t+\dfrac{6}{t}-1} = 1$.

Введём новую переменную $u = 5t + \dfrac{6}{t}$. Тогда уравнение примет вид: $\dfrac{5}{u-7} + \dfrac{2}{u-1} = 1$. Далее получаем равносильную систему:

$\begin{cases} 5(u-1) + 2(u-7) = (u-7)(u-1), \\ u \neq 1, u \neq 7, \end{cases}$ то есть $\begin{cases} u^2 - 15u + 26 = 0, \\ u \neq 1, u \neq 7. \end{cases}$

Отсюда $u_1 = 13, u_2 = 2$. Возвращаясь к переменной t, получим два квадратных уравнения: 1) $5t + \dfrac{6}{t} = 13; 5t^2 - 13t + 6 = 0; t_1 = 2, t_2 = 0{,}6$; 2) $5t + \dfrac{6}{t} = 2; 5t^2 - 2t + 6 = 0$ — уравнение не имеет действительных корней.

Вернемся к исходной переменной, решив следующие два уравнения: $x^{\frac{3}{2}} = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}; x^{\frac{3}{2}} = 0{,}6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что значения $x_1 = \sqrt[3]{4}$ и $x_2 = \sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}$ — корни исходного уравнения.

Ответ: 0; $\sqrt[3]{\dfrac{9}{25}}$; $\sqrt[3]{4}$.

1290. Перепишем данное уравнение в виде:
$2^{x^6} - \cos x^3 = 2^{(2x^2+x)^2} - \cos(2x^2+x)$.

1. Заметим, что последнее уравнение является уравнением вида: $f(x^3) = f(2x^2+x)$, где $f(t) = 2^{t^2} - \cos t$. Функция $f(t)$ чётна.

2. Докажем, что $f(t)$ возрастает на $(0; +\infty)$.
$f'(t) = 2\ln 2 \cdot t \cdot 2^{t^2} + \sin t$.

а) $0 < t \leqslant 1 \Rightarrow 0 < \sin t < t;\ 2^{t^2} > 1 \Rightarrow$
$f'(t) > 2 \cdot \ln 2 \cdot \sin t \cdot 1 + \sin t = \sin t(2\ln 2 + 1) > 0$.

б) $t > 1 \Rightarrow 2\ln 2 \cdot t \cdot 2^{t^2} > 4 \cdot \ln 2;\ \sin t \geqslant -1 \Rightarrow$

$f'(t) = 2\ln 2 \cdot t \cdot 2^{t^2} + \sin t > 4\ln 2 - 1 = \ln 16 - \ln e = \ln\dfrac{16}{e} > 0$, так как $e > 1$ и $\dfrac{16}{e} > 1$. Таким образом, $f'(t) > 0$ на $(0; +\infty) \Rightarrow f(t)$ возрастает на $(0; +\infty)$.

3. Так как $f(t)$ чётна и на $(0; +\infty)$ возрастает, то $f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = \pm t_2$.

Это означает, что данное уравнение равносильно объединению уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^3 = 2x^2 + x, \\ x^3 = -2x^2 - x; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x^2 - 2x - 1) = 0, \\ x(x^2 + 2x + 1) = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1 + \sqrt{2}, \\ x = 1 - \sqrt{2}, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $0,\ -1,\ 1 \pm \sqrt{2}$.

1291. $x^{12} + 82\cos(10x - 21) = 82\cos(x^2) + (10x - 21)^6$,
$x^{12} - 82\cos(x^2) = (10x - 21)^6 - 82\cos(10x - 21)$.

1. Заметим, что полученное уравнение является уравнением вида $f(x^2) = f(10x - 21)$, где $f(t) = t^6 - 82\cos t$.
Функция $f(t)$ — чётная.

2. Покажем, что $f(x)$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$, то есть $f'(t) > 0$ при $t > 0$. $f'(t) = 6t^5 + 82\sin t$,
а) $0 < t \leqslant \pi$, $6t^5 > 0$, $82\sin t > 0$, значит $6t^5 + 82\sin t > 0$;
б) $t > 0$, $6t^5 > 6 \cdot \pi^5$, $-82 < 82\sin t < 82$, $\Rightarrow 6t^5 + 82\sin t > 0$.
Следовательно, $f'(t) > 0$ при $t \in (0; +\infty)$.

3. Так как $f(t)$ — чётная функция и на $(0; +\infty)$ возрастает, то $f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = \pm t_2$.

Это означает, что данное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 10x - 21, \\ x^2 = 21 - 10x; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 10x + 21 = 0, \\ x^2 + 10x - 21 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 7, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = -5 - \sqrt{46}, \\ x = -5 + \sqrt{46}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ответ: $-5 - \sqrt{46};\ -5 + \sqrt{46};\ 3;\ 7$.

1292. $x^4(x^2 + \sqrt{a^2 - a - 1}) + |8 - a| + |27 + a| - \sqrt{(8 - a)(27 + a)} = 21$.

1. Найдём допустимое значение a.

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 - a - 1 \geqslant 0, \\ (a - 8)(a + 27) \leqslant 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a \leqslant \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, \\ a \geqslant \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \end{array}\right. \\ -27 \leqslant a \leqslant 8; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -27 \leqslant a \leqslant \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant 8. \end{array}\right.$$

2. $x^4(x^2+\sqrt{a^2-a-1})+8-a+27+a-\sqrt{(8-a)(a+27)}=21$,

$x^4(x^2+\sqrt{a^2-a-1})-\sqrt{(8-a)(a+27)}+14=0$ (1).

3. Функция $f(x)=x^4(x^2+\sqrt{a^2-a-1})-\sqrt{(8-a)(a+27)}+14$ чётная, поэтому если $f(x)=0$, то $f(-x)=0$. Значит, уравнение $f(x)=0$ имеет нечётное число корней только тогда, когда одним из корней является число 0. Найдём все значения параметра a, при которых $x=0$ является корнем уравнения (1). Получим:

$-\sqrt{(8-a)(a+27)}+14=0$,

$(8-a)(a+27)=196$, $a^2+19a-20=0$, $a=-20$,

$a=1$ — не входит в область допустимых значений a.

Подставим значение $a=-20$ в уравнение (1) и найдём количество корней.

$x^4(x^2+\sqrt{(-20)^2+20-1})-\sqrt{(8+20)(-20+27)}+14=0$,

$x^4(x^2+\sqrt{419})-14+14=0$,

$x^4(x^2+\sqrt{419})=0$,

$x=0$ — единственный корень уравнения (1).

Исходное уравнение имеет единственное решение при $a=-20$.

Ответ: -20.

1293. Пусть $N_1(p)$ — число различных корней первого уравнения (которое зависит от значений параметра p), а $N_2(p)$ — число различных корней второго уравнения. Таким образом, нужно найти такие значения p, при которых выполняется соотношение $N_1(p)=N_2(p)$.

Определим количество корней первого уравнения в зависимости от значений параметра p. Если $p=0$, то уравнение становится линейным: $3x+4=0$, имеющим один корень $x=-\dfrac{4}{3}$. Пусть теперь $p\neq 0$. Тогда $D=(p+3)^2-16p=p^2-10p+9=(p-1)(p-9)$. Это означает, что при $p\in(1;9)$ уравнение не имеет корней (этот случай исключается условием задачи), при $p=1;9$ уравнение имеет один корень, при $p\in(-\infty;1)\cup(9;+\infty)$ уравнение имеет два различных корня.

Рассмотрим второе уравнение. Областью допустимых значений переменной x является $x\geqslant 5$. При $x\geqslant 5$ правая часть уравнения положительна, значит уравнение может иметь корни только в случае $16-p>0$, $p<16$ (так как $x-1>0$ при $x\geqslant 5$). Но при $p<16$ в левой части уравнения стоит возрастающая функция, а в правой части — убывающая. Таким образом, число различных корней второго уравнения не может быть более одного: $N_2(p) \leqslant 1$.

Из соотношения $N_1(p) = N_2(p)$ теперь сразу следует, что нужно искать такие значения p, при которых $N_1(p) = 1$ и $N_2(p) = 1$. $N_1(p) = 1$ при $p = 0; 1; 9$. Осталось подставить эти значения параметра во второе уравнение и проверить, имеет ли оно корень.

$p = 0: \dfrac{x-1}{16} = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}+4}$, $x = 5$ — корень.

$p = 1: \dfrac{x-1}{15} = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}+4}$. Но $\dfrac{x-1}{15} \geqslant \dfrac{4}{15} > \dfrac{1}{4} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-5}+4}$ при $x \geqslant 5$. Нет решений.

$p = 9: \dfrac{x-1}{7} = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}+4}$. Но $\dfrac{x-1}{7} \geqslant \dfrac{4}{7} > \dfrac{1}{4} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-5}+4}$ при $x \geqslant 5$. Нет решений.

Ответ: 0..

1295. $b^4 - 8b\cos(\cos x) - 9x^2 = 0 \quad (1)$.

Рассмотрим три случая.

1. $b = 0$ — уравнение (1) имеет единственное решение $x = 0$.
2. $b > 0$.

Приведём уравнение к виду $b^4 - 9x^2 = 8b\cos(\cos x)$.

Уравнение (1) имеет единственное решение, когда графики функций $f(x) = b^4 - 9x^2$ и $g(x) = 8b\cos(\cos x)$ имеют только одну общую точку. Функции $f(x)$ и $g(x)$ чётные, значит их графики симметричны относительно оси ординат.

$E(f) = (-\infty; b^4]$, $E(g) = [8b\cos 1; 8b]$, следовательно единственное решение уравнение (1) имеет при условии $b^4 = 8b\cos 1$ (см. рис. 284).

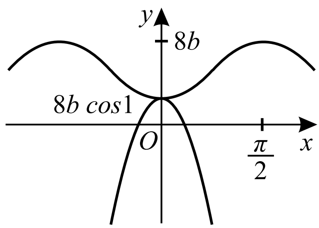


Рис. 284.

Так как $b > 0$, то $b = 2\sqrt[3]{\cos 1}$.

3. $b < 0$. $f(0) = b^4$, $g(0) = 8b\cos 1 < 0$, $f(0) \neq g(0)$ и функции $f(x)$ и

$g(x)$ — чётные, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ при $b < 0$ имеет чётное число корней, что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $0; 2\sqrt[3]{\cos 1}$.

1296. ОДЗ системы уравнений: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ z > 0. \end{cases}$

Выполним замену $u = \lg x$, $v = \lg y$, $w = \lg z$ и учитывая, что первое уравнение системы можно записать в виде $\lg x + \lg y + \lg z = 1$, получим систему:

$$\begin{cases} u + v + w = 1, \\ u^2 + v^2 + w^2 = \dfrac{17}{2}, \\ uvw = -\dfrac{9}{2}. \end{cases} \qquad (*)$$

Так как $(u+v+w)^2 = u^2+v^2+w^2+2(uv+uw+vw)$ и $u+v+w = 1$, то можно записать систему в виде:

$$\begin{cases} u + v + w = 1, \\ uv + uw + vw = -\dfrac{15}{4}, \\ uvw = -\dfrac{9}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v + w = 1 - u, \\ vw = -\dfrac{15}{4} - u(1-u), \\ u\Big(-\dfrac{15}{4} - u(1-u)\Big) = -\dfrac{9}{2}. \end{cases} \qquad (**)$$

Решаем третье уравнение последней системы:

$-\dfrac{15}{4}u - u^2 + u^3 + \dfrac{9}{2} = 0;$

$4u^3 - 4u^2 - 15u + 18 = 0.$

Так как $u = -2$ является корнем последнего уравнения, то его можно переписать в виде:

$(u+2)(2u-3)^2 = 0;\ u_1 = -2,\ u_2 = \dfrac{3}{2}.$

При $u = -2$ первые два уравнения системы уравнений $(**)$ образуют систему:

$$\begin{cases} v + w = 3, \\ vw = \dfrac{9}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - w, \\ w(3-w) = \dfrac{9}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 - w, \\ 4w^2 - 12w + 9 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{3}{2}, \\ w = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$ Таким образом, получено первое решение системы $(*)$:

$\left(-2; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

При $u = \frac{3}{2}$ аналогично получается ещё два решения системы $(*)$:

$\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -2\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; -2; \frac{3}{2}\right)$.

Возвращаясь к переменным x, y и z, получим три решения исходной системы уравнений: $\left(\frac{1}{100}; 10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}\right)$, $\left(10\sqrt{10}; \frac{1}{100}; 10\sqrt{10}\right)$ и $\left(10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}; \frac{1}{100}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{100}; 10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}\right)$, $\left(10\sqrt{10}; \frac{1}{100}; 10\sqrt{10}\right)$, $\left(10\sqrt{10}; 10\sqrt{10}; \frac{1}{100}\right)$.

1298. 1) Рассмотрим функцию $h(x) = x^2 - \dfrac{5a}{2\cos x - 3} + 10$.

Так как $h(-x) = (-x)^2 - \dfrac{5a}{2\cos(-x) - 3} + 10 = x^2 - \dfrac{5a}{2\cos x - 3} + 10 = h(x)$, то функция $h(x)$ — чётная. Следовательно, заданное уравнение может иметь единственное решение только тогда, когда $x = 0$ — корень и других корней нет. При этом значении x получаем: $-\dfrac{5a}{-1} + 10 = 0$; $a = -2$.

2) Проверим, что при $a = -2$ других решений, кроме $x = 0$, нет. Для найденного значения a преобразуем исходное уравнение к виду

$x^2 + 10 = -\dfrac{10}{2\cos x - 3}$.

Пусть $g(x) = x^2 + 10$, $f(x) = -\dfrac{10}{2\cos x - 3}$. Найдём количество точек пересечения графиков функций $g(x)$ и $f(x)$.

3) $-2 \leqslant 2\cos x \leqslant 2$; $-5 \leqslant 2\cos x - 3 \leqslant -1$; $-1 \leqslant \dfrac{1}{2\cos x - 3} \leqslant -\dfrac{1}{5}$;

$2 \leqslant \dfrac{-10}{2\cos x - 3} \leqslant 10$, $f(x) \leqslant 10$.

4) Графиком функции $g(x) = x^2 + 10$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке с координатами $(0; 10)$. Поэтому $g(x) \geqslant 10$ для всех $x \in R$. Следовательно, графики функций

$g(x)$ и $f(x)$ пересекаются только в случае $\begin{cases} f(x) = 10, \\ g(x) = 10, \end{cases}$ то есть получаем единственное решение $x = 0$. Таким образом, значение параметра $a = -2$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: -2.

1299. 1) Рассмотрим функцию $h(x) = 15 + 7x^2 - \dfrac{3\sin\cos x}{4a}$. Так как

$h(-x) = 15 + 7(-x)^2 - \dfrac{3\sin\cos(-x)}{4a} = 15 + 7x^2 - \dfrac{3\sin\cos x}{4a} = h(x)$, то функция $h(x)$ — чётная. Следовательно, заданное уравнение может иметь единственное решение только тогда, когда $x = 0$ — корень и других корней нет. При этом значении x получаем:

$15 - \dfrac{3\sin 1}{4a} = 0$; $a = \dfrac{\sin 1}{20}$.

2) Проверим, что при $a = \dfrac{\sin 1}{20}$ других решений, кроме $x = 0$, нет.

Для найденного значения a преобразуем исходное уравнение к виду $15 + 7x^2 = \dfrac{15\sin\cos x}{\sin 1}$.

3) $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Рассмотрим функцию $\tilde{f}(t) = \sin t$, для $t \in [-1, 1]$. На этом промежутке функция возрастает и $\sin t \leqslant \sin 1$. Следовательно, $\dfrac{15\sin\cos x}{\sin 1} \leqslant \dfrac{15\sin 1}{\sin 1} = 15$.

Так как $15 + 7x^2 \geqslant 15$, то уравнение $15 + 7x^2 = \dfrac{15\sin x\cos x}{\sin 1}$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} 15 + 7x^2 = 15, \\ \dfrac{15\sin\cos x}{\sin 1} = 15. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = 0$. Следовательно, значение параметра $a = \dfrac{\sin 1}{20}$ — искомое.

Ответ: $\dfrac{\sin 1}{20}$.

1300. 1) Найдём модуль разности корней уравнения $ax^2 + 2x - 2{,}25 = 0$. $D = 4 + 9a$, $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{9a+4}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{9a+4}}{2a}$. Так как $a > 0$, то

$x_2 > x_1$, то есть $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1 = \dfrac{\sqrt{9a+4}}{a}$.

2) Найдём расстояние между точками экстремума функции $f(x)$.
$f'(x) = 6x^2 - 18x - 6a$, $f'(x) = 0$, $6x^2 - 18x - 6a = 0$, $x^2 - 3x - a = 0$, $D = 9 + 4a$, $x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{4a+9}}{2}$, $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{4a+9}}{2}$, $|x_2 - x_1| = x_2 - x_1 =$ $= \sqrt{4a+9}$.

3) Решим неравенство $\dfrac{\sqrt{9a+4}}{a} \leqslant \sqrt{4a+9}$. Так как $a > 0$, то неравенство примет вид $\sqrt{9a+4} \leqslant a\cdot\sqrt{4a+9}$, $a^2(4a+9) \geqslant 9a+4$, $4a^3+9a^2-9a-4 \geqslant 0$, $4(a-1)(a^2+a+1) + 9a(a-1) \geqslant 0$, $(a-1)(4a^2+4a+4+9a) \geqslant 0$, $(a-1)(4a^2+13a+4) \geqslant 0$. При $a > 0$ $4a^2+13a+4 > 0$, поэтому последнее неравенство равносильно $a - 1 \geqslant 0$, откуда $a \geqslant 1$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

1302. 1) Рассмотрим первое уравнение. Сделаем замену $\cos x = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Уравнение примет вид $\sqrt{41+9t} = at$. Решим его графически (см. рис. 285). $f(t) = \sqrt{41+9t}$, $g(t) = at$, $f(1) = 5\sqrt{2}$, $f(-1) = 4\sqrt{2}$, $E(f) = [4\sqrt{2}; 5\sqrt{2}]$.

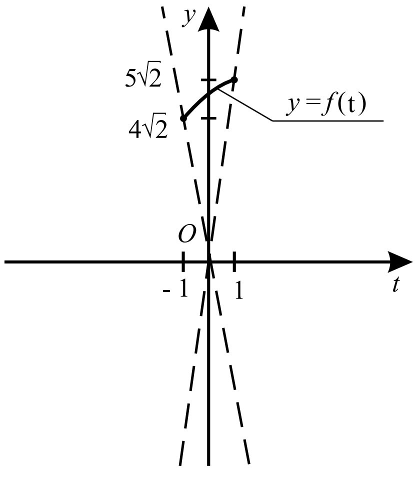


Рис. 285.

Уравнение имеет решение тогда, когда графики функций $f(t)$ и $g(t)$ имеют общую точку, то есть при $a \geqslant 5\sqrt{2}$ и $a \leqslant -4\sqrt{2}$.

2) Рассмотрим второе уравнение.

При $x \geqslant -2$: а) $h(x) = x - a + 7x + 14 + 5x = 13x - a + 14$,

б) $h(x) = a - x + 7x + 14 + 5x = 11x + a + 14$.

В обоих случаях $h(x)$ монотонно возрастает при $x \geqslant -2$.

При $x < -2$: а) $h(x) = x - a - 7x - 14 + 5x = -x - a - 14$,

б) $h(x) = a - x - 7x - 14 + 5x = -3x + a - 14$.

В обоих случаях $h(x)$ монотонно убывает при $x < -2$ (см. рис. 285).

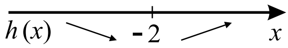


Рис. 286.

$x = -2$ — точка минимума $h(x)$. Уравнение $h(x) = 0$ имеет корни, если $h(-2) \leqslant 0$.

То есть $|-2-a| - 10 \leqslant 0$, $-10 \leqslant -2 - a \leqslant 10$, $-12 \leqslant a \leqslant 8$.

Искомыми значениями a будут значения из пересечения

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geqslant 5\sqrt{2}, \\ a \leqslant 4\sqrt{2}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a \geqslant -12, \\ a \leqslant 8; \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{то есть } a \in [-12; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; 8].$$

Ответ: $[-12; -4\sqrt{2}] \cup [5\sqrt{2}; 8]$.

1303. 1) Рассмотрим первое уравнение. Сделаем замену $\sin x = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Уравнение примет вид $\sqrt{145 + 24t} = -at$. Решим его графически (см. рис. 287):

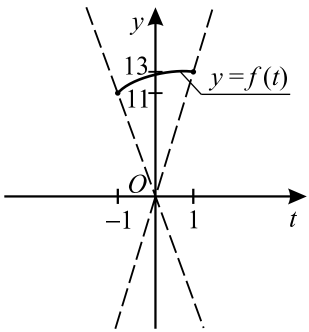


Рис. 287.

$f(t) = \sqrt{145 + 24t}$, $g(t) = -at$.

$f(1) = 13$, $f(-1) = 11$. $E(f) = [11; 13]$.

Уравнение не имеет решений тогда, когда графики функций $f(t)$ и $g(t)$ не имеют общих точек, то есть при $a < 11$ и $a > -13$.

2) Рассмотрим второе уравнение.

При $x \geqslant 1$ функция а) $h(x) = 3x - 9x + 9 - x - a = -7x + 9 - a$

б) $h(x) = 3x - 9x + 9 + x + a = -5x + 9 + a$.

В обоих случаях $h(x)$ монотонно убывает при $x \geqslant 1$ (см. рис. 288).

При $x < 1$ функция а) $h(x) = 3x + 9x - 9 - x - a = 11x - 9 - a$

б) $h(x) = 3x + 9x - 9 + x + a = 13x - 9 + a$.

В обоих случаях $h(x)$ монотонно возрастает при $x < 1$.

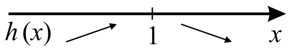


Рис. 288.

$x = 1$ — точка максимума $h(x)$.

Уравнение $h(x) = 0$ не будет иметь корней, если $h(1) < 0$.

То есть $3 - |1 + a| < 0$, $|a + 1| > 3$; $\left[\begin{array}{l} a > 2, \\ a < -4. \end{array}\right.$

Искомыми значениями a будут значения из пересечения

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a > 2, \\ a < -4, \end{array}\right. \\ a < 11, \\ a > -13; \end{array}\right. \quad \text{то есть } a \in (-13; -4) \cup (2; 11).$$

Ответ: $(-13; -4) \cup (2; 11)$.

1304. $\log_x(x - a) > 2$. Если $x = -a$ является решением неравенства, то $\log_{-a}(-2a) > -2$. (1)

Область определения неравенства: $\left\{\begin{array}{l} -a > 0, \\ -a \neq 1, \\ -2a > 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a < 0, \\ a \neq -1. \end{array}\right.$ (2)

На области определения неравенство (1) равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 0 < -a < 1, \\ -2a < (-a)^2, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -a > 1, \\ -2a > (-a)^2; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -1 < a < 0, \\ a(a+2) > 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a < -1, \\ a(a+2) < 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -1 < a < 0, \\ a < -2,\ a > 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} a < -1, \\ -2 < a < 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Первая система, очевидно, не имеет решений. Решение второй системы: $(-2;\ -1)$.

Ответ: $(-2;\ -1)$.

1305. $ax^2 + 3a > 4x$; $ax^2 - 4x + 3a > 0$. (1)

Найдём значения a, при которых значения $x = a$ не удовлетворяют неравенству (1). Другими словами, при которых значения $x = a$ удовлетворяют неравенству противоположного смысла $a \cdot a^2 - 4 \cdot a + 3a \leqslant 0$; $a(a^2 - 1) \leqslant 0$; $a(a - 1)(a + 1) \leqslant 0$; $a \leqslant -1$; $0 \leqslant a \leqslant 1$.

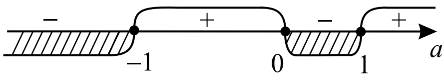


Рис. 289.

Ответ: $(-\infty;\ -1] \cup [0;\ 1]$.

1306. $3 - |x - a| > x^2$. Задача допускает довольно простое графическое решение. Перепишем неравенство в виде: $3 - x^2 > |x - a|$. (1) На одной координатной плоскости построим графики функций $y = 3 - x^2$ и $y = |x - a|$. Решением являются отрицательные значения x, при которых график квадратичной функции проходит выше графика функции $y = |x - a|$ (см. рис. 290).

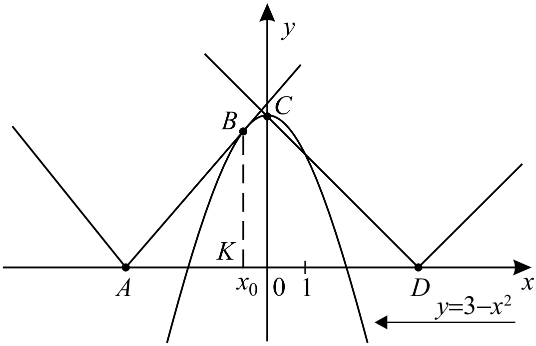


Рис. 290.

График функции $y = |x - a|$ получается из графика $y = |x|$ смещением по оси Ox. Его вершина находится в точке $(a;\ 0)$. На рис. 290 изображены два крайних (с точки зрения существования решений) положения графика $y = |x - a|$. Луч AB касается параболы в точке B. При смещении графика вправо появляется область отрицательных значений x, отвечающих решению неравенства (1). Для отрицательных значений x точки параболы будут лежать выше графика $y = |x - a|$ вплоть до момента, когда луч DC пройдет через вершину параболы. При увеличении a, то есть при смещении луча DC вправо. Неравенство (1) еще может иметь решения, но среди них не будет отрицательных чисел. Таким образом, для получения необходимого результата a должно изменяться в промежутке $(x_A;\ x_D)$. B — точка графика функции $y = 3 - x^2$ с абсциссой x_0. Касательная AB в этой точке наклонена к оси Ox под углом 45°, угловой коэффициент касательной равен 1. Найдём x_0: $y = 3 - x^2$; $y' = -2x$; $-2x_0 = 1$; $x_0 = -\frac{1}{2}$. $\triangle AKB$ — прямоугольный, равнобедренный. $AK = KB = 3 - x_0^2 = 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$. $OA = AK + KO = 2\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{4}$. Следовательно, $x_A = -3\frac{1}{4}$. Далее: $\triangle OCD$ — равнобедренный и прямоугольный. $C(0;\ 3)$ — вершина параболы. Значит $x_D = 3$. Таким образом, $a \in \left(-3\frac{1}{4};\ 3\right)$.

Ответ: $\left(-3\frac{1}{4};\ 3\right)$.

1307. $\log_{0,5}\left(\frac{||3x - 8a| - 2a|}{2a + 11}\right) \geqslant 0.\quad (1)$

Существование рассматриваемого логарифма обеспечивается условием $\frac{||3x - 8a| - 2a|}{2a + 11} > 0$. Отсюда следует, что:

а) $|3x - 8a| \neq 2a$, то есть $x \neq 3\frac{1}{3}a,\ x \neq 2a.\quad (2)$

б) $2a + 11 > 0,\ a > -5{,}5.\quad (3)$

Неравенство (1) при условиях (2) и (3) равносильно неравенству $\frac{||3x - 8a| - 2a|}{2a + 11} \leqslant 1$. Так как $2a + 11 > 0$, то $||3x - 8a| - 2a| \leqslant 2a + 11$, $-2a - 11 \leqslant |3x - 8a| - 2a \leqslant 2a + 11$, $-11 \leqslant |3x - 8a| \leqslant 4a + 11$. Модуль неотрицателен, поэтому последнее неравенство равносильно неравенству $|3x - 8a| \leqslant 4a + 11$. Это неравенство может иметь решение, если $4a + 11 \geqslant 0$, то есть $a \geqslant -2\frac{3}{4}$. В этом случае: $-4a - 11 \leqslant 3x - 8a \leqslant 4a + 11$, $1\frac{1}{3}a - 3\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 4a + 3\frac{2}{3}$ при условии $x \neq 3\frac{1}{3}a$ и $x \neq 2a$. Для выполнения требований задачи следует определить значения a, при которых число -3 входит в промежуток $\left[1\frac{1}{3}a - 3\frac{2}{3}; 4a + 3\frac{2}{3}\right]$ и при этом не совпадает с $3\frac{1}{3}a$ и с $2a$. Кроме того, в этот промежуток должна входить некоторая окрестность $[-\varepsilon; \varepsilon]$, $(\varepsilon > 0)$ точки 0. С помощью выбора значения k в такую окрестность всегда можно поместить заданную знакопеременную $-\frac{1}{k}$; $\frac{1}{4k}$; $\ldots$, члены которой стремятся к нулю с увеличением номера n. Достаточно, например, взять $k = \frac{2}{\varepsilon}$. Выбор значения k поможет также избежать совпадения какого-либо члена последовательности со значениями $x = 3\frac{1}{3}a$ и $x = 2a$. Потребуем для начала попадания числа -3 и окрестности числа 0 в промежуток $\left[1\frac{1}{2}a - 3\frac{2}{3}; 4a + 3\frac{2}{3}\right]$:

$$\begin{cases} 1\frac{1}{3}a - 3\frac{2}{3} \leqslant -3, \\ 4a + 3\frac{2}{3} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \leqslant \frac{1}{2}, \\ a > \frac{11}{12}; \end{cases} \quad -\frac{11}{12} < a \leqslant \frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Требования задачи, однако, не будут удовлетворены, если при каком-либо a из промежутка (4) число -3 совпадет с не входящими в область определения неравенства числами $2a$ и $3\frac{1}{3}a$. То есть должно принимать такие значения, чтобы $-3 \neq 2a$ и $-3 \neq 3\frac{1}{3}a$. Или $a \neq -\frac{3}{2}$ и $a \neq -\frac{9}{10}$. Первое значение a не входит в промежуток (4), а второе следует из него исключить как не обеспечивающее выполнение требований задачи. Таким образом, получаем $-\frac{11}{12} < a < -\frac{9}{10}$ и $-\frac{9}{10} < a \leqslant \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{11}{12}; -\frac{9}{10}\right) \bigcup \left(-\frac{9}{10}; \frac{1}{2}\right]$.

1308. 1) Так как подкоренное выражение арифметического квадратного корня должно принимать только неотрицательные значения, то $x \geqslant -1$. Числитель определен при $x \geqslant -1$. Разложим его на множители:
$(47x - 3x^2 + 68)\sqrt{x+1} = (17 - x)(3x + 4)\sqrt{x+1}$. Знаменатель
$\log_2(x^2 - 24x + 144) - 6 = \log_2(x - 12)^2 - 6 = 2(\log_2|x - 12| - 3)$ не определен при $x = 12$, поскольку логарифм не определен в точке 0. Найдём нули знаменателя: $\log_2|x - 12| - 3 = 0$, $\log_2|x - 12| = 3$, $|x - 12| = 8$, $x = 4$ или $x = 20$.

2) Функция $f(x) = \dfrac{(17 - x)(3x + 4)\sqrt{x+1}}{2(\log_2|x - 12| - 3)}$ определена при $x \geqslant -1$, $x \neq 4$, $x \neq 20$, $x \neq 12$ и непрерывна. Находим знаки функции: $f(21) < 0$, $f(19) > 0$, $f(13) < 0$, $f(11) < 0$, $f(0) > 0$, см. рис. 458

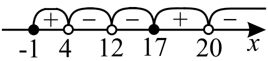


Рис. 291.

Значит, $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 4) \cup [17; 20)$.

3) Пусть $x = 2^{3-b^2} - 1$. Тогда $2^{-b^2} = \dfrac{x+1}{8}$, $2^{5-b^2} = 32 \cdot \dfrac{x+1}{8} = 4(x+1)$,

$4^{2-b^2} = 16 \cdot \left(2^{-b^2}\right)^2 = 16 \cdot \dfrac{(x+1)^2}{64} = \dfrac{(x+1)^2}{4}$, $2^{5-b^2} - 4^{2-b^2} + 9 =$

$= 4(x+1) - 2 \cdot \dfrac{(x+1)^2}{4} + 9 = \dfrac{1}{2}\big(8(x+1) - (x+1)^2 + 18\big) =$

$= \dfrac{1}{2}\Big(\big(-(x+1)^2 + 8(x+1) - 16\big) + 34\Big) = \dfrac{1}{2}\big(34 - (x+1-4)^2\big) =$

$= 17 - \dfrac{1}{2}(x-3)^2 = y \leqslant 17$. По условию, и число x и число y являются решениями исходного неравенства, то есть принадлежат множеству $[-1; 4) \cup [17; 20)$.

4) Так как $3 - b^2 \leqslant 3$, то $0 < 2^{3-b^2} \leqslant 8$, откуда $-1 < 2^{3-b^2} - 1 \leqslant 7$, то есть $-1 < x \leqslant 7$. Значит, случай $x \in [17; 20)$ невозможен. Следовательно, $x \in [-1; 4)$. Далее, функция $y = 17 - \dfrac{1}{2}(x-3)^2$ не имеет ни одной точки минимума, поскольку ее графиком является парабола, ветви которой направлены вниз. На отрезке такая функция может принимать наименьшее значение лишь на его концах: $y(-1) = 9$, $y(4) = 16{,}5$, и, значит, $y \geqslant 9$. Таким образом, случай $y \in [-1; 4)$ невозможен, поэтому, $y \in [17; 20)$.

5) Поскольку точка $(3; 17)$ является вершиной параболы

$y = 17 - \dfrac{1}{2}(x-3)^2$, то $x = 3$ — единственная точка максимума названной функции, а $y_{\text{наиб}} = 17$. В промежуток $[17; 20)$ попадает только одно значение функции $y(x)$ — $y_{\text{наиб}} = 17$; при этом $x = 3$. Отсюда, $2^{3-b^2} - 1 = 3$, $2^{3-b^2} = 2^2$, $3 - b^2 = 2$, $b = \pm 1$.

Ответ: ± 1.

1309. 1) ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x^2 - 10x + 24 \geqslant 0, \\ 3\sin^2 x + 2\cos^2 x + \cos x \neq 0; \end{cases}$

так как $3\sin^2 x + 2\cos^2 x + \cos x = 2 + \sin^2 x + \cos x > 0$ при всех x, то эта система равносильна системе $\begin{cases} (x-4)(x-6) \geqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 6, \\ 0 < x \leqslant 4. \end{array}\right.$

$$2)\ \frac{\sqrt{(x-4)(x-6)}(8^{x-2} - 3\cdot 4^{x-2} + 3\cdot 2^{x-2} - 1)(\log_2 x - 3)}{3\sin^2 x + 2\cos^2 x + \cos x} \leqslant 0;$$

$\sqrt{(x-4)(x-6)}(8^{x-2} - 3\cdot 4^{x-2} + 3\cdot 2^{x-2} - 1)(\log_2 x - 3) \leqslant 0;$ (знаменатель, как мы показали, положителен) по формуле куба разности упрощаем выражение во второй скобке:

$(2^{x-2}-1)^3(\log_2 x - 3) \leqslant 0$. Решаем методом интервалов, учитывая ОДЗ (см. рис. 292). Решения неравенства: $[2; 4] \cup [6; 8]$.

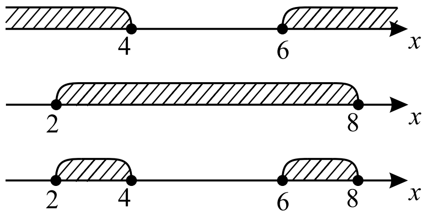


Рис. 292.

3) Так как $8 - 2^a$ не должно являться решением неравенства, но $8 - 2^a < 8$, то должно выполняться неравенство: $8 - 2^a < 6$; $2^a > 2$; $a > 1$. Подстановкой убеждаемся, что $a = 2$, 3, 4 не удовлетворяют условию задачи. $a = 5$ — удовлетворяет всем требуемым условиям. (проверьте это самостоятельно) Следовательно, минимальное целое a равно 5.

Ответ: 5.

1310. 1) Выпишем ОДЗ. $\begin{cases} x^2 - 7x + 13 > 0, \\ \log_7(x^2 - 7x + 13) \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 7x + 13 > 0, \\ x^2 - 7x + 13 \geqslant 1; \end{cases}$

$x^2 - 7x + 12 \geqslant 0$; $(x-3)(x-4) \geqslant 0$; $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 4, \\ x \leqslant 3. \end{array}\right.$

2) $x = 3$ и $x = 4$ являются решениями, а при остальных x

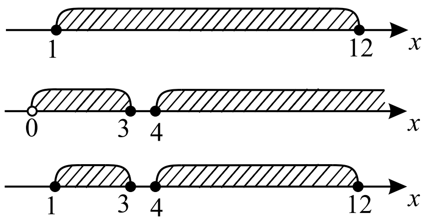


Рис. 293.

$\sqrt{\log_7(x^2-7x+13)} > 0$, поэтому можно упростить исходное неравенство, поделив обе части его на положительное число.
$12^x\log_{12}x+12-12\log_{12}x-12^x \leqslant 0$; $12^x(\log_{12}x-1)-12(\log_{12}x-1) \leqslant 0$; $12(12^{x-1}-1)(\log_{12}x-1) \leqslant 0$. Решаем методом интервалов, учитывая ОДЗ (см. рис. 293). Решения неравенства $[1;3]\cup[4;12]$.

3) Так как число a не должно являться решением неравенства, то $a<1$ или $a>12$. Но при $a>12$ имеем: $3^{a-2}>3+3^{10}$ и между числами a и $3+3^{a-2}$ решений неравенства нет. Поэтому значения $a>12$ не удовлетворяют условиям задачи и $a<1$. Легко видеть, что $a=0$ удовлетворяет всем условиям, то есть является искомым значением.

Ответ: 0.

1311. Преобразуем исходное неравенство:

$$\frac{3^x-6a+3}{a-2}+\frac{12}{(a-2)(3^x-3+a)} \leqslant \frac{10a+2}{3-a-3^x},$$

$$\frac{(3^x-6a+3)(3^x+a-3)+(a-2)(10a+2)+12}{(a-2)(3^x-3+a)} \leqslant 0,$$

$\dfrac{(3^x)^2-2^x\cdot 5a+4a^2+3a-1}{(a-2)(3^x-3+a)} \leqslant 0$. Сделав замену $t=3^x>0$, получим неравенство $\dfrac{t^2-t\cdot 5a+4a^2+3a-1}{(a-2)(3^x-3+a)} \leqslant 0$. Найдём корни трёхчлена $t^2-t\cdot 5a+4a^2+3a-1$: $t_{1,2}=\dfrac{5a\pm\sqrt{25a^2-4\cdot(4a^2+3a-1)}}{2}$,

$t_{1,2}=\dfrac{5a\pm\sqrt{9a^2-12a+4}}{2}$, $t_{1,2}=\dfrac{5a\pm\sqrt{(3a-2)^2}}{2}$, $t_{1,2}=\dfrac{5a\pm(3a-2)}{2}$
$\Rightarrow t_1=a+1$, $t_2=4a-1$. Таким образом, приходим к неравенству $\dfrac{(t-(a+1))(t-(4a-1))}{(a-2)(t-(3-a))} \leqslant 0$. Воспользуемся методом интервалов для его решения. Знак левой части неравенства будет зависеть от знака выражения $(a-2)$, поэтому рассмотрим два случая:

1) $a<2$, тогда $a-2<0$. В этом случае решение неравенства относительно t всегда будет содержать промежуток $[t_0;+\infty)$, где $t_0>0$, но тогда решение неравенства относительно x будет содержать промежуток $[\log_3 t_0;+\infty)$ и множество решений исходного неравенства не будет являться отрезком.

2) $a>2$, то есть $a-2>0$. Тогда $(4a-1)-(a+1)=3a-2>0$, $(a+1)-(3-a)=2a-2>0$, а значит, $3-a<a+1<4a-1$. Тогда по методу интервалов (см. рисунок 294) решением неравенства от-

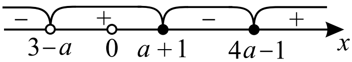


Рис. 294.

носительно t будет множество $(-\infty; 3-a) \cup [a+1; 4a-1]$, но $t > 0$, поэтому если $0 \in (-\infty; 3-a) \cup [a+1; 4a-1)$, то среди решений неравенства относительно t будет содержаться промежуток $(0; t_0]$. Следовательно, множество решений исходного неравенства будет содержать промежуток $(-\infty; \log_3 t_0]$ и множество решений исходного неравенства не будет являться отрезком. Таким образом, чтобы множество решений исходного неравенства было отрезком, необходимо и достаточно выполнение условия $0 \in [3-a; a+1) \Rightarrow \begin{cases} 3-a \leqslant 0, \\ a+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geqslant 3$. При этом решением неравенства относительно t будет отрезок $[a+1; 4a-1]$, а относительно x — отрезок $[\log_3(a+1); \log_3(4a-1)]$. Его длина равна $\log_3(4a-1) - \log_3(a+1) = \log_3 \dfrac{4a-1}{a+1}$, по условию она меньше 1. Таким образом, значения a находим из неравенства $\log_3 \dfrac{4a-1}{a+1} < 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{4a-1}{a+1} < 3$. При $a \geqslant 3$ имеем $0 < \dfrac{4a-1}{a+1} < 3 \Leftrightarrow \dfrac{a-4}{a+1} < 0 \Leftrightarrow a \in [3; 4)$ при $a \geqslant 3$.

Ответ: $[3; 4)$.

1312. Если $\dfrac{36}{x} - 1 > 1$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_{0,1}|0{,}1x - 1{,}1| < 1, \\ \log_{0,1}|0{,}1x - 1{,}1| > 0, \\ \dfrac{36}{x} - 1 > 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |0{,}1x - 1{,}1| > 0{,}1, \\ |0{,}1x - 1{,}1| < 1, \\ \dfrac{36-2x}{x} > 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $\dfrac{36-2x}{x} > 0$ являются значения $x \in (0; 18)$.

Раскрываем модуль: $|0{,}1x - 1{,}1| = \begin{cases} 0{,}1x - 1{,}1, \text{ при } x > 11, \\ 1{,}1 - 0{,}1x, \text{ при } x < 11. \end{cases}$

Заметим, что $x \neq 11$ по ОДЗ.

При $x > 11$ имеем:

$$\begin{cases} 0{,}1x - 1{,}1 > 0{,}1, \\ 0{,}1x - 1{,}1 < 1, \\ x > 11, \\ x < 18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 12, \\ x < 21, \\ x > 11, \\ x < 18. \end{cases} \Rightarrow x \in (12; 18).$$

При $x < 11$ имеем:

$$\begin{cases} 1{,}1 - 0{,}1x > 0{,}1, \\ 1{,}1 - 0{,}1x < 1, \\ x < 11, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 10, \\ x > 1, \\ x < 11, \\ x > 0. \end{cases} \Rightarrow x \in (1; 10).$$

Таким образом, $x \in (1; 10) \cup (12; 18)$.

Если $0 < \dfrac{36}{x} - 1 < 1$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{0,1} |0{,}1x - 1{,}1| > 1, \\ \log_{0,1} |0{,}1x - 1{,}1| > 0, \\ 0 < \dfrac{36}{x} - 1 < 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |0{,}1x - 1{,}1| < 0{,}1, \\ |0{,}1x - 1{,}1| \neq 0 \\ 1 < \dfrac{36}{x} < 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решением неравенства $1 < \dfrac{36}{x} < 2$ является интервал $x \in (18; 36)$. Значит, при раскрытии модуля рассматриваем только случай $x > 11$.

$$\begin{cases} 0{,}1x - 1{,}1 < 0{,}1, \\ x > 18, \\ x < 36; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 12, \\ x > 18, \\ x < 36. \end{cases} \quad \text{Решений нет.}$$

Итак, решением логарифмического неравенства являются значения $x \in (1; 10) \cup (12; 18)$.

Теперь, чтобы найти a, решим системы неравенств:

$$\begin{cases} 1 < \dfrac{a-3}{a+5} < 10, \\ 1 < 2\sqrt{\dfrac{a+5}{a-3}} < 10; \end{cases} \quad \begin{cases} 12 < \dfrac{a-3}{a+5} < 18, \\ 12 < 2\sqrt{\dfrac{a+5}{a-3}} < 18. \end{cases}$$

Сделав замену $t = \dfrac{a-3}{a+5}$, получим:

$$\begin{cases} 1 < t < 10, \\ 1 < \dfrac{2}{\sqrt{t}} < 10; \end{cases} \quad \begin{cases} 12 < t < 18, \\ 12 < \dfrac{2}{\sqrt{t}} < 18. \end{cases}$$

Решением первой системы является интервал $t \in (1; 4)$. Вторая система решений не имеет.

С учетом замены получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{a-3}{a+5} > 1, \\ \dfrac{a-3}{a+5} < 4; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{-8}{a+5} > 0, \\ \dfrac{-3a-23}{a+5} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < -5, \\ a < -7\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ: $\Big(-\infty; -7\dfrac{2}{3}\Big)$.

1313. Если $3 - \sqrt{x} > 1$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_{0,5}(0{,}5|x-5| - 1{,}5) < 1, \\ \log_{0,5}(0{,}5|x-5| - 1{,}5) > 0, \\ 3 - \sqrt{x} > 1, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5|x-5| - 1{,}5 > 0{,}5, \\ 0{,}5|x-5| - 1{,}5 < 1, \\ \sqrt{x} < 2, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-5| > 4, \\ |x-5| < 5, \\ x < 4, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

По определению модуля функции: $|x-5| = \begin{cases} x-5, \text{ при } x \geqslant 5, \\ 5-x, \text{ при } x < 5. \end{cases}$ Так как $x < 4$, то рассматриваем лишь тот случай, когда $x < 5$. Получим систему

$$\begin{cases} 5 - x > 4, \\ 5 - x < 5, \\ x < 4, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x > 0, \\ x < 4, \\ x \geqslant 0. \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 1).$$

Если $0 < 3 - \sqrt{x} < 1$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_{0,5}(0{,}5|x-5| - 1{,}5) > 1, \\ \log_{0,5}(0{,}5|x-5| - 1{,}5) > 0, \\ 0 < 3 - \sqrt{x} < 1, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5|x-5| - 1{,}5 < 0{,}5, \\ 0{,}5|x-5| - 1{,}5 > 0, \\ \sqrt{x} > 2, \\ \sqrt{x} < 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-5| < 4, \\ |x-5| > 3, \\ x > 4, \\ x < 9. \end{cases}$$

Для $x \geqslant 5$ получим систему

$$\begin{cases} x - 5 < 4, \\ x - 5 > 3, \\ x > 4, \\ x < 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 9, \\ x > 8, \\ x > 4, \\ x < 9. \end{cases} \Rightarrow x \in (8; 9).$$

Для $x < 5$ получим систему

$$\begin{cases} 5 - x < 4, \\ 5 - x > 3, \\ x > 4, \\ x < 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x < 2, \\ x > 4, \\ x < 9. \end{cases} \text{Решений нет.}$$

Таким образом, решением логарифмического неравенства являются значения $x \in (0; 1) \cup (8; 9)$.

Преобразуем выражение:

$$\frac{a+1}{a-1}+2\frac{a+1}{(a-1)^2}=\frac{a+1}{a-1}\left(1+\frac{2}{a-1}\right)=\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2.$$

Чтобы найти a, нужно решить следующие системы:

$$\begin{cases} 0<\dfrac{1+a}{1-a}<1, \\ 0<\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)^2<1; \end{cases} \quad \begin{cases} 8<\dfrac{1+a}{1-a}<9, \\ 8<\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)^2<9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0<\dfrac{1+a}{1-a}<1, \\ 8<\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)^2<9; \end{cases} \quad \begin{cases} 8<\dfrac{1+a}{1-a}<9, \\ 0<\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)^2<1. \end{cases}$$

Последние три системы решений не имеют.

В результате получим:

$$\begin{cases} 0<\dfrac{1+a}{1-a}<1, \\ 0<\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)^2<1; \end{cases}$$ Сделаем замену: $t=\dfrac{1+a}{1-a}$. Тогда $\begin{cases} 0<t<1, \\ 0<t^2<1; \end{cases}$

Эта система, очевидно, имеет решение $t\in(0;1)$. Вторая система решений не имеет. С учетом замены получаем

$$\begin{cases} \dfrac{1+a}{1-a}>0 \\ \dfrac{1+a}{1-a}<1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-1, \\ a<0. \end{cases}$$

Ответ: $(-1;0)$.

1314. $|x-a|+|y|\leqslant 2$ (1),
$(y+3)(y-x+2)(x^2-8x+12-y)\geqslant 0$ (2).
Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства (1) (см. рис. 295).
Так как для любого решения $(x;y)$ неравенства (1) выполняется условие $-2\leqslant y\leqslant 2$, то для таких значений y имеем $y+3>0$ и неравенство (2) примет вид $(y-x+2)(x^2-8x+12-y)\geqslant 0$,
$(y-(x-2))(y-(x^2-8x+12))\leqslant 0$ (3).
Изобразим на координатной плоскости графики функций $y=x-2$ и $y=x^2-8x+12$ (см. рис. 296).
Решением неравенства (3) являются такие пары $(x;y)$, в которых значение y лежит между значениями выражений $x-2$ и $x^2-8x+12$, как показано

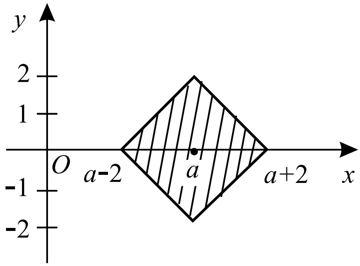


Рис. 295.

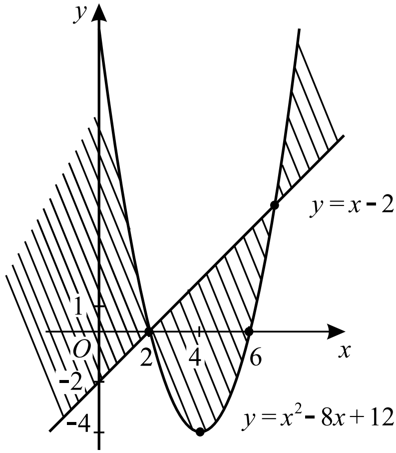


Рис. 296.

на рисунке 296.

Итак, необходимо найти такие значения параметра a, при которых множество решений неравенства (1), изображённое на рисунке 295, содержится в множестве, изображённом на рисунке 296.

Нетрудно заметить, что искомыми значениями a будут $a \leqslant 0$, $a = 4$.

Ответ: $a \leqslant 0, a = 4$.

1315. $|x - a| + 2|y - 3| \leqslant 1{,}5$ (1),
$(xy - 6)(x + 1)(2y - x - 4) \leqslant 0$ (2).

Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства (1) (см. рис. 297).

Так как для любого решения $(x; y)$ неравенства (1) выполняется условие $y \geqslant 2{,}25$, то неравенство (2) можно привести к виду

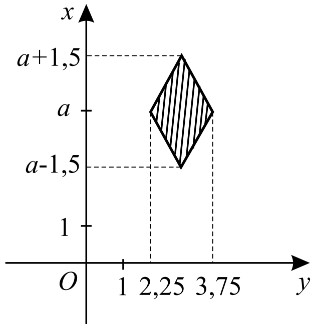


Рис. 297.

$\left(x - \dfrac{6}{y}\right)(x+1)(x-(2y-4)) \geqslant 0$ (3).

Изобразим на координатной плоскости графики функций $x = \dfrac{6}{y}$, $x = -1$ и $x = 2y - 4$ (см. рис. 298).

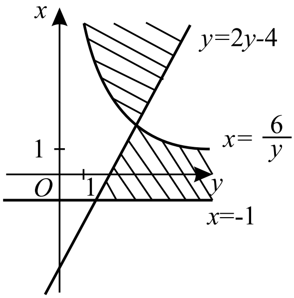


Рис. 298.

При $y > 0$ решение неравенства (3) изображено на рисунке 298. Необходимо найти такие значения параметра a, при которых множество решений неравенства (1), изображённое на рисунке 297, содержится в множестве, изображённом на рисунке 298. Нетрудно заметить, что искомыми значениями a будут $a \geqslant 3{,}5$, $a = 0{,}5$.

Ответ: $a = 0{,}5, a \geqslant 3{,}5$.

1316. $y = \left(x^{(2x+3)\log_x a} + (\sqrt[4]{x})^{12} \cdot a^8 - x^{3+2x\log_x a} - a(a^5)^{-\log_2(0{,}25)}\right)^{-0{,}5}$.

Основание степени с показателем $-0{,}5$ должно быть положительным:

$x^{(2x+3)\log_x a} + \left(\sqrt[4]{x}\right)^{12} \cdot a^8 - x^{3+2x\log_x a} - a(a^5)^{-\log_2(0{,}25)} > 0.$ (1)

Начнем преобразование неравенства (1), заметив, что существование слагаемых в левой части возможно, если $x > 0$, $x \neq 1$. В этом случае с использованием свойств степени и основного логарифмического тождества получим:
$a^{2x+3} + x^3 \cdot a^8 - x^3 \cdot a^{2x} - a^{11} > 0$; $a^{2x}(a^3 - x^3) + a^8(x^3 - a^3) > 0$; $(a^3 - x^3)(a^{2x} - a^8) > 0$; $(a - x)(a^2 + ax + x^2)(a^{2x} - a^8) > 0$. Так как второй множитель — неполный квадрат суммы — принимает только положительные значения при любых x и a, одновременно не равных 0, то последнее неравенство равносильно $(a - x)(a^{2x} - a^8) > 0$. (2)
Решим неравенство (2) методом интервалов. Одновременно можно провести отбор нужных значений параметра a. Нетрудно определить, что выражение в левой части (2) обращается в 0 при $x = a$ и при $x = 4$. Далее удобно рассмотреть три случая:
1) $0 < a < 1$. Расставим значения на промежутках с учетом свойства монотонности показательной функции с основанием $0 < a < 1$ (см. рис. 299). Напомним,что $x > 0$, $x \neq 1$. Тогда решение неравенства (2) при $0 < a < 1$

Рис. 299.

будет иметь вид: $0 < x < a$; $x > 4$. Это решение содержит бесконечно много натуральных чисел. Следовательно, требования задачи не выполняются при $0 < a < 1$.
2) $1 < a \leqslant 4$ (см. рис. 300). $a < x < 4$ — решение неравенства. Очевидно,

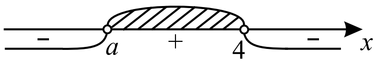


Рис. 300.

в этом случае $x > 0$, $x \neq 1$. Промежуток $(a; 4)$ должен содержать ровно 2 натуральных числа. Это могут быть числа 2 и 3, если $a < 2$. Таким образом, значения $1 < a < 2$ удовлетворяют требованиям задачи.

3) $a > 4$ (см. рис. 301). Для всех точек этого промежутка выполняются

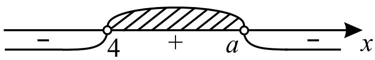


Рис. 301.

условия $x > 0$, $x \neq 1$. В промежуток $(4; a)$ могут войти натуральные числа

5 и 6, если $6 < a \leqslant 7$. Таким образом, требования задачи выполняются при $1 < a < 2$ и при $6 < a \leqslant 7$.

Ответ: $(1; 2) \cup (6; 7]$.

1317. $y = \left(a^x \cdot x^{(x+3)\log_x a} + a^{8+3\log_a x} - (\sqrt[3]{x})^{9+6x\log_x a} - \sqrt{a^{22}}\right)^{-0,5}$.
Основание степени с показателем $-0{,}5$ может принимать только положительные значения. Областью определения исходной функции служит множество решений неравенства:
$a^x \cdot x^{(x+3)\log_x a} + a^{8+3\log_a x} - (\sqrt[3]{x})^{9+6x\log_x a} - \sqrt{a^{22}} > 0$.
Понятно, что $x > 0$, $x \neq 1$; $a > 0$, $a \neq 1$. Используя свойства степеней и основное логарифмическое тождество, получим
$a^x \cdot x^{x+3} + a^8 \cdot x^3 - x^3 \cdot a^{2x} - a^{11} > 0$; $a^{2x}(a^3 - x^3) + a^8(x^3 - a^3) > 0$, $(a^3 - x^3)(a^{2x} - a^8) > 0$, $(a - x)(a^2 + ax + x^2)(a^{2x} - a^8) > 0$. Так как неполный квадрат $a^2 + ax + x^2$ принимает только положительные значения при рассматриваемых значениях x и a, то последнее неравенство равносильно неравенству
$(a - x)(a^{2x} - a^8) > 0$. $\quad$ (1)
Выражение в левой части (1) обращается в 0 при $x = a$ и при $x = 4$. Для нахождения решения неравенства (2) методом интервалов, выбора нужных значений параметра рассмотрим 3 случая, расставляя знаки на промежутках в соотвествии со свойством монотонности показательной функции.

1) $0 < a < 1$ (см. рис. 302). $x < a$; $x > 4$. Так как $x > 0$, то решение

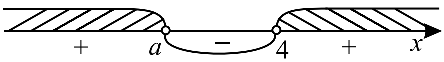


Рис. 302.

неравенства (1) в данном случае имеет вид: $0 < x < a$; $x > 4$. Это решение не удовлетворяет требованиям задачи — промежуток $(4; \infty)$ содержит бесконечно много натуральных чисел.

2) $1 < a \leqslant 4$ (см. рис. 303). Решением неравенства (1) являются числа

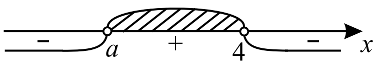


Рис. 303.

из промежутка $(a; 4)$. Условия $x > 0$, $x \neq 1$ выполняются. Так как $a > 1$, то на промежутке $(a; 4)$ может быть не более двух (2 и 3) натуральных чисел. Значит, при $1 < a \leqslant 4$ требования задачи не выполнены.

3) $a > 4$ (см. рис. 304). На промежутке $(4; a)$ условия $x > 0$, $x \neq 1$

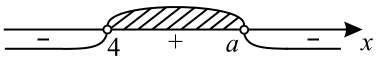


Рис. 304.

выполнены. Чтобы в этом промежутке содержались 3 натуральных числа $(5, 6, 7)$ должно выполняться условие $7 < a \leqslant 8$.

Ответ: $(7; 8]$.

1318. $y = \log_a\left(a^{\frac{1}{x-10}} - a^{\frac{ax}{12} + \frac{1}{x-10} - 2}\right)$. Область определения функции является решением неравенства $a^{\frac{1}{x-10}} - a^{\frac{ax}{12} + \frac{1}{x-10} - 2} > 0$. (1)
Так как a — основание логарифма, то должно выполняться условие $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения неравенства (1): $x \neq 10$. При этих ограничениях неравенство (1) равносильно неравенству: $a^{\frac{1}{x-10}}\left(1 - a^{\frac{ax}{12} - 2}\right) > 0$.
Так как $a^{\frac{1}{x-10}} > 0$, то $1 - a^{\frac{ax}{12} - 2} > 0$; $a^{\frac{ax}{12} - 2} < a^0$. (2)
Для решения неравенства (2) рассмотрим два случая:

1) $0 < a < 1$. Неравенство (2) равносильно неравенству: $\frac{ax}{12} - 2 > 0$; $\frac{ax}{12} > 2$; $x > \frac{24}{a}$. Для решения неравенства необходимо определить, не содержит ли промежуток $\left(-\frac{24}{a}; \infty\right)$ число 10 (см. область определения неравенства) и исключить его из решения. Для решения же поставленной в условии задачи этого делать не нужно, так как очевидно, что ни промежуток $\left(\frac{24}{a}; \infty\right)$, ни множество точек, полученное удалением из этого промежутка одной точки, требованиям задачи не удовлетворяют.

2) $a > 1$. Неравенство (2) равносильно неравенству: $\frac{ax}{12} - 2 < 0$, $x < \frac{24}{a}$. При наших значениях a промежуток $\left(-\infty; \frac{24}{a}\right)$ содержит однозначное натуральное число и не более одного двузначного: $1 < \frac{24}{a} \leqslant 12$. Промежуток будет содержать двузначное число 11, так как число 10 не входит в область определения функции. Решая последнее неравенство,

получим $2 \leqslant a < 24$.

Ответ: $[2; 24)$.

1319. $y = \sqrt[n]{(5n-6-x)^3 \cdot (2x-32+3n)^{7n-5}}$. Очевидно, решение поставленной задачи следует искать только для чётных значений $n \geqslant 2$. В этом случае область определения исходной функции есть множество решений неравенства: $(5n-6-x)^3 \cdot (2x-32+3n)^{7x-5} \geqslant 0$. Так как показатели степеней — нечётные натуральные числа, то последнее неравенство равносильно неравенству $(5n-6-x)(2x-32+3n) \geqslant 0$. (1)

Корни левой части: $x_1 = 5n-6$ и $x_2 = \dfrac{32-3n}{2}$. Выражение принимает неположительные значения на одном из промежутков $[x_1; x_2]$ или $[x_2; x_1]$. По условию задачи нужно найти такое чётное натуральное значение, чтобы расстояние между точками x_1 и x_2 равнялось n:

$$\left|5n-6-\frac{32-3n}{2}\right| = n;\ |13n-44| = 2n;\ 13n-44 = 2n;\ 11n = 44;\ n = 4.$$

Ответ: 4.

1320. Найдём сначала область определения функции. Функция определена, когда подкоренное выражение определено и неотрицательно, то есть

$$\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ \dfrac{\left(17x-66-x^2\right) \cdot 4\log_{625} 5^{\sqrt{x-3}}}{\sqrt{(x-5)^2}-8} \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{-(x-11)(x-6) \cdot \sqrt{x-3},}{|x-5|-8} \geqslant 0. \end{cases}$$

Определим промежутки знакопостоянства числителя и знаменателя дроби в левой части 2 — ого неравенства:

$-(x-11)(x-6) \geqslant 0, 6 \leqslant x \leqslant 11$. $-(x-11)(x-6) < 0$, $\left[\begin{array}{l} x < 6, \\ x > 11. \end{array}\right.$

$|x-5| > 8$, $\left[\begin{array}{l} x-5 > 8, \\ 5-x > 8; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x > 13, \\ x < -3. \end{array}\right.$ $|x-5| < 8$, $-8 < x-5 < 8$, $-3 < x < 13$.

Дробь положительна, когда числитель и знаменатель одного знака. Таким образом, $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{-(x-11)(x-6) \cdot \sqrt{x-3}}{|x-5|-8} \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \leqslant x \leqslant 6, \\ 11 \leqslant x < 13. \end{array}\right.$

$$\log_5^2 a - \frac{12}{\log_{5a} 125} + 10 = \log_5^2 a - \frac{4}{\log_{5a} 5} + 10 = \log_5^2 a - 4\log_5 5a + 10 =$$

$= \log_5^2 a - 4\log_5 a + 6$. Пусть $\log_5 a = t$, тогда первое число равно $(t+2)$, а второе — $\left(t^2-4t+6\right)$.

Найдём, при каких значениях t первое число принадлежит области определения данной функции:

$\left[\begin{array}{l}3 \leqslant t+2 \leqslant 6, \\ 11 \leqslant t+2<13;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}1 \leqslant t \leqslant 4, \\ 9 \leqslant t<11.\end{array}\right.$

Найдём, при каких значениях t второе число принадлежит области определения данной функции:

$\left[\begin{array}{ll}3 \leqslant t^2-4t+6 \leqslant 6, & (1) \\ 11 \leqslant t^2-4t+6<13; & (2).\end{array}\right.$

(1): $\left\{\begin{array}{l}t^2-4t+6 \geqslant 3, \\ t^2-4t+6 \leqslant 6;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}t^2-4t+3 \geqslant 0, \\ t^2-4t \leqslant 0;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}(t-1)(t-3) \geqslant 0, \\ t(t-4) \leqslant 0;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}t \leqslant 1, \\ t \geqslant 3,\end{array}\right. \\ 0 \leqslant t \leqslant 4;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 3 \leqslant t \leqslant 4.\end{array}\right.$

(2): $\left\{\begin{array}{l}t^2-4t+6 \geqslant 11, \\ t^2-4t+6<13;\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}t^2-4t-5 \geqslant 0, \\ t^2-4t-7<0;\end{array}\right.$

решая оба неравенства этой системы методом интервалов, получаем:

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}t \leqslant -1, \\ t \geqslant 5,\end{array}\right. \\ 2-\sqrt{11}<t<2+\sqrt{11};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2-\sqrt{11}<t \leqslant -1, \\ 5 \leqslant t<2+\sqrt{11}.\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}3 \leqslant t^2-4t+6 \leqslant 6, \\ 11 \leqslant t^2-4t+6<13;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 3 \leqslant t \leqslant 4, \\ 2-\sqrt{11}<t \leqslant -1, \\ 5 \leqslant t<2+\sqrt{11}.\end{array}\right.$

Значения t, при которых оба числа принадлежат области определения данной функции: $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 3 \leqslant t \leqslant 4, \\ 2-\sqrt{11}<t \leqslant -1, \\ 5 \leqslant t<2+\sqrt{11},\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}1 \leqslant t \leqslant 4, \\ 9 \leqslant t<11;\end{array}\right.\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}t=1, \\ 3 \leqslant t \leqslant 4.\end{array}\right.$

Вернемся к замене: $t=1$, $\log_5 a=1$, $a=5$. $3 \leqslant t \leqslant 4$, $3 \leqslant \log_5 a \leqslant 4$, $5^3 \leqslant a \leqslant 5^4$, $125 \leqslant a \leqslant 625$.

Ответ: $\{5\} \cup [125; 625]$.

1321. Уравнения касательных в точках x_0, x_1:

$y=(2x_0+b)(x-x_0)+x_0^2+bx_0+c$; $y=(-2x_1+3b)(x-x_1)-x_1^2+3bx_1+2c$.

Или $y=(2x_0+b)x-x_0^2+c$; $y=(-2x_1+3b)x+x_1^2+2c$;

$\left\{\begin{array}{l}2x_0+b=-2x_1+3b, \\ -x_0{}^2+c=x_1^2+2c.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x_0+x_1=b, \\ x_0^2+x_1^2=-c.\end{array}\right.$

1) $c>0$ касательных нет, $b=0$ годится. $b=0,\ c>0$.

2) $c=0 \Rightarrow b=0$, одна касательная, не годится.

3) $c < 0$ $x_1 = b - x_0$; $x_0^2 + x_0^2 + b^2 - 2bx_0 + c = 0$; $2x_0 - 2bx_0 + b^2 + c = 0$; $D = b^2 - 2b^2 - 2c = -b^2 - 2c$.

1) $D < 0$, нуль касательных $\Rightarrow$ $b = 0$. $-2c < 0$; $c > 0$ — противоречие.

2) $D = 0$, одна касательная $\Rightarrow$ $b = 1$. $-1 - 2c = 0$; $2c = -1$; $c = -\frac{1}{2}$.

$b = -1$; $c = -\frac{1}{2}$.

3) $D > 0$, две касательных $\Rightarrow$ $b = 2$. $-4 - 2c > 0$; $2c < -4$, $c < -2$. $b = 2$; $c < -2$.

Ответ: $b = 0; c > 0$. $b = 1; c = -\frac{1}{2}$. $b = 2; c < -2$.

1322. $a|x+2| - 4a + 1 \geqslant ax(x+4) + |x+2|$. Преобразуем неравенство к виду $a(x+2)^2 - (a-1)|x+2| - 1 \leqslant 0$. (1)

Заметим вначале, что для удовлетворения требований задачи нам нужно найти такие значения a, при которых во множество решений войдут числа $-4{,}8$ и 0 и некоторый промежуток слева от 0 (причем, не обязательно примыкающий к нулю), в котором можно будет поместить несколько точек, равномерно расположенных друг относительно друга (включая 0).

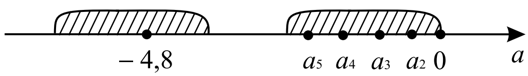


Рис. 305.

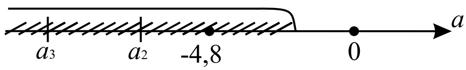


Рис. 306.

Например, рис. 305 или рис. 306. Здесь a_i — члены арифметической прогрессии, $a_1 = 0$. Ключевыми точками являются $x = -4{,}8$ и $x = 0$. Они должны входить в решение. Рассмотрим различные значения параметра a.

1) $a = 0$. Неравенство (1) в этом случае превращается в неравенство $|x+2| \leqslant 1$, решение которого $-3 \leqslant x \leqslant -1$. Ни 0, ни $-4{,}8$ не входят в это решение.

2) $a > 0$. Сделаем замену в (1) $|x+2| = t$, $t \geqslant 0$, имея в виду, что $(x+2)^2 = |x+2|^2$: $f(t) = at^2 - (a-1)t - 1 \leqslant 0$. (2)

Когда $x = 0$, $t = 2$. Когда $x = -4{,}8$, $t = 2{,}8$. Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх (см. рис. 307).

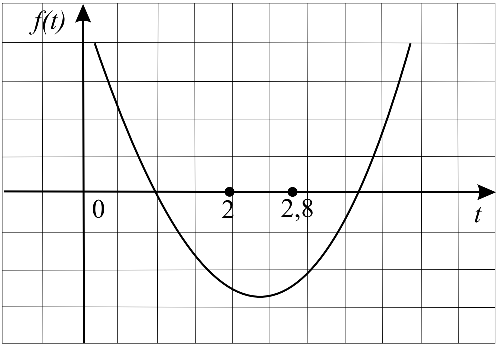


Рис. 307.

Следовательно, должны одновременно выполняться неравенства:

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(2) \leqslant 0, \\ f(2{,}8) \leqslant 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + 4a > 0, \\ 4a - 2(a-1) - 1 \leqslant 0, \\ 7{,}84a - 2{,}8(a-1) - 1 \leqslant 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+1)^2 > 0, \\ a \leqslant -\dfrac{1}{2}, \\ a \leqslant -\dfrac{5}{14}. \end{cases}$$

Учитывая $a > 0$, в этом случае нет значений a, удовлетворяющих условию задачи.

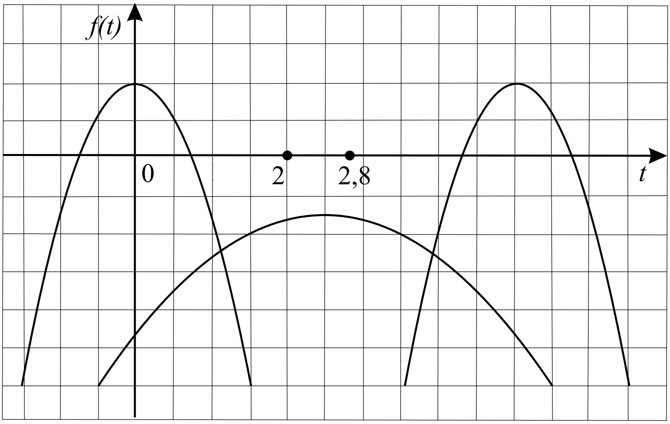


Рис. 308.

3) $a < 0$, $a \neq -1$. В этом случае парабола $y = f(t)$ имеет вид (см. рис. 308). То есть,

$$\begin{cases} f(2) \leqslant 0, \\ f(2{,}8) \leqslant 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leqslant -\dfrac{1}{2}, \\ a \leqslant -\dfrac{5}{14}; \end{cases} \Rightarrow a \leqslant -\dfrac{1}{2}.$$ Это даёт, $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right]$.

Объединяя решение случаев 1) – 3), получим $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right]$. Остается открытым вопрос, что делать со значением $a = -1$, где $D = 0$. Подставим $a = -1$ в неравенство (2). Получим: $t^2 - 2t + 1 \geqslant 0$; $(t-1)^2 \geqslant 0$. Это верно для всех значений t. Значит, $a = -1$ входит в решение.

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right]$.

1323. $|\log_2(|x-6|-a)| - a < 0; \log_a(|x-6|-a)| < a.$ (1)
Решение неравенства может существовать, если $a > 0$. Область определения неравенства задается условием $|x-6| > a$. (3)
Неравенство (1) равносильно неравенству $-a < \log_2(|x-6|-a) < a$; $\log_2 2^a$. По свойству монотонности логарифма функции с основанием 2 получим
$2^{-a} < |x-6| - a < 2^a$; $a + 2^{-a} < |x-6| < a + 2^a$. (4).
Очевидно, что условие (3) соблюдено.
Замечание. Для удовлетворения требований задачи нужно найти такие значения a, при которых во множестве решений неравенства (4) содержится число $9\frac{1}{8}$ и некоторый промежуток $[0;\ \varepsilon]$, в котором всегда можно будет расположить k членов арифметической прогрессии a_n $(a_1 = 0)$ с разностью $\dfrac{\varepsilon}{k-1}$. При $x < 6$ неравенство (4) равносильно неравенству $a + 2^{-a} < -x + 6 < a + 2^a$; $6 - a - 2^a < x < 6 - a - 2^{a-1}$. При $x \geqslant 6$: $a + 2^{-a} < x - 6 < a + 2^a$; $a + 6 + 2^{-a} < x < a + 6 + 2^a$. Естественно потребовать, чтобы в промежутке $(6 - a - 2^a;\ 6 - a - 2^{-a})$ содержался некоторый отрезок $[0;\ \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$, а промежутку $(a + 6 + 2^{-a};\ a + 6 + 2^a)$ принадлежало число $9\frac{1}{8}$. Это достигается, если выполняются условия:

$$\begin{cases} 6 - a - 2^a < 0, \\ 6 - a - 2^{-a} > 0, \\ a + 6 + 2^{-a} < 9\dfrac{1}{8}, \\ a + 6 + 2^a > 9\dfrac{1}{8}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-a} < 6 - a < 2^a, \\ 2^{-a} < 3\dfrac{1}{8} - a < 2^a. \end{cases} \qquad (5)$$

Решим графически систему (5). На координатной плоскости Oay построим графики функций $y = 2^a$, $y = 2^{-a}$, $y = 6^{-a}$, $y = 3\frac{1}{8} - a$. Напомним, что рассматриваются значения $a > 0$ (рис. 309).

Все рассматриваемые функции, относятся к элементарным. Их свойства

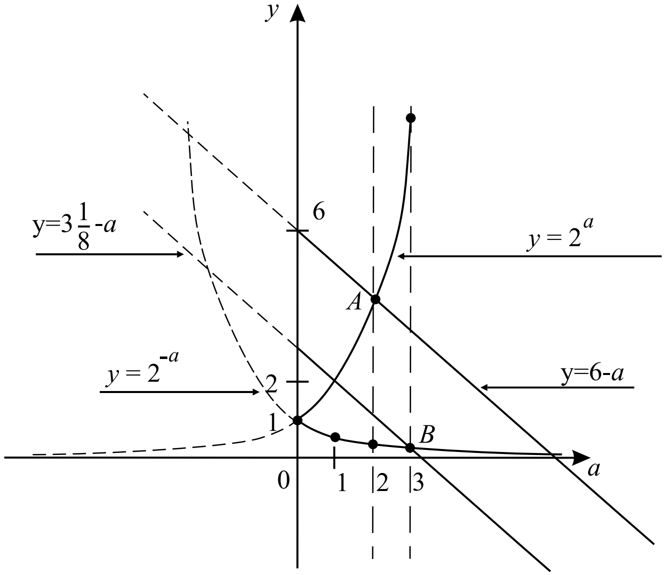


Рис. 309.

известны (в том числе свойства монотонности). В первой координатной четверти каждая из прямых по одному разу пересекает графики $y = 2^a$ и $y = 2^{-a}$. При этом графики $y = 2^a$ и $y = 6 - a$ пересекаются в точке $A(2;\ 4)$. Ее координаты легко определяются подбором. Графики функции $y = 2^{-a}$ и $y = 3\frac{1}{8} - a$ пересекаются в точке $B(3;\ \frac{1}{8})$, что также нетрудно установить. В соответствии с условиями системы (5) находятся значения отрезка обеих прямых, заключенных между графиками функций $y = 2^a$ и $y = 2^{-a}$. Очевидно, что это $x_a < a < x_b$, то есть $2 < a < 3$.

Ответ: (2; 3).

1324. $x + 4a > 5\sqrt{ax}$. (1)

Убедимся в самом начале, что значение $a = 0$ не удовлетворяет требованиям задачи. При $a = 0$ неравенство имеет вид: $x > 0$. В этот промежуток не входит никакого числа, которое можно принять за первый член прогрессии — по условию он должен быть меньше a, то есть меньше 0. Решим неравенство (1) при $a \neq 0$. Неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x + 4a > 0, \\ ax \geqslant 0, \\ (x+4a)^2 > 25ax; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4a, \\ ax \geqslant 0, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0; \end{cases} \quad (2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -4a, \\ ax \geqslant 0, \\ (x-a)(x-16a) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим два случая.

1) $a < 0$, тогда система принимает вид $\begin{cases} x > -4a, \\ x \leqslant 0, \\ x < 16a,\ x > a. \end{cases}$

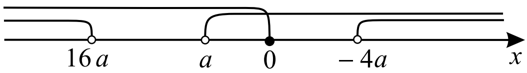


Рис. 310.

Система решений не имеет (см. рис. 310).

2) $a > 0$. В этом случае: $\begin{cases} x > -4a, \\ x \geqslant 0, \\ x < a,\ x > 16a. \end{cases}$

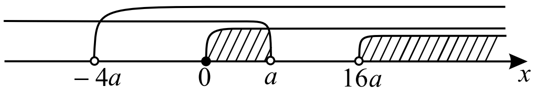


Рис. 311.

Итак, при $a > 0$ решение неравенства: $[0;\ a) \cup (16a;\ \infty)$.

В промежутке $[0;\ a)$ найдется число $a_1 < a$, которое может быть первым членом прогрессии. Для попадания следующего члена прогрессии в промежуток $(16a;\ \infty)$ нужно, чтобы расстояние между точками 0 и $16a$ было меньше разности прогрессии, то есть $16a - a < 225$; $15a < 225$; $a < 15$.

Таким образом, условиям задачи удовлетворяют значения параметра $0 < a < 15$.

Ответ: $(0;\ 15)$.

1326. ОДЗ: $\begin{cases} x-3>0,\ x-3\neq 1,\\ 2x+1>0,\ 2x+1\neq 1,\\ 3x+1>0,\ 3x+1\neq 1,\\ x^2>0,\\ 6{,}2x-8{,}4>0. \end{cases} \Rightarrow x>3, x\neq 4.$

Решим неравенство

$\Big(\log_{x-3}(2x+1)\Big)\Big(\log_{2x+1}x^2\Big) \geqslant \Big(\log_{x-3}(3x+1)\Big)\Big(\log_{3x+1}(6{,}2x-8{,}4)\Big).$

Для $x\in$ ОДЗ данное неравенство равносильно неравенству $\log_{x-3}x^2 \geqslant \log_{x-3}(6{,}2x-8{,}4)$. Рассмотрим два случая.

1) $x-3>1$. Тогда так как логарифм с основанием большим единицы — возрастающая функция, то $\begin{cases} \log_{x-3}x^2 \geqslant \log_{x-3}(6{,}2x-8{,}4),\\ x-3>1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x^2-6{,}2x+8{,}4\geqslant 0,\\ x>4. \end{cases}$ $x_{1,2}=3{,}1\pm\sqrt{9{,}61-8{,}4}=3{,}1\pm 1{,}1\Rightarrow x_1=2$, $x_2=4{,}2$. Поэтому $\begin{cases} x^2-6{,}2x+8{,}4\geqslant 0,\\ x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4{,}2)\geqslant 0,\\ x>4 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x\in(-\infty;2]\cup[4{,}2;+\infty),\\ x>4 \end{cases} \Rightarrow x\in[4{,}2;+\infty)\subset$ ОДЗ.

2) $0<x-3<1$. Тогда так как логарифм с основанием меньшим единицы — убывающая функция, то $\begin{cases} \log_{x-3}x^2 \geqslant \log_{x-3}(6{,}2x-8{,}4),\\ 0<x-3<1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6{,}2x+8{,}4\leqslant 0,\\ 3<x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4{,}2)\leqslant 0,\\ 3<x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[2;4{,}2],\\ 3<x<4 \end{cases}$ $\Rightarrow x\in(3;4)\subset$ ОДЗ.

Объединяя решения в случаях 1) и 2), получаем, что данное в условии неравенство имеет решение $x\in(3;4)\cup[4{,}2;+\infty)$. Пусть $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия, удовлетворяющая требованиям задачи. Пусть a — её первый член, а $d(>0)$ — её разность. Если только первый и четвертый член этой прогрессии не являются решениями исходного неравенства, то есть не входят во множество $(3;4)\cup[4{,}2;+\infty)$, то это означает выполнение системы неравенств $\begin{cases} a_1\leqslant 3,\\ 3<a_2<4,\\ 3<a_3<4,\\ 4\leqslant a_4<4{,}2,\\ a_5\geqslant 4{,}2, \end{cases}$ $\begin{cases} a\leqslant 3,\\ 3<a+d<4,\\ 3<a+2d<4,\\ 4\leqslant a+3d<4{,}2,\\ a+4d\geqslant 4{,}2. \end{cases}$

$$\begin{cases} a \leqslant 3, \\ 3-a < d < 4-a, \\ \dfrac{3-a}{2} < d < \dfrac{4-a}{2}, \\ \dfrac{4-a}{3} \leqslant d < \dfrac{4{,}2-a}{3}, \\ d \geqslant \dfrac{4{,}2-a}{4}. \end{cases}$$

Найдём те значения $a \leqslant 3$, при которых система неравенств $\begin{cases} 3-a < d < 4-a, \\ \dfrac{3-a}{2} < d < \dfrac{4-a}{2}, \\ \dfrac{4-a}{3} \leqslant d < \dfrac{4{,}2-a}{3}, \\ \dfrac{4{,}2-a}{4} \leqslant d \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение относительно d, а это выполняется когда

$\max\{3-a, \dfrac{3-a}{2}, \dfrac{4-a}{3}, \dfrac{4{,}2-a}{4}\} < \min\{4-a, \dfrac{4-a}{2}, \dfrac{4{,}2-a}{3}\}$. Так как $4-a > \dfrac{4-a}{2}$ при $a \leqslant 3$, $3-a \geqslant \dfrac{3-a}{2}$ при $a \leqslant 3$, $\dfrac{4-a}{3} - \dfrac{4{,}2-a}{4} = \dfrac{3{,}4-a}{12} > 0$ при $a \leqslant 3$, $\dfrac{4-a}{2} - \dfrac{4{,}2-a}{3} = \dfrac{3{,}6-a}{6} > 0$ при $a \leqslant 3$, то $\max\{3-a, \dfrac{3-a}{2}, \dfrac{4-a}{3}, \dfrac{4{,}2-a}{4}\} < \min\{4-a, \dfrac{4-a}{2}, \dfrac{4{,}2-a}{3}\} \Leftrightarrow \max\{3-a, \dfrac{4-a}{3}\} < \dfrac{4{,}2-a}{3}$ при $a \leqslant 3$. Последнее неравенство равносильно системе $\begin{cases} \dfrac{4{,}2-a}{3} > \dfrac{4-a}{3}, \\ \dfrac{4{,}2-a}{3} > 3-a, \end{cases}$ $\begin{cases} 0{,}2 > 0, \\ 2a > 4{,}8, \end{cases}$ $a > 2{,}4$. Таким образом, множество возможных значений первого члена арифметической прогрессии — $(2{,}4; 3]$.

Ответ: $(2{,}4; 3]$.

1327. Преобразуем неравенство $5a > 4x + 2a\sqrt{5a-4x} + 3a^2$.
$5a - 4x - 2a\sqrt{5a-4x} - 3a^2 > 0$, $(\sqrt{5a-4x})^2 - 2a\sqrt{5a-4x} - 3a^2 > 0$.
Сделаем замену $t = \sqrt{5a-4x} \geqslant 0$. Тогда неравенство примет вид
$t^2 - 2at - 3a^2 > 0$. $t_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2+3a^2} = a \pm 2a \Rightarrow t_1 = -a$, $t_2 = 3a$.

Следовательно, $t^2-2at-3a^2>0 \Leftrightarrow (t+a)(t-3a)>0$. Рассмотрим два случая $a \geqslant 0$ и $a<0$.

1) $a \geqslant 0$. Тогда $3a \geqslant 0 \geqslant -a$. Поэтому решением неравенства $(t+a)(t-3a)>0$ является промежуток $(-\infty;-a)\cup(3a;+\infty)$. Учитывая, что $t \geqslant 0$, получаем, что $t>3a$. Вернемся к переменной x: $\sqrt{5a-4x}>3a$ $\Leftrightarrow 5a-4x>9a^2 \Rightarrow x<\dfrac{5a-9a^2}{4}$. Так как не менее одного члена, но не более девяти членов арифметической прогрессии с первым членом, равным $-|a|-4{,}5$, и разностью прогрессии, равной $0{,}5$, являются решением исходного неравенства, то в силу вида решения при $a>0$: $\left(-\infty;\dfrac{5a-9a^2}{4}\right)$, требование задачи равносильно одновременному выполнению двух условий: первый член прогрессии, равный $-|a|-4{,}5=-a-4{,}5$, принадлежит промежутку $\left(-\infty;\dfrac{5a-9a^2}{4}\right)$, десятый член прогрессии, равный $-|a|-4{,}5+9\cdot 0{,}5=-a$ не принадлежит промежутку $\left(-\infty;\dfrac{5a-9a^2}{4}\right)$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} -a-4{,}5<\dfrac{5a-9a^2}{4}, \\ \dfrac{5a-9a^2}{4}\leqslant -a, \\ a\geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{9a^2-9a-18}{4}<0, \\ \dfrac{9a^2-9a}{4}\geqslant 0, \\ a\geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-a-2<0, \\ a^2-a\geqslant 0, \\ a\geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-2)(a+1)<0, \\ a(a-1)\geqslant 0, \\ a\geqslant 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a\in(-1;2), \\ a\in(-\infty;0]\cup[1;+\infty), \\ a\geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow a\in\{0\}\cup[1;2).$$

2) $a<0$. Тогда $3a<0<-a$. Поэтому решением неравенства $(t+a)(t-3a)>0$ является промежуток $(-\infty;3a)\cup(-a;+\infty)$. Учитывая, что $t\geqslant 0$, получаем, что $t>-a$. Вернемся к переменной x: $\sqrt{5a-4x}>-a$ $\Leftrightarrow 5a-4x>a^2 \Rightarrow x<\dfrac{5a-a^2}{4}$. Так как не менее одного члена, но не более девяти членов арифметической прогрессии с первым членом, равным $-|a|-4{,}5$, и разностью прогрессии, равной $0{,}5$, являются решением исходного неравенства, то в силу вида решения при $a<0$: $\left(-\infty;\dfrac{5a-a^2}{4}\right)$, требование задачи равносильно одновременному выполнению двух условий: первый член прогрессии, равный

$-|a|-4{,}5 = a-4{,}5$, принадлежит промежутку $\left(-\infty;\, \dfrac{5a-a^2}{4}\right)$, десятый член прогрессии, равный $-|a|-4{,}5+9\cdot 0{,}5 = a$ не принадлежит промежутку $\left(-\infty;\, \dfrac{5a-a^2}{4}\right)$. Таким образом, получаем систему $\begin{cases} a-4{,}5 < \dfrac{5a-a^2}{4}, \\ \dfrac{5a-a^2}{4} \leqslant a, \\ a<0, \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{a^2-a-18}{4} < 0, \\ \dfrac{a^2-a}{4} \geqslant 0, \\ a<0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2-a-18<0, \\ a^2-a \geqslant 0, \\ a<0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(a-\dfrac{1-\sqrt{73}}{2}\right)\left(a-\dfrac{1+\sqrt{73}}{2}\right) < 0, \\ a(a-1) \geqslant 0, \\ a<0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a \in \left(\dfrac{1-\sqrt{73}}{2};\, \dfrac{1+\sqrt{73}}{2}\right), \\ a \in (-\infty;0] \cup [1;+\infty), \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \left(\dfrac{1-\sqrt{73}}{2};0\right).$$

Объединяя случаи 1) и 2), приходим к окончательному ответу $a \in \left(\dfrac{1-\sqrt{73}}{2};0\right] \cup [1;2)$.

Ответ: $\left(\dfrac{1-\sqrt{73}}{2};0\right] \cup [1;2)$.

1328. План решения:

1) Найдём ОДЗ.

2) Решим исходное неравенство.

3) Выпишем условия на d и a, где a — первый член прогрессии.

4) Получим ограничения на d и приведем примеры арифметических прогрессий с такими разностями.

1) ОДЗ: $\begin{cases} 6-x \geqslant 0, \\ \log_3 x - 2 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant 6, \\ x \neq 9; \end{cases} \quad x \leqslant 6.$

2) $\dfrac{(2^{2x}-5\cdot 2^x+4)(\log_2 x-2)}{\log_3 x-2} \leqslant 0;$

$\dfrac{(2^x-1)(2^x-4)(\log_2 x-2)}{\log_3 x-2} \leqslant 0$. Решаем методом интервалов (см. рис. 312).

Учитывая ОДЗ, получаем $[0;2]\cup[4;6]$.

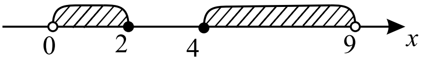


Рис. 312.

3) Пусть a — первый член арифметической прогрессии. Тогда условия на прогрессию эквивалентны следующим неравенствам для a и d: $d>0$; $a\geqslant 0$; $a+d\leqslant 2$; $a+2d>2$; $a+3d<4$; $a+4d\geqslant 4$; $a+5d\leqslant 6$; $a+6d>6$.

4) $\begin{cases} a\geqslant 0,\\ a+5d\leqslant 6;\end{cases}$ откуда $d\leqslant\dfrac{6}{5}$. $\begin{cases} a+d\leqslant 2,\\ a+6d>6;\end{cases}$ откуда $d>\dfrac{4}{5}$. Теперь покажем, что эти ограничения на d являются достаточными.

При $1<d\leqslant\dfrac{6}{5}$ положим $a=0$. Легко видеть, что прогрессия $a, a+d, \dots,$ $a+kd, \dots$ удовлетворяет неравенствам из пункта 3).

При $\dfrac{4}{5}<d\leqslant 1$ положим $a=2-d$. Легко видеть, что прогрессия $a, a+d,$ $\dots, a+kd, \dots$ также удовлетворяет неравенствам из пункта 3).

Примечание: При оформлении решения для нахождения множества возможных значений d мы не выписывали все неравенства, которым должны удовлетворять члены данной прогрессии (из соображений большей прозрачности решения), а сразу выбрали те из них, которые дают самые «сильные» ограничения на значения параметра d.

Ответ: $\dfrac{4}{5}<d\leqslant\dfrac{6}{5}$.

1329. $y=x^2-(a+6)|x|+6a\leqslant 0.\quad(1)$
Обозначим $|x|=t,\ t\geqslant 0$, тогда $x^2=|x|^2=t^2$. Запишем неравенство (1) в новой переменной $t^2-(a+6)t+6a\leqslant 0,\ t\geqslant 0.\quad(2)$
Для решения квадратного неравенства методом интервалов найдем корни трёхчлена $t^2-(a+6)t+6a=0$. $D=a^2+12a+36-24a=(a-6)^2$; $t_{1,2}=\dfrac{a+6\pm(a-6)}{2}$; $t_1=a,\ t_2=6$. Или по теореме, обратной теореме Виета, корни: a и 6. В зависимости от значения a решение неравенства (2) будет иметь вид либо $a\leqslant t\leqslant 6$, либо $6\leqslant t\leqslant a$. Рассмотрим все возможные значения a, осуществим переход к переменной x и выберем значения параметра, отвечающие требованиям задачи.
1) Пусть $a<0$, тогда с учетом условия $t\geqslant 0$ получим $0\leqslant t\leqslant 6$, $0\leqslant|x|\leqslant 6$, $-6\leqslant x\leqslant 6$. В этот промежуток можно поместить все

члены данной последовательности a_n. Действительно, так как по условию знаменатель прогрессии b_n положителен, то $0 < b_n < 7{,}5$. Тогда
$-6 < -6 + b_n \leqslant 1{,}5$, то есть $-6 < a_n \leqslant 1{,}5$. Таким образом, требования задачи удовлетворены при $a < 0$.
2) Пусть $0 \leqslant a < 6$, тогда решение неравенства (2) имеет вид $a \leqslant t \leqslant 6$. Следовательно, $a \leqslant |x| \leqslant 6$ или $-6 \leqslant x \leqslant -a,\ a \leqslant x \leqslant 6$.
Первый член последовательности $a_1 = -6 + 7{,}5 = 1{,}5$ должен попасть в один из этих промежутков, очевидно во второй. Поэтому $a \leqslant 1{,}5$. Таким образом, $0 \leqslant a \leqslant 1{,}5$. В этом случае подбором значения знаменателя прогрессии q можно добиться, чтобы остальные члены последовательности содержались в промежутке $[-6; -a]$. Действительно, потребуем чтобы a_2 принадлежало этому промежутку: $-6 \leqslant -6 + 7{,}5q \leqslant -a$, откуда $0 < q \leqslant \dfrac{2(b-a)}{15}$. Заметим, так как $0 \leqslant a \leqslant 1{,}5$, то $\dfrac{3}{5} \leqslant \dfrac{2(6-a)}{15} \leqslant \dfrac{4}{5}$, что удовлетворяет требованию $|q| < 1$. Покажем, хотя это достаточно очевидно, что a_n при $n > 2$ также будут содержаться в промежутке $[-6; -a]$. Если $-6 \leqslant a_n \leqslant -a$, то $0 \leqslant b_n \leqslant 6 - a$. Умножим последнее неравенство на $n - 2 > 0,\ \ n > 2$. Получим $0 \leqslant b_n \leqslant (6-a)q^{n-2}$ или $-6 \leqslant -6 + b_n \leqslant (6-a)q^{n-2} - 6$. Число $(6-a)q^{n-2} - 6$ для любого $n > 2$ меньше $-a$, так как их разность отрицательна,
$(6-a)q^{n-2} - 6 - (-a) = (q^{n-2} - 1)(6-a) < 0$. Первый множитель отрицателен, а второй положителен ($0 < q < 1$, $0 \leqslant a \leqslant 1{,}5$). Таким образом, при $0 \leqslant a \leqslant 1{,}5$ требования задачи могут быть удовлетворены.
3) Пусть $a \geqslant 6$. Решение неравенства (2) имеет вид $6 \leqslant t \leqslant a$. Тогда $6 \leqslant |x| \leqslant a$, $-a \leqslant x \leqslant -6$ или $6 \leqslant x \leqslant a$. Ни один из этих промежутков не содержит $a_1 = 1{,}5$.
Суммируя результаты п. $1-3$ получаем, что $a \leqslant 1{,}5$.

Ответ: $(-\infty; 1{,}5]$.

1330. $(x-2)^2 - (a+2)|x-2| + 2a \leqslant 0.\qquad (1)$
Обозначим $|x-2| = t$, $t > 0$. $(x-2)^2 = |x-2|^2 = t^2$, тогда неравенство примет вид:
$f(t) = t^2 - (a+2)t + 2a \leqslant 0, t \geqslant 0.\qquad (2)$
Решения исходного неравенства (1) должны содержать все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 2,9 и положительным знаменателем. То есть должны содержать промежуток
$x \in (0;\ 2{,}9]$. Так как мы обозначили $|x-2| = t$, то $t \in [0{,}9;\ 2)$. Итак, задача свелась к следующей: надо отыскать все a, такие что решения нера-

венства (2) содержат и все значения $t \in [0{,}9;\ 2)$. Это возможно только когда: $D > 0$; $f(0{,}9) \leqslant 0$; $f(2) \leqslant 0$. То есть должна выполняться система неравенств:

$$\begin{cases} D = (a+2)^2 - 4\cdot 2a = (a-2)^2 > 0, \\ f(2) = 4 - 2(a+2) + 2a \leqslant 0, \\ f(0{,}9) = 0{,}81 - 0{,}9(a-2) + 2a \leqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2, \\ 0 \leqslant 0, \\ 1{,}1a \leqslant 0{,}99; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2, \\ a \leqslant 0{,}9. \end{cases}$$

Значит, при $a \leqslant 0{,}9$ будут выполняться все условия задачи.

Ответ: $(-\infty;\ 0{,}9]$.

1331. $x(x-10) \leqslant (a+5)(|x-5|-5)$. Преобразуем неравенство:
$x^2 - 10x + 25 - (a+5)|x-5| + 5a \leqslant 0$,
$(x-5)^2 - (a+5)|x-5| + 5a \leqslant 0$. (1)
Для решения неравенства (1) используем введение новой переменной:
$|x-5| = t;\ t \geqslant 0$. Тогда получим $t^2(a+5)t + 5a \leqslant 0$. (2)
Очевидно, корнями квадратного трёхчлена в левой части (2) будут числа a и 5. Тогда, в зависимости от величины a, решением неравенства (2) может быть $a \leqslant t \leqslant 5$ или $5 \leqslant t \leqslant a$. В первом случае необходимо помнить об ограничении $t \geqslant 0$. Используем полученные результаты для записи решения неравенства (1) и выберем значения параметра, отвечающие требованиям задачи. Возможны 3 случая.
1) $a \leqslant 0$, тогда $a \leqslant t \leqslant 5$. Но так как $t \geqslant 0$, то получаем $0 \leqslant t \leqslant 5$. Для переменной x получим: $|x-5| \leqslant 5$; $0 \leqslant x \leqslant 10$. Этот промежуток удовлетворяет требованиям задачи, так как содержит число 9,8 — первый член прогрессии и, очевидно, все остальные члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительным знаменателем.
2) $0 < a < 5$. В этом случае $a \leqslant t \leqslant 5$; $a \leqslant |x-5| \leqslant 5$. Для переменной x получим два непересекающихся промежутка: $0 \leqslant x \leqslant 5-a$ и $a+5 \leqslant x \leqslant 10$. Второй промежуток содержит число 9,8 при условии $a+5 \leqslant 9{,}8$, то есть $a \leqslant 4{,}8$. Подбором знаменателя прогрессии можно убедиться, что все остальные члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии будут содержаться в промежутке $[0; 5-a]$. Для этого достаточно потребовать, чтобы $a_2 = 9{,}8\cdot q$ попало в этот промежуток. $0 \leqslant 9{,}8q \leqslant 5-a$, то есть $q \leqslant \dfrac{5-a}{9{,}8}$. Очевидно, что $\dfrac{5-a}{9{,}8} < 1$ при $0 < a \leqslant 4{,}8$. Все остальные члены прогрессии будут располагаться между 0 и a_2.
3) $a \geqslant 5$; $5 \leqslant t \leqslant a$; $5 \leqslant |x-5| \leqslant a$. Получаем для переменной x: $5-a \leqslant x \leqslant 0$ и $10 \leqslant x \leqslant x+5$. Ни в одном из этих промежутков не могут быть расположены члены прогрессии с заданными свойствами. В

итоге объединяем результаты, полученные в п. 1) − 2): $a \leqslant 4{,}8$.

Ответ: $(-\infty; 4{,}8]$.

1332. Пусть $b = b_1$ — первый член, а x — знаменатель указанной прогрессии, $0 < x < 1$. $b_1, b_2 \notin \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{7}\right)$, так как в противном случае $b_4 \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{7}\right)$ и поэтому $b_3 \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{9}\right)$, что не так. Так что $b_1, b_2 \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$, то есть $\frac{1}{3} < b < 1$, $\frac{1}{3} < bx < 1$.

Если $b_4 \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$, то и $b_3 \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$, что не так $\Rightarrow$ $b_4 \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{7}\right)$, то есть $\frac{1}{9} < bx^3 < \frac{1}{7}$.

Тогда $b_3 \in \left[\frac{1}{7}; \frac{1}{3}\right]$, то есть $\frac{1}{7} \leqslant bx^2 \leqslant \frac{1}{3}$. $b_5 \in \left(0; \frac{1}{9}\right]$, то есть $0 < bx^4 \leqslant \frac{1}{9}$.

Теперь переформулируем задачу в эквивалентную ей: «Найдите все значения параметра b, $\frac{1}{3} < b < 1$, при которых система неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{3} < bx < 1, \\ \frac{1}{7} \leqslant bx^2 \leqslant \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{9} < bx^3 < \frac{1}{7}, \\ bx^4 \leqslant \frac{1}{9}; \end{cases}$$

имеет решение на промежутке $(0; 1)$».

Система равносильна такой: $\begin{cases} bx^2 \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ bx^3 < \dfrac{1}{7}, \\ bx^4 \leqslant \dfrac{1}{9}, \\ bx > \dfrac{1}{3}, \\ bx^2 \geqslant \dfrac{1}{7}, \\ bx^3 > \dfrac{1}{9}. \end{cases}$

Решаем ее. $\begin{cases} x^2 \leqslant \dfrac{1}{3b}, \\ x^3 < \dfrac{1}{7b}, \\ x^4 \leqslant \dfrac{1}{9b}, \\ x > \dfrac{1}{3b}, \\ x^2 \geqslant \dfrac{1}{7b}, \\ x^3 > \dfrac{1}{9b}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3b}}, \\ x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{7b}}, \\ x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[4]{9b}}, \\ x > \dfrac{1}{3b}, \\ x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{7b}}, \\ x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{9b}}; \end{cases}$

1. Найдём наименьшее из чисел: $\dfrac{1}{\sqrt{3b}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7b}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[4]{9b}}$, учитывая, что $\dfrac{1}{3} < b < 1$.

1.1) Решим неравенство $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \dfrac{1}{\sqrt{3b}}$. $\sqrt[3]{7b} > \sqrt{3b}$, $7^2b^2 > 3^3b^3$, $b < \dfrac{49}{27} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \dfrac{1}{\sqrt{3b}}$ на промежутке $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

1.2) Решим неравенство $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \dfrac{1}{\sqrt[4]{9b}}$. $\sqrt[3]{7b} > \sqrt[4]{9b}$, $7^4b^4 > 9^3b^3$,

$b > \dfrac{9^3}{7^4}$. Так как $\dfrac{9^3}{7^4} < \dfrac{1}{3}$, то на промежутке $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7b}} < \dfrac{1}{\sqrt[4]{9b}}$. Таким образом подсистема, состоящая из трёх первых неравенств последней подсистемы, равносильна неравенству $x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{7b}}$.

2. Найдём наибольшее из чисел $\dfrac{1}{3b}$, $\dfrac{1}{\sqrt{7b}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9b}}$ на промежутке $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

2.1) Решим неравенство $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9b}} > \dfrac{1}{\sqrt{7b}}$. $\sqrt[3]{9b} < \sqrt{7b}$, $81b^2 < 7^3b^3$, $b > \dfrac{81}{343}$. Так как $\dfrac{81}{343} < \dfrac{1}{3}$, то $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9b}} > \dfrac{1}{\sqrt{7b}}$ на промежутке $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

2.2) Решим неравенство $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9b}} \geqslant \dfrac{1}{3b}$. $\sqrt[3]{9b} \leqslant 3b$, $9b \leqslant 27b^3$, $b^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$, $b \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Так как $\dfrac{1}{3} < \dfrac{\sqrt{3}}{3} < 1$, то:

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{9b}}$ — наибольшее число на промежутке $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};1\right)$;

$\dfrac{1}{3b}$ — наибольшее число на промежутке $\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

То есть подсистема, состоящая из трёх последних неравенств последней системы равносильна неравенству: $x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{9b}}$ на промежутке $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};1\right)$; $x > \dfrac{1}{3b}$ на промежутке $\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Рассмотрим два случая.

I. $b \in \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};1\right)$. Исходная система неравенств равносильна системе $\begin{cases} x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{7b}}, \\ x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{9b}}; \end{cases}$ которая имеет решения тогда и только тогда, когда $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9b}} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{7b}}$. Решаем это неравенство. $9b > 7b$, $b > 0$ $\Rightarrow$ условию задачи в этом случае удовлетворяют все $b \in \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3};1\right)$.

II. $b \in \left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Исходная система неравенств равносильна системе $\begin{cases} x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{7b}}, \\ x > \dfrac{1}{3b}; \end{cases}$ которая имеет решения тогда и только тогда, когда $\dfrac{1}{3b} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{7b}}$. Решаем это неравенство. $3b > \sqrt[3]{7b}$, $27b^3 > 7b$, $b^2 > \dfrac{7}{27}$, $b > \dfrac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$, $b > \dfrac{\sqrt{21}}{9}$. Так как $\dfrac{1}{3} < \dfrac{\sqrt{21}}{9} < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, то в этом случае условию задачи удовлетворяют все $b \in \left[\dfrac{\sqrt{21}}{9}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Объединяя случаи I и II получаем $b \in \left(\dfrac{\sqrt{21}}{9}; 1\right)$.

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{21}}{9}; 1\right)$.

1333. Рассмотрим $\triangle ABC$ (см. рис. 313).

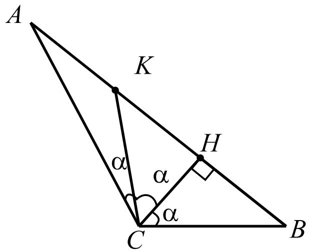


Рис. 313.

В $\triangle KCB$ высота CH является также биссектрисой, значит $\triangle KCB$ равнобедренный, CH — медиана и $KH = HB = \dfrac{1}{4}AB$. В $\triangle ACH$ CK — биссектриса, тогда $\dfrac{CH}{AC} = \dfrac{KH}{AK} = \dfrac{1}{2}$, $CH = \dfrac{1}{2}AC$ и $\triangle ACH$ — прямоугольный с гипотенузой AC, тогда $\angle HAC = 30^\circ$, $\angle ACH = 60^\circ$, $2\alpha = 60^\circ$ $\Rightarrow$ $\alpha = 30^\circ$.

Итак, $\triangle ABC$ — прямоугольный с гипотенузой AB и острым углом 30° (см. рис. 314).

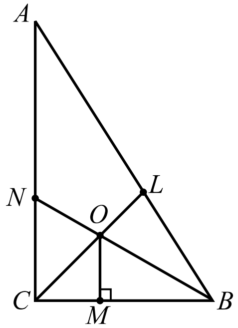


Рис. 314.

Пусть O — центр вписанной окружности $\triangle ABC$, CL и BN — биссектрисы. $OM = r$ — радиус вписанной окружности $\triangle ABC$.

$\angle OCM = 45^\circ$, тогда $CM = OM = r$, $OC = r\sqrt{2}$, откуда $r = \dfrac{3\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} =$
$= \dfrac{3}{\sqrt{3}+1}$. $\angle OBM = \dfrac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$, тогда $BM = OM\sqrt{3} = r\sqrt{3}$, $BC = r + r\sqrt{3} = r(\sqrt{3}+1)$, $AC = BC\sqrt{3} = r\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BC = \dfrac{1}{2}\cdot r^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9\sqrt{3}}{(\sqrt{3}+1)^2}\cdot(\sqrt{3}+1)^2 =$
$= 4{,}5\sqrt{3}$.

Ответ: $4{,}5\sqrt{3}$.

1335. $\begin{cases} S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC}, \\ S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC\cdot BC; \end{cases}$ (см. рис. 315),

$\begin{cases} \dfrac{1}{2}AC\cdot\dfrac{36}{11} + \dfrac{1}{2}BC\cdot\dfrac{40}{11} = 30, \\ AB\cdot BC = 60; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{36}{11}AC + \dfrac{40}{11}BC = 60, \\ AB\cdot BC = 60; \end{cases}$

$\begin{cases} 9AC + 10BC = 165, \\ AC = \dfrac{60}{BC}; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{540}{BC} + 10BC = 165, \\ AC = \dfrac{60}{BC}; \end{cases}$

$\begin{cases} 2BC^2 - 33BC + 108 = 0, \\ AC = \dfrac{60}{BC}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} BC = 12, \\ BC = 4{,}5; \end{array}\right. \\ AC = \dfrac{60}{BC}; \end{cases}$ $\begin{cases} AC = 5, \\ BC = 12; \end{cases}$ или

$$\begin{cases} AC = 13\frac{1}{3}, \\ BC = 4\frac{1}{2}. \end{cases}$$

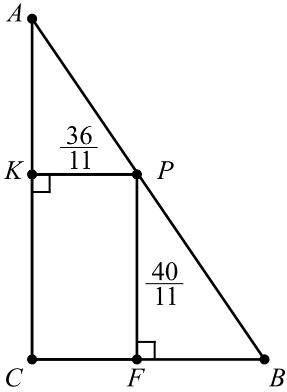


Рис. 315.

Ответ: 5; 12 или $13\frac{1}{3}$; $4\frac{1}{2}$.

1336. 1.По условию треугольник ABC равнобедренный, $MN \| AC$, значит $AMNC$ — равнобедренная трапеция. Обозначим $AH = x$, $NH = y$, $AD = HC = z$, тогда $MN = DH = x - z$ (см. рис. 316).

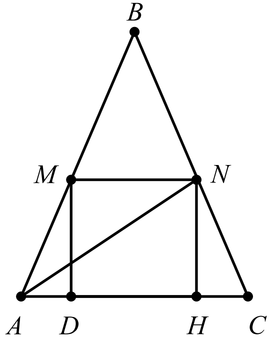


Рис. 316.

2. $S_{AMNC} = \dfrac{MN + AC}{2} \cdot NH$,

$\dfrac{x - z + x + z}{2} \cdot y = 60$, $xy = 60$.

3. В $\triangle AHN$: $AN^2 = AH^2 + NH^2$, $x^2 + y^2 = 169$.

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169, \\ xy = 60; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 49, \\ xy = 60; \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 7, \\ xy = 60; \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = -7, \\ xy = 60; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 12, \\ y = 5; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5, \\ y = 12. \end{cases} \end{array}\right.$

Имеем: $NH = 12$ или $NH = 5$.

Ответ: 12 или 5.

1337. Докажем, что $S_{ABC} = (p - a)r_a$, где p — полупериметр $\triangle ABC$, a — сторона треугольника, r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a (см. рис. 317).

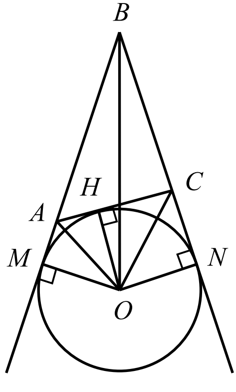


Рис. 317.

$AB = b$, $BC = c$, $CA = a$, $OM = OH = ON = r_a$, тогда $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{COB} - S_{AOC} = \dfrac{1}{2}b \cdot r_a + \dfrac{1}{2}c \cdot r_a - \dfrac{1}{2}a \cdot r_a =$

$= \left(\dfrac{1}{2}(a + b + c) - a\right) \cdot r_a = (p - a) \cdot r_a$.

По формуле Герона

$S_{ABC} = \sqrt{7{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}5} = \dfrac{15}{4}\sqrt{7}$.

По условию, $a = 4$, $b = 6$, $c = 5$;

$\frac{15}{4}\sqrt{7} = (7{,}5 - 4)r_a$, $r_a = \frac{15}{14}\sqrt{7}$; $\frac{15}{4}\sqrt{7} = (7{,}5 - 5)r_c$, $r_c = \frac{15}{10}\sqrt{7}$;

$\frac{15}{4}\sqrt{7} = (7{,}5 - 6)r_b$, $r_b = \frac{15}{6}\sqrt{7}$;

$r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{225}{8}\sqrt{7}$.

Ответ: $\frac{225\sqrt{7}}{8}$.

1338. Докажем, что $S_{ABC} = (p - a)r_a$, где p — полупериметр $\triangle ABC$, a — сторона треугольника, r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a (см. рис. 318).

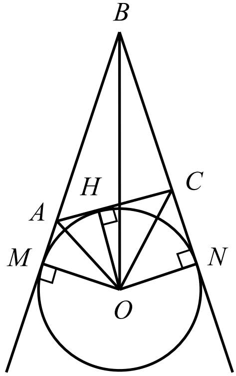


Рис. 318.

$AB = b$, $BC = c$, $CA = a$, $OM = OH = ON = r_a$, тогда $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{COB} - S_{AOC} = \frac{1}{2}b \cdot r_a + \frac{1}{2}c \cdot r_a - \frac{1}{2}a \cdot r_a =$

$= \left(\frac{1}{2}(a + b + c) - a\right) \cdot r_a = (p - a) \cdot r_a$.

Радиусы вневписанных окружностей равны 9, 18 и 21. Подставляя их в полученную формулу, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} S = (p-a)\cdot 9, \\ S = (p-b)\cdot 18, \\ S = (p-c)\cdot 21, \\ p = \dfrac{1}{2}(a+b+c). \end{cases}$$

Выразив стороны через полупериметр и подставив их в последнее уравнение системы, получим $p = 27$. Затем найдём стороны $a = 13$, $b = 20$ и $c = 21$, откуда их произведение равно $13\cdot 20\cdot 21 = 5460$.

Ответ: 5460.

1339. 1) Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы $\triangle ABC$; O — точка пересечения медиан; F — точка пересечения прямой, проведённой через вершину A параллельно CC_1, и прямой, проведённой через точку A_1 параллельно BB_1. Покажем, что $AF = C_1C$ и $B_1B = A_1F$ (см. рис. 319).

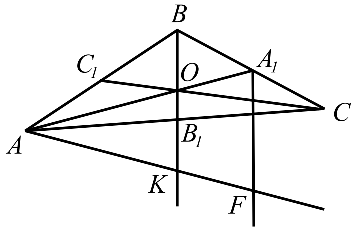


Рис. 319.

2) Пусть K — точка пересечения прямых BB_1 и AF.
Тогда $\triangle AB_1K = \triangle OB_1C$ ($\angle AB_1K = \angle OB_1C$ — вертикальные, $\angle OCB_1 = \angle B_1AK$ — накрест лежащие, $AB_1 = B_1C$). Следовательно, $AK = OC$; $OB_1 = B_1K$;

$OK = 2OB_1 = \dfrac{2}{3}BB_1$. Так как O — точка пересечения медиан, то $AO : OA_1 = 2 : 1$. Поскольку $OK \parallel A_1F$, то по теореме Фалеса $AK : KF = 2 : 1$. Получим: $KF = \dfrac{AK}{2} = \dfrac{OC}{2} = OC_1$;

$AF = AK + KF = CO + OC_1 = CC_1$.

$\triangle AA_1F \sim \triangle AOK$ ($\angle A_1AF$ — общий, $OK \parallel A_1F$). Следовательно,

$\dfrac{A_1F}{OK} = \dfrac{A_1A}{AO} = \dfrac{3}{2}$;

$A_1F = \dfrac{3}{2}OK = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}BB_1 = BB_1$.

3) Так как $BK \parallel A_1F$ и $CC_1 \parallel AF$, то $\angle AFA_1 = 180^\circ - \angle BKF =$

$= 180^\circ - \angle BOC$; $\sin\angle AFA_1 = \sin\angle BOC$.
$\angle AA_1F = \angle AOK = 180^\circ - \angle BOA$; $\sin\angle A_1AF = \sin\angle BOA$.
$\angle A_1AF = \angle A_1OC = 180^\circ - \angle AOC$; $\sin\angle A_1AF = \sin\angle AOC$.

4) Пусть $AA_1 = x$, $CC_1 = y$, $BB_1 = z$. Тогда искомая площадь

$S = S_{AA_1F} = \dfrac{1}{2}AA_1 \cdot AF\sin\angle A_1AF = \dfrac{1}{2}xy\sin\angle AOC$; $\sin\angle AOC = \dfrac{2S}{xy}$;

$S = \dfrac{1}{2}AA_1 \cdot A_1F\sin\angle AA_1F = \dfrac{xz}{2}\sin\angle BOA$; $\sin\angle BOA = \dfrac{2S}{xz}$;

$S = \dfrac{1}{2}AF \cdot A_1F\sin\angle AFA_1 = \dfrac{yz}{2}\sin\angle BOC$; $\sin\angle BOC = \dfrac{2S}{yz}$.

5) $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} =$

$$= \frac{1}{2}AO \cdot OB\sin\angle AOB + \frac{1}{2}OB \cdot OC\sin\angle BOC + \frac{1}{2}OC \cdot AO\sin\angle AOC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}(xy\sin\angle AOB + yz\sin\angle BOC + xy\sin\angle AOC) =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{xz \cdot 2S}{xz} + \frac{yz \cdot 2S}{yz} + \frac{xy \cdot 2S}{xy}\right) = \frac{4}{3}S.$$

По условию $S_{ABC} = 18$, следовательно $\dfrac{4}{3}S = 18$; $S = 13{,}5$.

Ответ: 13,5.

1340. 1) Пусть $DC > AB$ (см. рис. 320). Положим $AK = KB = x$, $DM = MC = y$. Тогда $x < y$.

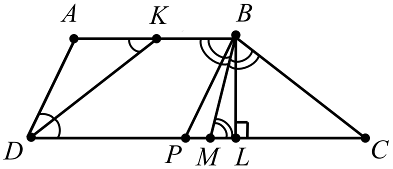


Рис. 320.

2) Так как DK — биссектриса $\angle ADC$, то $\angle ADK = \angle KDM$; $\angle KDM = \angle AKD$ (как накрест лежащие). Следовательно, в $\triangle ADK$ $\angle ADK = \angle AKD$ и $AD = AK = x$.

Проводя аналогичные рассуждения для $\triangle MBC$, получим: $BC = MC = y$.

3) Проведём $BP \parallel AD$. Тогда $BP = AD = x < y = BC \Rightarrow$

$\angle BPC > \angle BCP \Rightarrow \angle ADC > \angle BCD \Rightarrow \angle ADC = 60°$.
4) $PC = DC - DP = 2y - 2x$.
5) Из $\triangle BPC$ по теореме косинусов
$BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cos\angle BPC$;
$y^2 = x^2 + (2y-2x)^2 - 2x(2y-2x)\cos 60°$;
$y^2 = x^2 + 4y^2 - 8xy + 4x^2 - 4xy \cdot \frac{1}{2} + 4x^2 \cdot \frac{1}{2}$;
$3y^2 + 7x^2 - 10xy = 0$.
6) Из $\triangle BPL$ находим $BL = BP \sin\angle BPL = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

По условию $BL = 3\sqrt{3}$; $\frac{x\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$; $x = 6$.
Тогда $3y^2 + 7 \cdot 6^2 - 10 \cdot 6y = 0$; $y_1 = 6$; $y_2 = 14$.
Значение $y = 6$ не удовлетворяет условию $y > x$.
Значит, $y = 14$.
7) $P_{ABCD} = DC + BC + AB + AD = 2y + y + 2x + x = 3(14+6) = 60$.

Ответ: 60.

1341. Дано: $ABCD$ — трапеция; AB, DC — основания трапеции; $AK = KB$; $DM = MC$; $P_{ABCD} = 30$; DK — биссектриса $\angle ADC$; BM — биссектриса $\angle ABC$. Косинус меньшего угла при нижнем основании равен $\frac{3}{4}$.
Найти: KM.

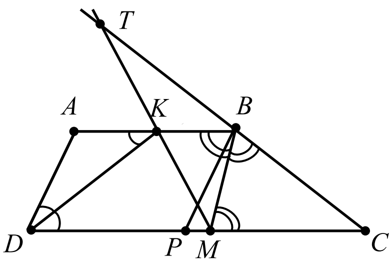


Рис. 321.

Решение. 1) Пусть $DC > AB$ (см. рис. 321). Положим $AK = KB = x$, $DM = MC = y$. Тогда $x < y$.
2) Так как DK — биссектриса $\angle ADC$, то $\angle ADK = \angle KDC$; $\angle KDC =$

$= \angle DKA$ (накрест лежащие).
Следовательно, в $\triangle DAK$ $\angle DAK = \angle AKD$ и $AD = AK = x$. Проводя аналогичные рассуждения для $\triangle MBC$, получаем $MC = BC = y$.
3) Проведём $BP \parallel AD$. Тогда $BP = AD = x < y = BC \Rightarrow \angle BPC >$

$> \angle BCP \Rightarrow \angle ADC > \angle BCD$. Значит, $\cos\angle BCD = \dfrac{3}{4}$.

4) $PC = DC - DP = 2y - 2x$.
5) Из $\triangle BPC$ по теореме косинусов
$BP^2 = BC^2 + PC^2 - 2BC \cdot PC\cos\angle BCP \Rightarrow$

$x^2 = y^2 + (2y - 2x)^2 - 2y(2y - 2x) \cdot \dfrac{3}{4}$;

$x^2 = y^2 + 4y^2 - 8xy + 4x^2 - 3y^2 + 3xy$;
$2y^2 + 3x^2 - 5xy = 0$.
6) По условию периметр $P_{ABCD} = 30$.

Так как $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 3x + 3y$, то $3x + 3y = 30$; $x + y = 10$.
7) Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2y^2 + 3x^2 - 5xy = 0, \\ x + y = 10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - y, \\ 10(y - 5)(y - 6) = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$x_1 = 5$, $y_1 = 5$, $x_2 = 4$, $y_2 = 6$.

Значения x_1 и y_1 не удовлетворяют условию $x < y$.

Следовательно, $x = 4$, $y = 6$.
8) Продолжим прямые MK и BC до пересечения в точке T.
$\triangle TKB \sim \triangle TMC$ ($\angle T$ — общий, $\angle TBK = \angle TCM$ и $\angle TKB = \angle TMC$ как сонаправленные). Значит, $\dfrac{TC}{TB} = \dfrac{TM}{TK} = \dfrac{MC}{KB} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$TC = \dfrac{3}{2}TB$. С другой стороны, $TC = TB + BC = TB + y = TB + 6$.

Получаем $TB + 6 = \dfrac{3}{2}TB$; $TB = 12$; $TC = 18$.

9) Из $\triangle TMC$ по теореме косинусов
$TM^2 = TC^2 + MC^2 - 2TC \cdot MC\cos\angle TCM$;

$TM^2 = 18^2 + 6^2 - 2 \cdot 18 \cdot 6 \cdot \dfrac{3}{4} = 198$;

$TM = \sqrt{198} = 3\sqrt{22}$.

Из соотношения $\dfrac{TM}{TK} = \dfrac{3}{2}$, находим $TK = \dfrac{2TM}{3} = \dfrac{2 \cdot 3\sqrt{22}}{3} = 2\sqrt{22}$.

$KM = TM - TK = 3\sqrt{22} - 2\sqrt{22} = \sqrt{22}$.

Ответ: $\sqrt{22}$.

1343. Угол ANM вписанный, $\angle ANM = 30°$, тогда $\smile AM = 60°$. Угол ABN вписанный, $\smile AMN = \smile AM + \smile NM = 60° + 180° = 240°$, тогда $\angle ABN = 120°$. Угол ABF смежный с углом ABN,
$\angle ABF = 180° - 120° = 60°$ (см. рис. 322). В треугольнике AFB $AF = BF$, $\angle ABF = 60°$, значит, треугольник ABF равносторонний,
$AB = AF = BF = 3$,
$\angle ABF = \angle BAF = \angle AFB = 60°$. $\angle AFB = \dfrac{\smile MAN - \smile AnB}{2}$ как угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга,
$\smile AnB = \smile MAN - 2\angle AFB = 180° - 2 \cdot 60° = 60°$. Угол AOB центральный, $\angle AOB = 60°$. В треугольнике AOB $OA = OB$ как радиусы, $\angle AOB = 60°$, значит, треугольник AOB — равносторонний,
$AO = OB = AB = 3$.

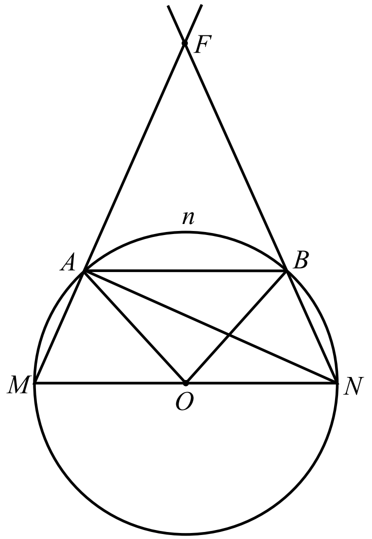


Рис. 322.

Ответ: 3.

1344. Пусть K — центр окружности (см. рис. 323).
Точка O равноудалена от точек C и D, тогда $\triangle OCD$ — равнобедренный и $OC = OD$, $\angle ODC = \angle OCD = 60°$, $\angle COD = 180° - 2\angle OCD = 60°$, $\Rightarrow$

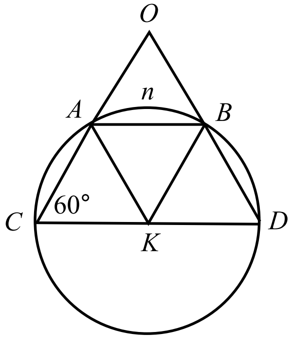


Рис. 323.

$\triangle OCD$ — равносторонний.
Угол ACD — вписанный, $\angle ACD = 60°$, тогда $\smile ABD = 120°$.
Аналогично $\smile CAB = 120°$.
$\smile CAB = \smile ABD = 120°$, тогда $\smile CAB - \smile AnB = \smile ABD -$
$- \smile AnB$, то есть $\smile AC = \smile BD$, откуда $AC = BD$.
$OC = OD$, $OC - AC = OD - BD$, $OA = OB$, $\angle O = 60°$, тогда $\triangle OAB$ — равносторонний, $\angle OAB = \angle OBA = 60°$, $AB \| CD$.
$AK = CK = BK = DK$ как радиусы, тогда из треугольников AKC и BKD получаем $\angle KAC = 60°$, $\angle KBD = 60°$.
$\angle BAK = 180° - \angle OAB - \angle KAC = 60°$, аналогично $\angle ABK = 60°$, тогда $\triangle ABK$ равносторонний и $r = AK = AB = 2$.

Ответ: 2.

1345. $AQ = \dfrac{2}{3}AB = 6$, $AB = 9$, $BQ = 3$. $\angle BAC = 60°$, тогда $AC = 4{,}5$, $BC = 4{,}5\sqrt{3}$. Рассмотрим 2 случая.
1) Окружность расположена так, как показано на рисунке 324.

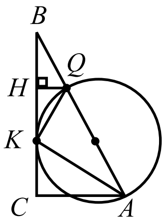


Рис. 324.

По теореме о касательной и секущей имеем $BK^2 = AB \cdot BQ$, откуда

$BK = 3\sqrt{3}$.

$\triangle BHQ \sim \triangle BCA$, $BH = \dfrac{1}{3}BC = 1{,}5\sqrt{3}$, тогда $BH = HK$, следовательно $\triangle BQK$ — равнобедренный и $\angle BKQ = \angle KBQ = 30^\circ$.
В $\triangle AKC$ $AK = \sqrt{KC^2 + AC^2} = \sqrt{(BC - BK)^2 + AC^2} =$
$= \sqrt{(1{,}5\sqrt{3})^2 + 4{,}5^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$. Имеем $KC = 1{,}5\sqrt{3}$; $AK = 3\sqrt{3}$, $AK = 2KC$, значит $\angle AKC = 60^\circ$. $\angle AKQ = 180^\circ - \angle QKB - \angle AKC =$
$= 90^\circ$.
$\triangle AKQ$ — прямоугольный, значит радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, то есть равен $\dfrac{1}{2}AQ = 3$.

2) Окружность расположена так, как показано на рисунке 325.

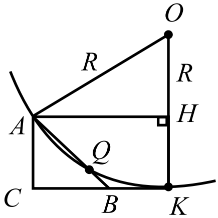


Рис. 325.

CK — касательная, поэтому $OK \perp CK$. По теореме о касательной и секущей имеем $BK^2 = AB \cdot BQ$, откуда $BK = 3\sqrt{3}$.
$AH = CK = 7{,}5\sqrt{3}$, $HK = AC = 4{,}5$.
Из прямоугольного треугольника $\triangle OAH$ по теореме Пифагора имеем:
$AH^2 + OH^2 = OA^2$; $\left(\dfrac{15}{2}\sqrt{3}\right)^2 + (R - 4{,}5)^2 = R^2$,

$\dfrac{225}{4} \cdot 3 + R^2 - 9R + \dfrac{81}{4} = R^2$, $9R = 189$, $R = 21$.

Ответ: $3; 21$.

1346. $AQ = \dfrac{2}{3}AB = 4$, $AB = 6$, $BQ = 2$. $\angle BAC = 60^\circ$, тогда $AC = 3$, $BC = 3\sqrt{3}$. Рассмотрим два случая.
1) Окружность расположена так, как показано на рис.326.
По теореме о касательной и секущей имеем $BK^2 = BQ \cdot AB$, откуда $BK = 2\sqrt{3}$.

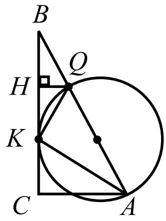


Рис. 326.

$\triangle BHQ \sim \triangle BCA$, $BH = \dfrac{1}{3}BC = \sqrt{3}$, тогда $BH = HK$, следовательно $\triangle BQK$ равнобедренный и $\angle BKQ = \angle KBQ = 30^\circ$.
В $\triangle AKC$ $AK = \sqrt{KC^2 + AC^2} = \sqrt{(BC - BK)^2 + AC^2} =$
$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$, $AK = 2KC$, значит $\angle AKC = 60^\circ$.
$\angle AKQ = 180^\circ - \angle QKB - \angle AKC = 90^\circ$.
$\triangle AKQ$ — прямоугольный, значит радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, то есть равен $\dfrac{1}{2}AQ = 2$.

2) Окружность расположена так, как показано на рисунке 327.

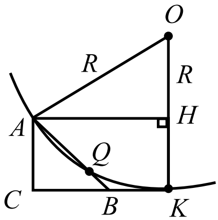


Рис. 327.

CK — касательная, поэтому $OK \perp CK$. По теореме о касательной и секущей имеем: $BK^2 = AB \cdot BQ$, откуда $BK = 2\sqrt{3}$.
$AH = CK = 5\sqrt{3}$, $HK = AC = 3$.
Из прямоугольного треугольника OAH по теореме Пифагора имеем:
$AH^2 + OH^2 = OA^2$; $\left(5\sqrt{3}\right)^2 + (R-3)^2 = R^2$,
$75 + R^2 - 6R + 9 = R^2$, $6R = 84$, $R = 14$.

Ответ: $2; 14$.

1347. Запишем для треугольника ABC (см. рис. 328) формулу медианы:
$AM = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}$.

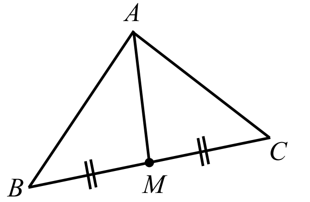


Рис. 328.

Отсюда $BC = \sqrt{2(AB^2 + AC^2 - 2AM^2)} = 2\sqrt{33}$.

По формуле Герона $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$, где $p = \dfrac{1}{2}(AB + AC + BC)$ — полупериметр $\triangle ABC$. Выполнив действия, получим: $S_{ABC} = 4\sqrt{6}$.

Так как медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, то $S_{ABM} = S_{ACM} = \dfrac{S_{ABC}}{2} = 2\sqrt{6}$.

Ответ: $2\sqrt{6}$.

1349. 1) Так как сумма углов четырёхугольника равна 360°, то $\angle MDA = 360^\circ - \angle M - \angle ABM - \angle DAB = \angle MCB$ (по условию). Отсюда $BC \parallel AD$ и $ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD (см. рис. 329).

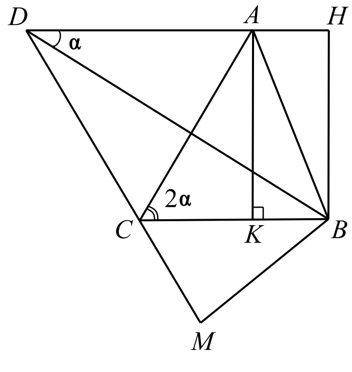


Рис. 329.

2) Обозначим $\angle ADB = \alpha$. Тогда $\angle ACB = 2\alpha$. В $\triangle ABC$ проведём высоту AK. Из $\triangle CAK$ получаем: $AK = AC\sin 2\alpha = 5\sin 2\alpha$;
$CK = AC\cos 2\alpha = 5\cos 2\alpha$.
3) Опустим перпендикуляр BH на прямую AD. $AHBK$ — прямоуголь-

ник, поэтому $AH = BK = CB - CK = 5 - 5\cos 2\alpha$. Из $\triangle DHB$ получаем: $BH = DH \operatorname{tg}\alpha = (DA + AH)\operatorname{tg}\alpha = (11 - 5\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha$.

4) Приравнивая найденные значения противоположных сторон BH и AK прямоугольника $AHBK$, получаем: $(11 - 5\cos 2\alpha)\operatorname{tg}\alpha = 5\sin 2\alpha$;

$(11 - 5\cos 2\alpha)\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 5 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha$; $11 - 5\cos 2\alpha = 5 \cdot 2\cos^2\alpha$;

$11 - 5\cos 2\alpha = 5(1 + \cos 2\alpha)$; $\cos 2\alpha = 0{,}6$; $\sin 2\alpha = \sqrt{1 - 0{,}36} = 0{,}8$.

5) $AK = 5\sin 2\alpha = 5 \cdot 0{,}8 = 4$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AK(AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 4(6 + 5) = 22.$$

Ответ: 22.

1350. Из прямоугольного треугольника MNK получаем $MK = \sqrt{145 - 81} = 8$. Пусть O — центр окружности, а Q и L — точки касания окружности со сторонами MK и MN соответственно, r — радиус окружности (см. рис. 330).

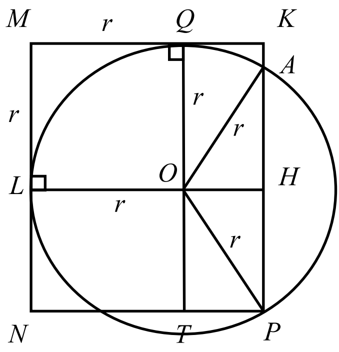


Рис. 330.

В прямоугольном треугольнике OTP $OT = LN = 9 - r$, $TP = 8 - r$, $OP = r$, тогда $OP^2 = OT^2 + TP^2$, $r^2 = (9-r)^2 + (8-r)^2$, $r^2 - 34r + 145 = 0$, откуда $r_1 = 5$, $r_2 = 29$. Так как по смыслу задачи $r < MK = 8$, то искомый радиус равен 5.

Треугольник AOP — равнобедренный, тогда $AP = 2HP = 2OT = 2(9 - r) = 8$, $AK = 9 - 8 = 1$.

Площадь трапеции $MNAK$ равна

$$S = \frac{1}{2}MK(AK + MN) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (1 + 9) = 40.$$

Ответ: 40.

1351. Пусть $\angle NMP = \alpha$, тогда из условия следует, что $\angle PMK = \alpha$.

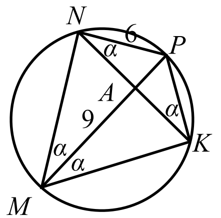


Рис. 331.

$\angle NKP = \angle NMP = \alpha$, так как эти углы вписанные и опираются на одну дугу (см. рис. 331). Аналагично $\angle PNK = \angle PMK = \alpha$.
Так как $\angle PNK = \angle PKN$, то треугольник NPK — равнобедренный, тогда $NP = PK$.

В четырёхугольник $MNPK$ можно вписать окружность, следовательно $NP + MK = PK + MN$, откуда $MN = MK$.
Треугольник NMK — равнобедренный, MA — его биссектриса, а значит, и высота, то есть $MP \perp NK$. $\triangle MNA \sim \triangle NPA$, так как $\angle NMA = \angle ANP = \alpha$, $\angle MAN = \angle NPA = 90°$. Обозначим $AP = x$, тогда из подобия треугольников MNA и NPA получаем $\dfrac{MA}{AN} = \dfrac{AN}{AP}$, $\dfrac{9}{\sqrt{36-x^2}} = \dfrac{\sqrt{36-x^2}}{x}$, $9x = 36 - x^2$, $x^2 + 9x - 36 = 0$, $(x+12)(x-3) = 0$.
Так как по смыслу задачи $x > 0$, то получаем $x = 3$. Итак, $AP = 3$.

Ответ: 3.

1352. Проведём дополнительно биссектрису CC_1 и и отрезок A_1B_1 (см. рис. 332).

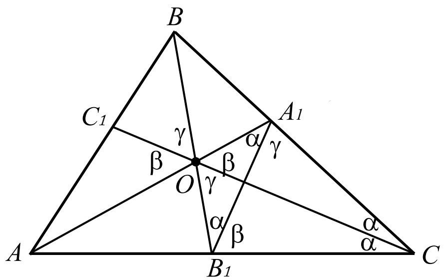


Рис. 332.

Обозначим $\angle BCC_1 = \angle C_1CA = \alpha$.

Так как около четырёхугольника OA_1CB_1 можно описать окружность, то $\angle A_1CO = \angle A_1B_1O = \alpha$, $\angle OCB_1 = \angle OA_1B_1 = \alpha$.

Пусть $\angle A_1OC = \beta$, $\angle B_1OC = \gamma$, тогда $\angle A_1B_1C = \beta$, $\angle B_1A_1C = \gamma$. В треугольнике A_1B_1C сумма углов равна $2\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
$\angle AOB_1 = 180^\circ - \angle A_1OB_1 = 2\alpha$, $\angle OB_1A = 180^\circ - \angle OB_1C = \alpha + \gamma$, $\angle OAB_1 = 180^\circ - \angle AOB_1 - \angle OB_1A = 2\alpha + \beta + \gamma - 2\alpha - (\alpha + \gamma) = \beta - \alpha$. Так как AA_1 — биссектриса, то $\angle BAA_1 = \angle A_1AC = \beta - \alpha$.

Рассуждая аналогично, получим:
$\angle BA_1O = \beta + \alpha$, $\angle OBA_1 = \angle ABO = \gamma - \alpha$.

$\angle OC_1A$ — внешний угол треугольника C_1BO, значит,
$\angle OC_1A = \angle C_1OB + \angle C_1BO = 2\gamma - \alpha$. $\angle AC_1O + \angle C_1OA + \angle OAC_1 = 180^\circ$ — сумма углов треугольника AC_1O.

$2\beta + 2\gamma - 2\alpha = 180^\circ$, $2\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, тогда $\beta + \gamma = 120^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\angle BCA = 60^\circ$. Площадь треугольника ABC равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle BCA = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15.$$

Ответ: 15.

1354. Так как боковые грани SBA и SBC перпендикулярны плоскости ABC, то ребро SB перпендикулярно плоскости основания ABC. По условию $SM : MA = 1 : 2$. Обозначим $SM = x$, тогда $MA = 2x$. Так как секущая плоскость параллельна прямым AC и SB и $SB \perp ABC$, то $MNFP$ — прямоугольник (см. рис. 333). Найдём x. Из прямоугольного $\triangle BAS$: $SA^2 = 36 \cdot 3 + 64 = 172 = 4 \cdot 43$; $SA = 2\sqrt{43}$. $SA = x + 2x = 3x$.

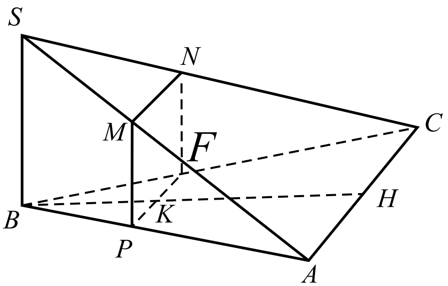


Рис. 333.

$x = \dfrac{2\sqrt{43}}{3}$. Найдём AC из $\triangle ABC$ по теореме косинусов:

$AC^2 = 100 + 61 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 84 = 4 \cdot 21$, $AC = 2\sqrt{21}$. Найдём MN.

Так как $MN \parallel AC$, то $\triangle SMN \sim \triangle SAC$. Отсюда: $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$.

$MN = \dfrac{AC}{3} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$. Найдём MP. Так как $MP \parallel SB$, то

$\triangle APM \sim \triangle ABS$, $\dfrac{MP}{6\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}$; $MP = 4\sqrt{3}$. $S_{MNFP} = MN \cdot MP =$

$= \dfrac{2\sqrt{21}}{3} \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{7}$.

Искомый объем $V_{APMNF} = \dfrac{1}{3} \cdot H \cdot S = \dfrac{8\sqrt{7}}{3} \cdot H$, где H — высота пирамиды, опущенная из вершины A на грань $MNFP$. Так как $AC \parallel MPF$, то в качестве высоты H можно взять расстояние между параллельными прямыми PF и AC. Проведем $BH \perp AC$, тогда HK — высота пирамиды. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 20\sqrt{3}$. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{BH \cdot AC}{2} = \dfrac{BH \cdot 2\sqrt{21}}{2}$.

Поэтому $20\sqrt{3} = BH \cdot \sqrt{21}$; $BH = \dfrac{20}{\sqrt{7}}$. $HK = \dfrac{2}{3}BH = \dfrac{40}{3\sqrt{7}}$.

Итак, $V_{APMNF} = \dfrac{8\sqrt{7}}{3} \cdot \dfrac{40}{3\sqrt{7}} = \dfrac{320}{9}$.

Ответ: $\dfrac{320}{9}$.

1355. Обозначим для удобства сторону основания пирамиды $2\sqrt{3}a$. Тогда $AO = 2a$; $OD = a$ (см. рис. 334).

Для того чтобы куб можно было вписать, как сказано в условии, в пирамиду, нужно, чтобы у неё все плоские углы при вершине S равнялись 90°, диагональ куба SN_1 совпадала с высотой пирамиды SO и вершины куба NM_1K лежали на апофемах соответствующих боковых граней. Обозначим ребро куба x. Тогда диагональ куба равна $\sqrt{3}x$. Апофема SD из $\triangle OSD$ равна $\sqrt{a^2 + 3x^2}$. Но так как углы $\angle BSD = \angle DBS = 45^\circ$, то $\triangle SBD$ равнобедренный и $SD = DB = \sqrt{3}a$. Получим: $a^2 + 3x^2 = 3a^2$; $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}a$. Найдём $\cos\angle NAS_1$.

1) Ищем сторону AS_1. Рассмотрим $\triangle AS_1N$. Ребро пирамиды

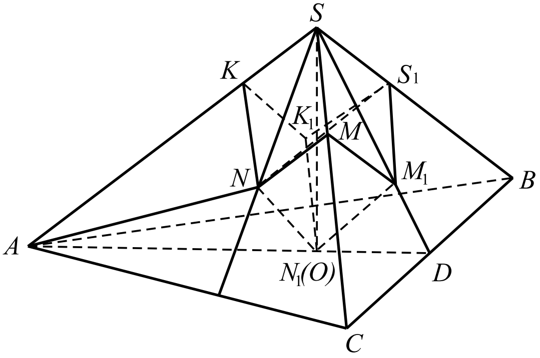


Рис. 334.

$SA^2 = 4a^2 + 3x^2 = 4a^2 + 3 \cdot \dfrac{2}{3}a^2 = 6a^2$. Значит, $SA = \sqrt{6}a$. Из прямоугольного $\triangle ASS_1$ по теореме Пифагора:
$AS_1^2 = 6a^2 + x^2 = \dfrac{20}{3}a^2$. $AS_1 = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}a$. Найдём сторону NS_1 как диагональ куба: $NS_1 = \sqrt{3}x = \sqrt{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}a = \sqrt{2}a$.

2) Найдём AN. $AN^2 = AK^2 + KN^2 = (AS - SK)^2 + KN^2 =$
$= (\sqrt{6}a - x)^2 + x^2 = \dfrac{8}{3}a^2 + \dfrac{2}{3}a^2 = \dfrac{10}{3}a^2$. $AN = a\sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

3) Теперь в $\triangle AS_1N$ все стороны известны и мы можем применить для нахождения $\cos\angle NAS_1$ теорему косинусов:
$S_1N^2 = AS_1^2 + AN^2 - 2 \cdot AS_1 \cdot AN \cdot \cos\angle NAS_1$. Имеем:
$2a^2 = \dfrac{4 \cdot 5}{3}a^2 + \dfrac{10}{3}a^2 - 2 \cdot \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}a \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}}a \cdot \cos\angle NAS_1$.

Отсюда $\cos\angle NAS_1 = \dfrac{24}{3} \cdot \dfrac{3}{20\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

1356. Продолжим PQ до пересечения с прямой CC_1 (рис. 335). И пусть S — точка их пересечения. Пусть K — точка пересечения AS и плоскости $A_1B_1C_1D_1$ (см. рис. 335).

1. $S_{CPQ} = S_{CDD_1C_1} - S_{PQD_1} - S_{QC_1C} - S_{CPD}$,

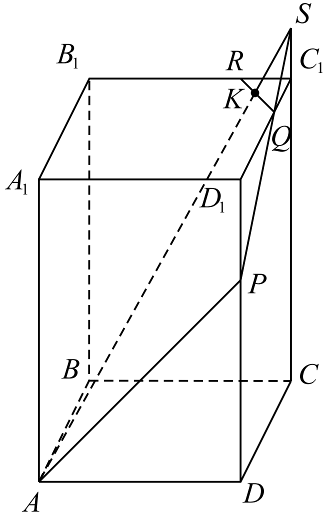


Рис. 335.

$S_{CPQ} = 17 \cdot 10 - \dfrac{1}{2}(7 \cdot 7 + 10 \cdot 10 + 3 \cdot 17) = 70.$

2. Из подобия треугольников SC_1Q и PD_1Q имеем:
$SC_1 : PD_1 = C_1Q : D_1Q$. Из условий задачи находим $PD_1 = 7$, $D_1Q = 7$. Таким образом, $SC_1 = 3$.
Из подобия треугольников SC_1K и SCA имеем $C_1K : C_1S = CA : CS$. Находим $C_1K = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

3. Так как $C_1Q \parallel CD$ и $C_1K \parallel CA$, то $\angle QC_1K = 45°$. То есть для угла $D_1C_1B_1$ луч C_1K является биссектрисой. Пусть QK' — перпендикуляр к CK. Тогда треугольник $QK'C_1$ — прямоугольный равнобедренный. Находим $QK' = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} = QK$. Значит, точка K' совпадает с точкой K. Итак, $QK \perp C_1K$.

4. Точки Q и K лежат в плоскости APQ, следовательно, и вся прямая QK лежит в этой плоскости. Значит, точка пересечения её с прямой B_1C_1 — это точка R. В треугольнике C_1QR высота C_1K также биссектриса. Значит, он равнобедренный. $C_1R = C_1Q = 3$.

5. C_1R перпендикуляр к плоскости CPQ.

Поэтому $V_{CPQR} = \dfrac{1}{3}S_{CPQ} \cdot C_1R = 70.$

Ответ: 70.

1357. Дано: в прямую призму $ABCDA'B'C'D'$ вписан цилиндр с осью OO', $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = 30°$, $S_{\text{бок. цил.}} = \pi$, $V_{\text{пр.}} = 28$ (рис. 336).

Найти: $d(OO', CD')$.

Решение.

Поскольку $OO' \parallel CDD'C'$, то $d(OO', CD') = d(OO', CDD'C') = r$, где r — радиус основания цилиндра. Рассмотрим ромб $ABCD$ (рис. 336). Высота BH равна $2r$. Так как $\angle BAD = 30°$, то $AB = 2BH = 4r$.

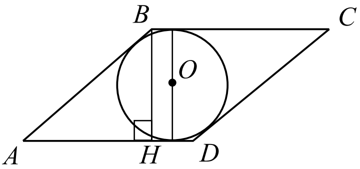


Рис. 336.

$S_{\text{бок. цил.}} = 2\pi rh = \pi \Rightarrow 2rh = 1.$
$V_{\text{пр.}} = AB^2 \sin 30° \cdot h = 2r^2h = 4r = 28 \Rightarrow r = 7.$

Ответ: 7.

1358. Сделаем чертеж (рис. 337).

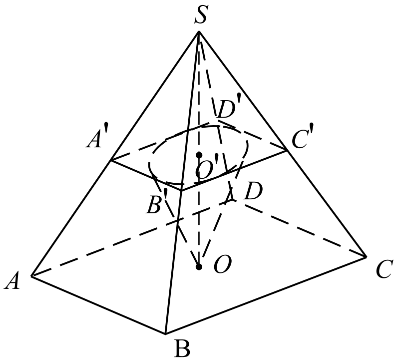


Рис. 337.

Пусть $A'B'C'D'$ — ромб, высекаемый на пирамиде плоскостью основания конуса. Положим $SO' = 3h$, $A'B' = 3x$, тогда $OO' = 5h$, $AB = 8x$. Рассмотрим ромб $A'B'C'D'$ (рис. 338).

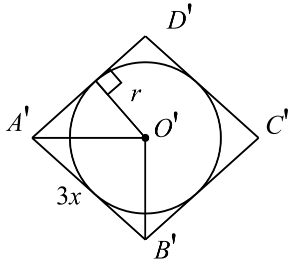


Рис. 338.

Так как $\angle O'A'B' = \dfrac{1}{2}\angle B'A'D' = 30^\circ$, то $A'O' = A'B' \cos 30^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}x}{2}$, $r = \dfrac{A'O'}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}x}{4}$. $V_{\text{кон.}} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot 5h = \dfrac{45}{16}\pi x^2 h$.

$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}AB^2 \sin 60^\circ \cdot SO = \dfrac{1}{3}64x^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8h = \dfrac{256x^2h}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, $\dfrac{V_{\text{кон.}}}{V_{\text{пир.}}} = \dfrac{45\sqrt{3}\pi}{4096} \Rightarrow V_{\text{кон.}} = \dfrac{45\sqrt{3}\pi}{4096} \cdot \dfrac{4096}{\pi\sqrt{3}} = 45$.

Ответ: 45.

1359. Дано: $SABC$ — правильная пирамида, O — центр ABC, $A'B'C' \parallel ABC$, P — центр $A'B'C'$, $SP : PO = 3 : 4$, $V_{SABC} = 343$.

Найти: $V_{OA'B'C'}$.

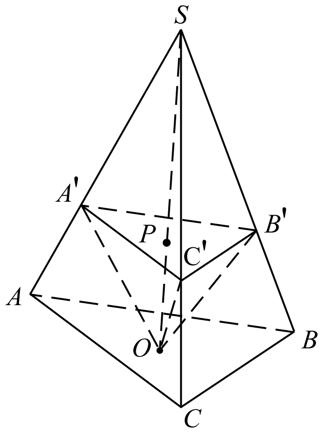


Рис. 339.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 339).
Пусть $SP = 3h$, тогда $OS = 7h$. $\triangle A'B'C'$ и ABC подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{3}{7}$.

Таким образом, $\dfrac{V_{OA'B'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot 4h}{\frac{1}{3}\cdot 7h} \cdot \dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{4}{7}\cdot\left(\dfrac{3}{7}\right)^2 = \dfrac{36}{343} \Rightarrow$

$V_{OA'B'C'} = \dfrac{36}{343}V_{SABC} = 36.$

Ответ: 36.

1360. Сделаем чертеж (рис. 340).

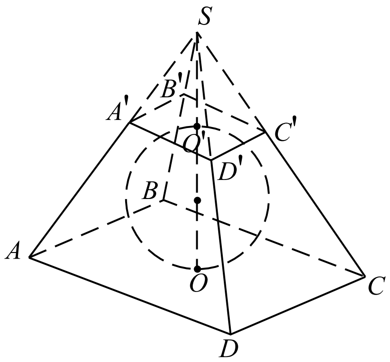


Рис. 340.

Пусть S — вершина неусечённой пирамиды; K, K', N, N' — середины сторон AB, $A'B'$, CD, $C'D'$. Рассмотрим трапецию $KK'N'N$ (рис. 341).

Так как $SABCD$ — правильная, то есть $AB \perp SK$, OK — проекция SC на плоскость $ABCD$. Отсюда $OK \perp AB$ по теореме о трёх перпендикулярах. Значит, $\angle SKO$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью основания и боковой гранью.

Треугольники SKN и $SK'N'$, очевидно, правильные, поскольку $\angle SKN = 60°$. Пусть K'' и N'' — точки касания шара к KK' и NN'. Обозначим $KK'' = x$, $K''K' = y$, тогда $KN = 2x$, $K'S = K'N' = 2y$, $KS = x + 3y$, но $KS = KN \Rightarrow x + 3y = 2x \Rightarrow x = 3y \Rightarrow KN = 3K'N'$.
Далее, $\triangle SK'O' \sim \triangle SKO \Rightarrow \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{K'O'}{KO} \Rightarrow \dfrac{SO'}{SO' + 2r} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

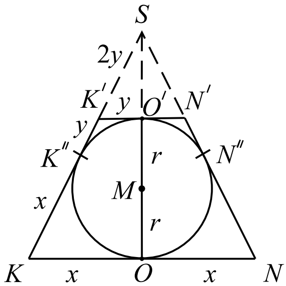


Рис. 341.

$3SO' = SO' + 2r \Rightarrow SO' = r$, $SO = 3r$. $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{KO}{SO} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x}{3r} \Rightarrow$

$x = r\sqrt{3}$, $y = \dfrac{r\sqrt{3}}{3}$. $V_{\text{ш.}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 3\pi \Rightarrow 4r^3 = 9$.

Таким образом,

$V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO - \dfrac{1}{3}S_{A'B'C'D'} \cdot SO' = \dfrac{1}{3} \cdot 4x^2 \cdot 3r - \dfrac{1}{3} \cdot 4y^2 \cdot r =$

$= \dfrac{26}{9} \cdot 4r^3 = \dfrac{26}{9} \cdot 9 = 26$.

Ответ: 26.

1361. Дано: четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность основания конуса с вершиной S, $AD = CD = BC = \dfrac{1}{2}AB$, P лежит на образующей SQ, $SP = PQ$, $V_{\text{кон.}} = 8\pi\sqrt{3}$.

Найти: V_{PABCD}.

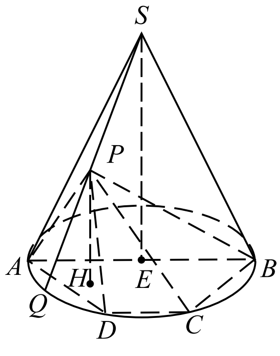


Рис. 342.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 342). Рассмотрим основание конуса (рис. 343).

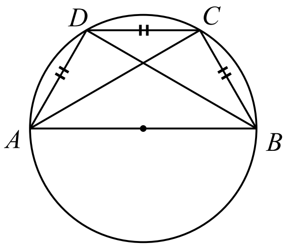


Рис. 343.

Так как $AD = CD = BC$, то $\smile{AD} = \smile{CD} = \smile{BC} \Rightarrow \smile{ADC} = \smile{BCD} \Rightarrow \angle ABC = \angle BAD \Rightarrow \triangle ABC = \triangle ABD \Rightarrow$ точки C и D равноудалены от прямой $AB \Rightarrow CD \parallel AB$.

Рассмотрим рисунок 344.

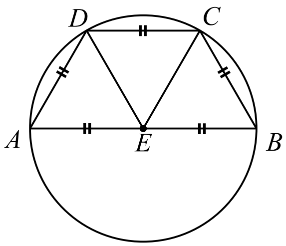


Рис. 344.

Пусть E — середина AB, тогда $AE = CD$, кроме того, $AE \parallel CD$ и $AE = AD$, значит, $ADCE$ — ромб. Аналогично доказывается, что $BCDE$ — ромб. Итак, $AE = BE = CE = DE = AD = BC = CD$. Тем самым, точка E — центр описанной вокруг $ABCD$ окружности, то есть основания конуса. Обозначим r — радиус окружности, тогда $S_{ABCD} = 3S_{ADE} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$. Поскольку вершина P лежит на середине образующей SQ, то высота PH пирамиды равна половине высоты конуса SE. $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot SE$, $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}r^2}{4} \cdot \frac{1}{2}SE = \frac{\sqrt{3}}{8}r^2 \cdot SE$. $\frac{V_{\text{пир.}}}{V_{\text{кон.}}} = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi} \Rightarrow$

$V_{PABCD} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8\pi} \cdot 8\pi\sqrt{3} = 9.$

Ответ: 9.

1362. Дано: $SABCDEF$ — правильная пирамида, SO — высота, $SO = AB$.

Найти: $\angle ABSC$.

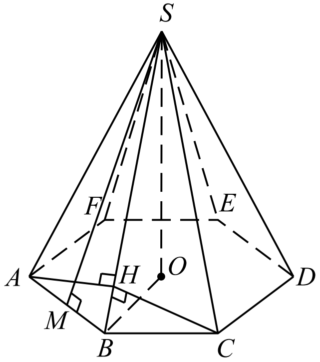


Рис. 345.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 345).
Примем за a длину стороны основания.

Так как $\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, то $\triangle AOB$ — правильный и $OB = a$, кроме того, $SO = a$, значит, $SB = a\sqrt{2}$. Опустим высоты AH и CH на ребро BS и высоту SM на сторону AB. $SM^2 = SB^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = 2a^2 - \dfrac{a^2}{4} =$

$= \dfrac{7a^2}{4} \Rightarrow SM = \dfrac{\sqrt{7}}{2}a$. $S_{ABS} = \dfrac{1}{2}SM \cdot AB = \dfrac{1}{2}AH \cdot SB \Rightarrow$

$AH = \dfrac{SM \cdot AB}{SB} = \dfrac{\sqrt{7}a}{2\sqrt{2}}.$

Так как $\angle ABC = \dfrac{180^\circ \cdot 4}{6} = 120^\circ$, то $AC^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120^\circ = 3a^2$.
Тогда из $\triangle ACH$: $AC^2 = 2AH^2(1 - \cos\angle AHC) \Rightarrow 1 - \cos\angle AHC =$

$= \dfrac{AC^2}{2AH^2} = \dfrac{3a^2}{2 \cdot \dfrac{7}{8}a^2} = \dfrac{12}{7} \Rightarrow \cos\angle AHC = -\dfrac{5}{7}.$

Но $\angle AHC = \angle ABSC \Rightarrow \angle ABSC = \arccos\left(-\frac{5}{7}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{5}{7}\right)$.

1363. Дано: $SABCD$ — правильная пирамида, SO — высота, $SO = AB$.

Найти: $\angle H$.

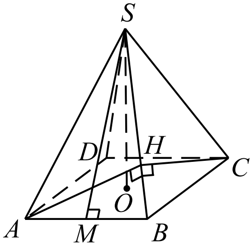


Рис. 346.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 346).

Положим $AB = SO = a$, тогда $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $BS^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow$ $BS = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a$. Опустим высоты AH и CH на ребро BS и высоту SM на сторону AB. $SM^2 = SB^2 - BM^2 = \frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

$$S_{ABS} = \frac{1}{2}SM \cdot AB = \frac{1}{2}AH \cdot SB \Rightarrow AH = \frac{SM \cdot AB}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot a}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a} =$$

$= \frac{\sqrt{10}a}{2\sqrt{3}}$. Тогда из $\triangle ACH$: $AC^2 = 2AH^2(1 - \cos\angle AHC) \Rightarrow$

$$1 - \cos\angle AHC = \frac{AC^2}{2AH^2} = \frac{2a^2}{2 \cdot \frac{10}{12}a^2} = \frac{6}{5} \Rightarrow \cos\angle AHC = -\frac{1}{5}.$$

Поэтому $\angle AHC = \angle ABSC \Rightarrow \angle ABSC = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$.

1364. Дано: $SABC$ — правильная пирамида, SO — высота, $SO = AB$.

Найти: $\angle ABSC$.

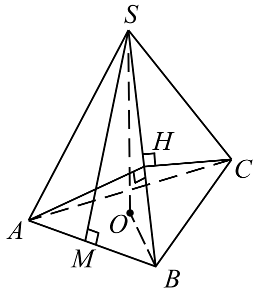


Рис. 347.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 347).

Положим $AB = SO = a$, тогда $OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$BS^2 = a^2 + \frac{a^2}{3} = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow BS = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Опустим высоты AH и CH на ребро BS и высоту SM на сторону AB.

$SM^2 = SB^2 - BM^2 = \frac{4a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{13}{12}a^2 \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}a$.

$$S_{ABS} = \frac{1}{2}SM \cdot AB = \frac{1}{2}AH \cdot SB \Rightarrow AH = \frac{SM \cdot AB}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}a \cdot a}{\frac{2a}{\sqrt{3}}} =$$

$= \frac{\sqrt{13}}{4}a$. Тогда из $\triangle ACH$: $AC^2 = 2AH^2(1 - \cos\angle AHC) \Rightarrow$

$$1 - \cos\angle AHC = \frac{AC^2}{2AH^2} = \frac{a^2}{\frac{13}{8}a^2} = \frac{8}{13} \Rightarrow \cos\angle AHC = \frac{5}{13}.$$

Но $\angle AHC = \angle ABSC \Rightarrow \angle ABSC = \arccos\left(\frac{5}{13}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(\frac{5}{13}\right)$.

1365. Сделаем чертеж (рис. 348, 349).

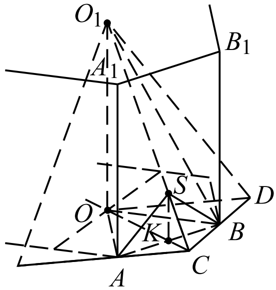


Рис. 348.

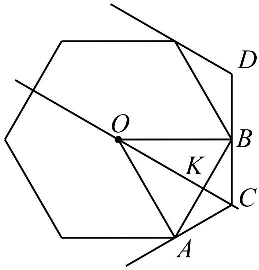


Рис. 349.

Определим, как располагаются стороны основания пирамиды по отношению к сторонам основания призмы. Сторона основания пирамиды $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, пирамида правильная, тогда высота $\triangle COD$ $\frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$. Тогда так как стороны пирамиды параллельны серединам противоположных сторон основания призмы, то стороны основания призмы являются высотами треугольников, составляющих основание пирамиды. Объем части пирамиды, находящейся вне призмы, состоит из объемов шести равных пирамид $SABC$. Найдём площадь основания S_{ABC}. $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot KC$, $KC = OC - OK = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}$. В плоскости OO_1C проведем $SK \parallel AA_1$. $AA_1 \perp (AOB)$, значит, $SK \perp (AOB)$, следовательно SK — высота пирамиды $SABC$. $\triangle OCO_1 \sim \triangle SKC$ ($\angle C$ — общий, $\angle O_1OC = \angle SKC = 90°$). $\frac{SK}{OO_1} = \frac{KC}{OC}$, $SK = \frac{OO_1 \cdot KC}{OC} =$

$= \dfrac{1 \cdot \sqrt{3} \cdot 3}{6 \cdot 2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{4}$. $V = 6 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{12} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{24}$.

1366. Дано: конус и пять одинаковых шаров внутри конуса. Четыре из них касаются основания конуса и его боковой поверхности. Каждый из этих 4-х шаров касается двух соседних. Пятый шар касается первых четырех и боковой поверхности конуса. $r = 4$, где r — радиус каждого из шаров (см. рис. 350).

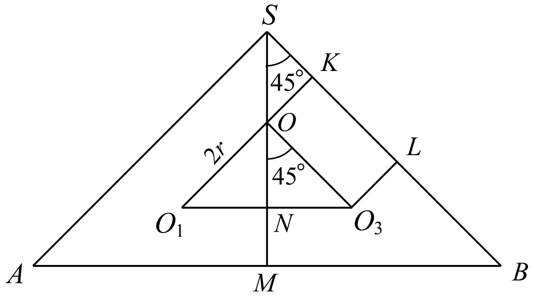


Рис. 350.

Найти: V.

Решение. Соединив отрезками центры всех четырех шаров, получим правильную четырехугольную пирамиду $OO_1O_2O_3O_4$ с одинаковыми ребрами, равными по $2r$. При этом высота пирамиды является отрезком высоты конуса. Нижнее основание пирамиды параллельно основанию конуса и находится от него на расстоянии r. Проведем диагональное сечение пирамиды до пересечения с поверхностью конуса (см. рис. 350). Тогда в $\triangle OO_1O_3$ боковые стороны равны по $2r$, а O_1O_3 — диагональ квадрата со стороной $2r$. $O_1O_3 = \sqrt{(2r)^2 + (2r)^2} = 2r\sqrt{2}$, $\quad NO_3 = r\sqrt{2}$.
$ON = \sqrt{(2r)^2 - \left(r\sqrt{2}\,\right)^2} = r\sqrt{2}$. Следовательно, $\angle NOO_3 = 45°$. Так как $OO_3 \parallel SB$ ($OK = O_3L = r$, K и L — точки касания соответствующих шаров с боковой поверхностью конуса), то $\angle MSB = \angle KOS = 45°$. Это означает, что $h = R = MB$, где h — высота конуса, R — радиус основания конуса. Из $\triangle SOK$ находим $OS = r\sqrt{2}$. Тогда

$$R = h = MN + NO + OS = r + r\sqrt{2} + r\sqrt{2} = r\left(1 + 2\sqrt{2}\,\right).$$

$$V = \frac{1}{3}\,\pi \cdot R^2 h = \frac{1}{3}\,\pi h^3 = \frac{1}{3}\,\pi r^3\left(1 + 2\sqrt{2}\,\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi \cdot 4^3\left(1 + 2\sqrt{2}\,\right)^3 = \frac{64\pi\left(1 + 2\sqrt{2}\,\right)^3}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{64\pi\left(1 + 2\sqrt{2}\,\right)^3}{3}$.

1367. Дано: $ABCD$ — осевое сечение данного усеченного конуса. BCO — осевое сечение вписанного конуса. MN — сечение осевого сечения данной плоскостью. $\dfrac{AO}{BH} = 3$; $\dfrac{OF}{FH} = 2$. V_1 — объем усеченного конуса с осевым сечением $BCQP$. V_2 — объем усеченного конуса с осевым сечением $AMND$.

Найти $\dfrac{V_1}{V_2}$.

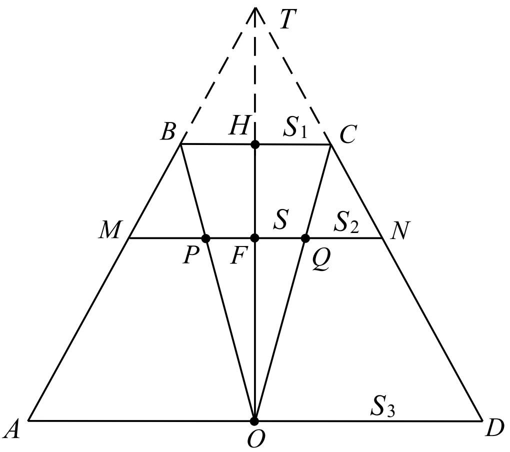


Рис. 351.

Решение. Пусть: S — площадь круга с радиусом FQ; S_1 — площадь круга с радиусом HC; S_2 — площадь круга с радиусом FN; S_3 — площадь круга с радиусом OD; Тогда: $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot HF\left(S + \sqrt{SS_1} + S_1\right)$;

$V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot OF\left(S_2 + \sqrt{S_2S_3} + S_3\right)$; $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{HF}{OF} \cdot \dfrac{S + \sqrt{SS_1} + S_1}{S_2 + \sqrt{S_2S_3} + S_3} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{S + \sqrt{SS_1} + S_1}{S_2 + \sqrt{S_2S_3} + S_3}$.

Выразим S_1, S_2, S_3 через S. При этом будем пользоваться теоремой:

“Площади параллельных сечений конуса относятся как квадраты их расстояний до вершины”.

$$\frac{S_1}{S} = \frac{3^2}{2^2} \Rightarrow S_1 = \frac{3^2}{2^2} \cdot S.$$

Обозначим $HF = k$. Тогда $OF = 2k$, $OH = 3k$. Из подобия треугольников AOT и BHT получаем: $\dfrac{OT}{HT} = \dfrac{OA}{HB} = 3 \Rightarrow$

$HT = \dfrac{1}{3} \cdot OT = \dfrac{1}{3}(3k + HT)$. $3 \cdot HT = 3k + HT$, $2 \cdot HT = 3k$, $HT = \dfrac{3}{2}k$.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\left(\frac{3}{2}k + k\right)^2}{\left(\frac{3}{2}k\right)^2} = \left(\frac{1 + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} \Rightarrow$$

$$S_2 = \frac{5^2}{3^2} \cdot S_1 = \frac{5^2}{3^2} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot S = \frac{5^2}{2^2} S.$$

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{\left(\frac{3}{2}k + 3k\right)^2}{\left(\frac{3}{2}k\right)^2} = \frac{9^2}{3^2} = 3^2 \Rightarrow S_3 = 9S_1 = 9 \cdot \frac{9}{4}S = \frac{81}{4}S.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S + \sqrt{S \cdot \frac{9}{4}S} + \frac{9}{4}S}{\frac{25}{4}S + \sqrt{\frac{25}{4}S \cdot \frac{81}{4}S} + \frac{81}{4}S} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}}{\frac{25}{4} + \frac{45}{4} + \frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{151} = \frac{19}{302}.$$

Ответ: $\dfrac{19}{302}$.

1368. Пусть r — радиус верхнего основания конуса, тогда $3r$ — радиус нижнего основания конуса (см. рис. 352).

$\triangle O_1OA \sim \triangle O_2OC$ по первому признаку подобия. $\dfrac{O_1A}{O_2C} = \dfrac{OO_1}{OO_2} = \dfrac{3}{2}$,

$O_2C = \dfrac{O_1A \cdot 2}{3} = \dfrac{2r}{3}$. $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi O_2C^2 \cdot 2 \cdot OO_2 = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{4r^2}{9} \cdot 2 \cdot O_1O_2$.

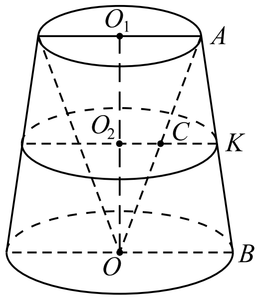


Рис. 352.

$\triangle OAB \sim \triangle CAK$ по первому признаку подобия.

$\dfrac{OB}{CK} = \dfrac{3}{1}$, $CK = \dfrac{OB}{3} = r$. $O_2K = O_2C + CK = \dfrac{2r}{3} + r = \dfrac{5r}{3}$.

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot O_2O_1 \left(\left(\frac{5r}{3}\right)^2 + \frac{5r}{3} \cdot r + r^2\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot O_2O_1 \cdot \frac{49a^2}{9}.$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi \cdot 2O_1O_2 \cdot \frac{4r^2}{9}}{\frac{1}{3}\pi \cdot O_2O_1 \cdot \frac{49a^2}{9}} = \frac{8}{49}.$$

Ответ: $\dfrac{8}{49}$.

1369. Рассмотрим осевое сечение конусов (рис. 353).

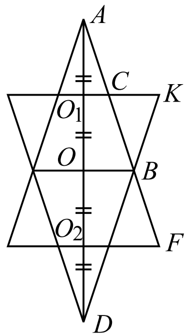


Рис. 353.

Обозначим через r радиус основания конусов: $O_2F = O_1K = r$.

$\triangle O_2AF \sim \triangle O_1AC$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{1}{3}$, тогда $O_1C = \dfrac{1}{3}r$.

$\triangle O_2AF \sim \triangle OAB$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{2}{3}$, тогда $OB = \dfrac{2}{3}r$.

По условию $AO_1 = O_1O = OO_2 = O_2D = h$. V_1 — объем общей части.

$\dfrac{1}{2}V_1 = \dfrac{1}{3}\pi h\left(\left(\dfrac{1}{3}r\right)^2 + \dfrac{1}{3}r \cdot \dfrac{2}{3}r + \left(\dfrac{2}{3}r\right)^2\right) = \dfrac{1}{3}\pi h \cdot \dfrac{7r^2}{9}$.

V_2 — сумма объемов тех частей, которые не являются общими.

$\dfrac{1}{2}V_2 = \dfrac{1}{3}\pi h\left(\left(\dfrac{2}{3}r\right)^2 + \dfrac{2}{3}r \cdot r + r^2 - \dfrac{7r^2}{9} + \left(\dfrac{1}{3}r\right)^2\right) = \dfrac{1}{3}\pi h \cdot \dfrac{13r^2}{9}$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{2}V_1}{\frac{1}{2}V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{7r^2}{9}}{\frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{13r^2}{9}} = \frac{7}{13}.$$

Ответ: $\dfrac{7}{13}$.

1370. Рассмотрим осевое сечение конусов (рис. 354).

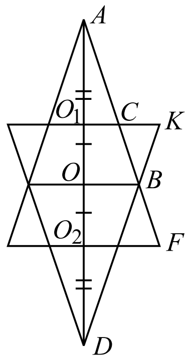


Рис. 354.

Обозначим через r радиус основания конусов: $O_2F = O_1K = r$, а через h — высоту усеченного конуса: $OO_1 = OO_2 = h$. Тогда $AO_1 = DO_2 = 2h$. В $\triangle O_2AF$ O_1C — средняя линия, $O_1C = \dfrac{1}{2}O_2F = \dfrac{1}{2}r$. В трапеции

O_2O_1KF OB — средняя линия, $OB = \dfrac{O_1C + O_2F}{2} = \dfrac{\dfrac{r}{2} + r}{2} = \dfrac{3}{4}r.$

$\dfrac{1}{2}V_1 = \dfrac{1}{3}\pi h\left(\dfrac{r^2}{4} + \dfrac{r}{2}\cdot\dfrac{3r}{4} + \dfrac{9r^2}{16}\right) = \dfrac{1}{3}\pi h\dfrac{19r^2}{16}.$

$\dfrac{1}{2}V_2 = \dfrac{1}{3}\pi h\left(r^2 + r\cdot\dfrac{3r}{4} + \dfrac{9r^2}{16} - \dfrac{19r^2}{16}\right) + \dfrac{1}{3}\pi\cdot 2h\cdot\dfrac{r^2}{4} = \dfrac{1}{3}\pi h\cdot\dfrac{26r^2}{16}.$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\cdot\dfrac{1}{3}\pi h\dfrac{19r^2}{16}}{2\cdot\dfrac{1}{3}\pi h\dfrac{26r^2}{16}} = \frac{19}{26}.$$

Ответ: $\dfrac{19}{26}$.

1371. Пусть сфера с центром O касается плоскости α в точке M, $OM = 3$; конус с вершиной $S \in \alpha$ касается сферы в точке L, $MS = 4$, центр H основания конуса лежит на прямой OL, $SH \perp \alpha$ (рис. 355).

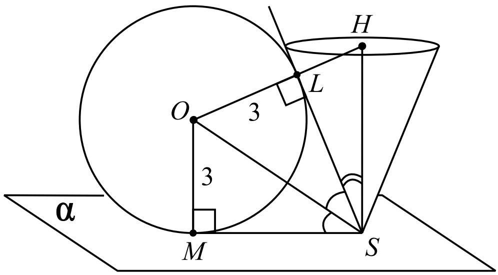


Рис. 355.

Введём обозначения: $\angle MSO = \angle LSO = \theta$, $HL = x$.

$\sin(\angle LSH) = \dfrac{x}{SH} \Rightarrow SH = \dfrac{x}{\sin(\angle LSH)}.$

$\sin(\angle LSH) = \sin(\dfrac{\pi}{2} - 2\theta) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1.$

Так как $SO = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, то $\cos\theta = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \sin(\angle LSH) =$

$= 2\cdot\dfrac{16}{25} - 1 = \dfrac{7}{25} \Rightarrow$

$SH = \frac{25}{7}x$. С другой стороны $SH^2 = SL^2 + x^2$, а $SL = SM = 4$, то есть $\frac{25^2}{7^2}x^2 = x^2 + 16$, откуда $x = \frac{7}{6}$, $SH = \frac{25}{7} \cdot \frac{7}{6} = \frac{25}{6}$.

Ответ: $\frac{25}{6}$.

1372. Пусть сфера с центром O касается плоскости α в точке M, $OM = 6$; конус с вершиной $S \in \alpha$ касается сферы в точке L; K — проекция точки L на плоскость α, $MK = \frac{144}{25}$, центр основания конуса H лежит на прямой ML, $SH \perp \alpha$ (рис. 356).

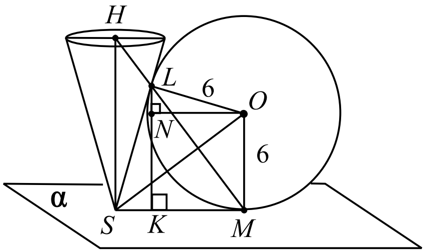


Рис. 356.

Пусть $ON \perp LK$, тогда $LN = \sqrt{6^2 - \frac{144^2}{25^2}} = \frac{42}{25}$, $LK = \frac{42}{25}+6 = \frac{192}{25}$.

$\triangle LKS \sim \triangle ONL\,(\angle LKS = \angle LNO = \frac{\pi}{2}, \angle SLK = \frac{\pi}{2} - \angle NLO =$

$= \angle LON) \Rightarrow \frac{SK}{LN} = \frac{LK}{ON} \Rightarrow SK = \frac{\frac{42}{25} \cdot \frac{192}{25}}{\frac{144}{25}} = \frac{56}{25} \Rightarrow$

$SM = \frac{56}{25} + \frac{144}{25} = 8$. $SH \parallel LK \Rightarrow \triangle SHM \sim \triangle KLM \Rightarrow$

$\frac{SH}{LK} = \frac{SM}{KM} \Rightarrow SH = \frac{LK \cdot SM}{KM} = \frac{\frac{192}{25} \cdot 8}{\frac{144}{25}} = \frac{32}{3}$.

Ответ: $\frac{32}{3}$.

1373. Дано: шар радиусом OM вписан в пирамиду $SABC$;
$SBA \perp ABC$, $SBC \perp ABC$, $\angle(SAC, ABC) = 60^\circ$,
$\angle(SBA, SBC) = 60^\circ$, $AB = BC = 2$.

Найти: OM.

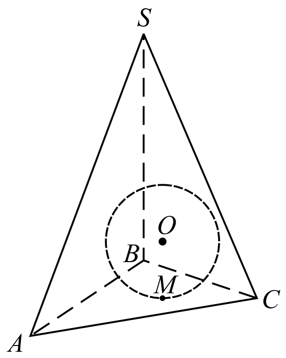


Рис. 357.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 357).
Очевидно $\angle ABC = \angle(SBA, SBC) = 60^\circ$ и $AC = 2$. Пусть N — середина AC, тогда $BN = \sqrt{3}$, $\angle SNB = 60^\circ$. Рассмотрим сечение фигур плоскостью SBN (рис. 358).

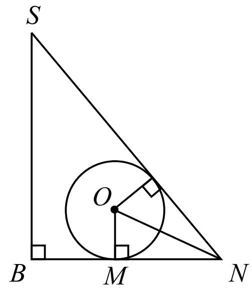


Рис. 358.

Обозначим $OM = r$. Так как $\angle ONM = \dfrac{1}{2}\angle SNB = 30^\circ$, то $NM = r\sqrt{3}$, $BM = \sqrt{3} - r\sqrt{3}$.
Рассмотрим сечение фигур плоскостью $A'B'C'$, проходящей через центр O параллельно ABC (рис. 359).

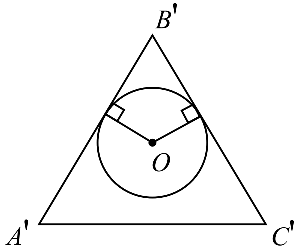


Рис. 359.

Так как $\angle A'B'O = \dfrac{1}{2}\angle A'B'C' = 30^\circ$, то $OB' = 2r$. С другой стороны $OB' = BM$.

Таким образом, $2r = \sqrt{3} - r\sqrt{3} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4-3} = 2\sqrt{3} - 3$.

Ответ: $OM = 2\sqrt{3} - 3$.

1374. Дано: шар с центром O вписан в конус, $S_{\text{ш.}} = \dfrac{4}{9}S_{\text{кон.}}$; окружность, касающаяся шара и конуса, является окружностью основания цилиндра, вписанного в шар.

Найти: $\dfrac{V_{\text{цил.}}}{V_{\text{кон.}}}$.

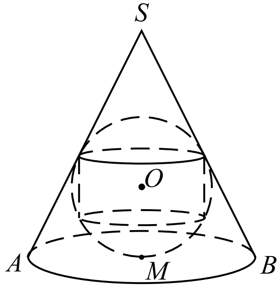


Рис. 360.

Решение. Сделаем чертеж (см. рис. 360).
Введём обозначения: R — радиус основания конуса, r — радиус шара, ℓ — образующая конуса. $S_{\text{кон.}} = \pi\ell(R+\ell)$, $S_{\text{сф.}} = 4\pi r^2$, $S_{\text{сф.}} = \dfrac{4}{9}S_{\text{кон.}} \Rightarrow$

$9r^2 = R(R+\ell)$. С другой стороны, $r = \dfrac{S}{p}$, где $S = S_{ABS}$, $p = \dfrac{P_{ABS}}{2} =$ $= R+\ell$. По формуле Герона $S^2 = (R+\ell)R^2(\ell - R) = R^2\big(\ell^2 - R^2\big)$. Таким образом, $r^2 = \dfrac{S^2}{p^2} = \dfrac{R^2\big(\ell^2 - R^2\big)}{\big(\ell + R\big)^2} = \dfrac{R^2(\ell - R)}{\ell + R}$.

Отсюда $R(R+\ell) = 9\dfrac{R^2(\ell - R)}{\ell + R}$, $\big(\ell+R\big)^2 = 9R(\ell-R)$, $\ell^2 - 7R\ell + 10R^2 = 0$,

$\ell_{1,2} = \dfrac{7R \pm \sqrt{49R^2 - 40R}}{2} = \dfrac{7R \pm 3R}{2}$, $\ell_1 = 5R$, $\ell_2 = 2R$.

1) $\ell = 2R$.

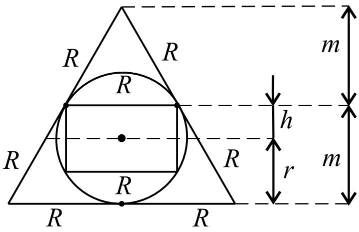


Рис. 361.

В этом случае (см. рис. 361) $9r^2 = R(R+\ell) = 3R^2 \Rightarrow R = r\sqrt{3}$. $m = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3r}{2}$, $n = m - r = \dfrac{r}{2}$.

$V_{\text{цил.}} = \pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 \cdot 2n = \dfrac{1}{4}\pi R^2 r$, $V_{\text{кон.}} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2m = \pi R^2 r \Rightarrow \dfrac{V_{\text{цил.}}}{V_{\text{кон.}}} = \dfrac{1}{4}$.

2) $\ell = 5R$.

В этом случае (см. рис. 362) $9r^2 = R(R+\ell) = 6R^2 \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{6}}{2}r$.

$(5m)^2 = (5R)^2 - R^2 = 24R^2$, $5m = 2\sqrt{6}R = 6r$, $m = \dfrac{6r}{5}$, $n = m - r = \dfrac{r}{5}$,

$d^2 = r^2 - n^2 = r^2 - \dfrac{r^2}{25} = \dfrac{24r^2}{25}$. $V_{\text{цил.}} = \pi d^2 \cdot 2n = \pi \cdot \dfrac{24r^2}{25} \cdot \dfrac{2r}{5} = \dfrac{48}{125}\pi r^3$,

$V_{\text{кон.}} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot 5m = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \dfrac{3r^2}{2} \cdot 6r = 3\pi r^3 \Rightarrow \dfrac{V_{\text{цил.}}}{V_{\text{кон.}}} = \dfrac{16}{125}$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{16}{125}$.

1375. Для решения задачи достаточно рассмотреть осевое сечение конуса

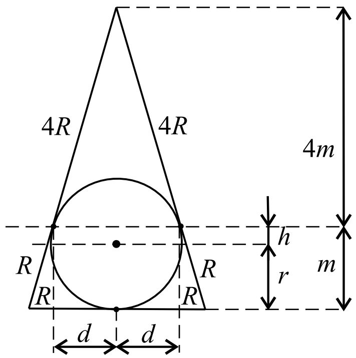


Рис. 362.

(см. рис. 363). AC — диаметр основания; BO — высота; AB, BC — образующие; M — центр вписанного шара; MK — радиус сечения (ρ); r — радиус шара; R — радиус основания конуса; α — искомый угол.

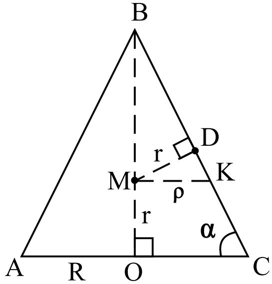


Рис. 363.

1) Из прямоугольных треугольников OBC и MDK получим:
$BO = R\operatorname{tg}\alpha$; $r = MK\sin\alpha = \rho\sin\alpha$. $\triangle BOC \sim \triangle BMK$, значит $\dfrac{BO}{R} = \dfrac{BO-\rho\sin\alpha}{\rho}$ или $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{R\operatorname{tg}\alpha - \rho\sin\alpha}{\rho} = \dfrac{R}{\rho}\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha$. Тогда $\dfrac{R}{\rho} = 1+\cos\alpha$.

2) Так как объем меньшего конуса равен половине объема исходного, то $\dfrac{1}{3}\pi\rho^2(R\operatorname{tg}\alpha - \rho\sin\alpha) = \dfrac{1}{6}\pi R^2\cdot R\operatorname{tg}\alpha$, $2\left(\dfrac{R}{\rho}\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha\right) = \left(\dfrac{R}{\rho}\right)^3\operatorname{tg}\alpha$, $2\operatorname{tg}\alpha = (1+\cos\alpha)^3\operatorname{tg}\alpha$.
α — острый угол, $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$, значит $(1+\cos\alpha)^3 = 2$, $1+\cos\alpha = \sqrt[3]{2}$,

$\cos\alpha = \sqrt[3]{2}-1$, $\alpha = \arccos\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$

Ответ: $\arccos\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$.

1376. Дано: $KBCDK_1B_1C_1D_1$ — призма (см. рисунок 364), $KK_1 \perp$ пл. KBC, $KBCD$ — ромб, $KB = 4$, $\angle DKB = 60^\circ$, E — середина ребра KD, F — середина ребра KB, $O = B_1E \cap D_1F$, $\angle B_1OD_1 = 90^\circ$.
Найти: $V_{EFK_1C_1}$.

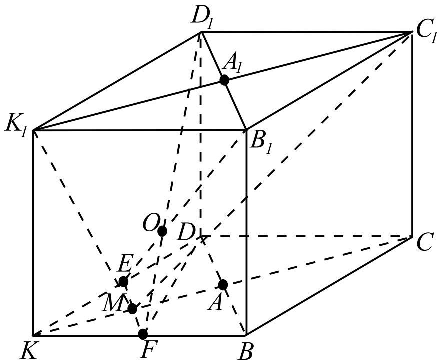


Рис. 364.

Решение. Так $\triangle KBD$ — равнобедренный с углом 60° при вершине, то $\triangle KBD$ — равносторонний $\Rightarrow BD = KB = 4$. $\angle KBC = 180^\circ - \angle BKD = 120^\circ \Rightarrow$ по теореме косинусов $KC = \sqrt{KB^2 + BC^2 - 2KB \cdot BC \cdot \cos\angle KBC} =$
$= \sqrt{32 - 32\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = 4\sqrt{3}$. Пусть M — середина отрезка EF, $A = BD \cap KC$ и $A_1 = B_1D_1 \cap K_1C_1$. EF — средняя линия треугольника $KBD \Rightarrow EF = \dfrac{1}{2}BD =$
$= 2$ и $EF || BD$. Тогда так как A — середина BD и $BD \perp KC$, то $M \in KC$ и $EF \perp KC$. $EF \subset$ пл. KBC и $KK_1 \perp$ пл. $KBC \Rightarrow EF \perp KK_1 \Rightarrow EF \perp$ пл. KCC_1.
$V_{EFK_1C_1} = 2V_{FMK_1C_1}$, так как $EM = MF$. $V_{FMK_1C_1} = \dfrac{1}{3}MF \cdot S_{MK_1C_1}$,

$S_{MK_1C_1} = \dfrac{1}{2}K_1C_1 \cdot AA_1$.

Найдём AA_1. Треугольники EOF и D_1OB_1 — равнобедренные (в силу симметричности призмы относительно плоскости KCC_1K_1 и в силу того, что $O \in$ пл. KCC_1K_1) и прямоугольные (см. рисунок 365), поэтому их углы при основании равны по 45°. Значит, $OF = EF \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2}$, $OD_1 = B_1D_1 \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$ и $FD_1 = OF + OD_1 = 3\sqrt{2}$. DF — меди-

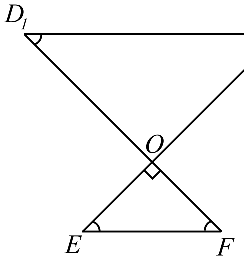


Рис. 365.

ана равностороннего треугольника $KBD \Rightarrow DF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BD = 2\sqrt{3}$. Тогда из прямоугольного $\triangle FDD_1 \Rightarrow DD_1 = \sqrt{FD_1^2 - DF^2} = \sqrt{6}$. Но $AA_1 = DD_1 = \sqrt{6}$. Следовательно, $S_{MK_1C_1} = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{2}$, а

$V_{FMK_1C_1} = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ и тогда $V_{EFK_1C_1} = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$..

1377. Сделаем чертеж (рис. 366, 367). Учитывая данные задачи, свой-

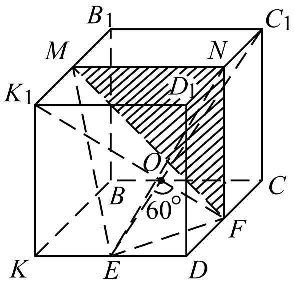


Рис. 366.

ства рассматриваемых геометрических тел и плоских фигур, легко получить утверждения, а также значения величин, нужных для решения задачи.

1) $BC = 2$; $BP = 1$; $PC = \sqrt{3}$; $KC = 2\sqrt{3}$; $MN = 2$.

2) Треугольники EOF и K_1C_1O — равносторонние, причем

$EF = \dfrac{1}{2}KC = \sqrt{3}$.

3) Так как коэффициент подобия треугольников K_1C_1O и EFO равен 2

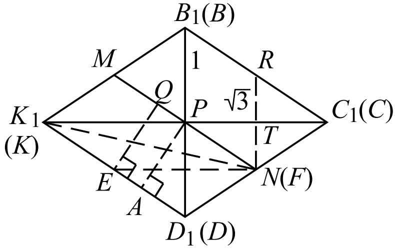


Рис. 367.

$(K_1C : EF = 2)$, то $K_1F = 3EF = 3\sqrt{3}$.

4) $TN = \frac{1}{2}PD = \frac{1}{2}$, $K_1T = \frac{3}{4}KC = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $K_1N = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{7}$. Тогда из $\triangle K_1NF$ найдем высоту призмы NF: $NF = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

5) Пусть MNF — основание пирамиды $EMNF$.

Тогда $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$. Высота пирамиды EQ — перпендикуляр, опущенный из точки E к плоскости MNF. Но так как $EQ = AP = \frac{1}{2}K_1P$, то $EQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

1378. На рисунке 368 изображена первая, исходная, призма.

На рисунке 369 — вторая, основание DPK которой находится в плоскости ABB_1, вершины D_1, K_1, P_1 лежат на сфере. O — центр сферы — середина отрезка, соединяющего центры оснований первой призмы.
Обозначим: a — ребро первой призмы, b — ребро второй призмы, R — радиус сферы, r — радиус сечения сферы плоскостью, проходящей через вершины основания первой призмы, ρ — радиус сечения сферы, проходящего через вершины основания $D_1K_1P_1$ второй призмы.
Тогда запишем несколько легко получаемых отношений:

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}};\ \rho = \frac{b}{\sqrt{3}};\ R = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}.$$

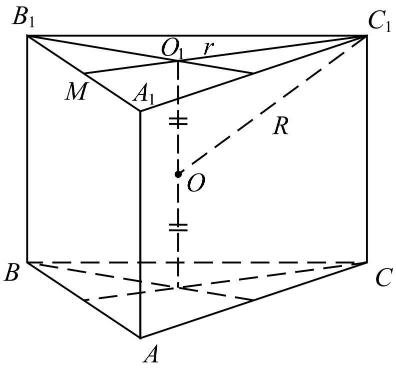


Рис. 368.

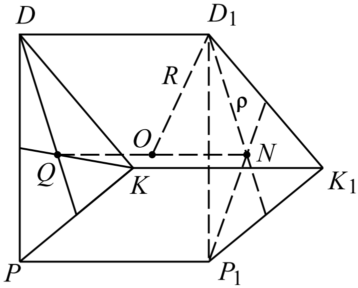


Рис. 369.

$ON = \sqrt{R^2 - \rho^2} = \sqrt{\dfrac{7a^2}{12} - \dfrac{b^2}{3}}$. $NQ = NO + QK = NO + MO_1 = = NO + \dfrac{r}{2} = \sqrt{\dfrac{7a^2}{12} + \dfrac{b^2}{3}} + \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. Но $NQ = b$, следовательно, $\sqrt{\dfrac{7a^2}{12} - \dfrac{b^2}{3}} + \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = b$. (1) По условию призмы подобны. $k = \dfrac{a}{b}$ — коэффициент подобия. Разделим равенство (1) на b: $\sqrt{\dfrac{7k^2}{12} - \dfrac{1}{3}} + \dfrac{k}{2\sqrt{3}} = 1$, $\sqrt{7k^2 - 4} + k = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{7k^2 - 4} = 2\sqrt{3} - k$, откуда $3k^2 + 2\sqrt{3}k - 8 = 0$, $k_{1,2} = \dfrac{-2\sqrt{3} \pm 6\sqrt{3}}{6}$. Очевидно $k > 0$, поэтому $k = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Объем второй

призмы V_2 равен $\frac{3}{4}$, поэтому объем первой: $V_1 = k^3 \cdot V_2 = \frac{8 \cdot 3}{3\sqrt{3} \cdot 4} =$
$= \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

1379. Легко показать, что около каждой правильной четырехугольной призмы можно описать сферу. Ее центр будет находиться в точке пересечения диагоналей (например, доказать с использованием свойств диагоналей или признаков равенства треугольников).

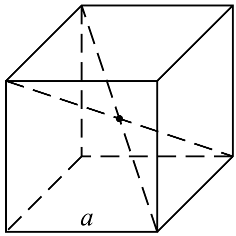


Рис. 370.

Диаметр D описанной сферы равен диагонали призмы, а радиус R — половине диагонали (рис. 370). Каждая грань призмы касается вписанной сферы, а значит, расстояния между противоположными гранями должны быть равны — диаметру вписанной сферы. Очевидно, что призма в этом случае является кубом. Если a — ребро куба, то $D = a\sqrt{3}$, $d = a$ — диаметры, соответственно, описанной и вписанной сферы. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $r = \frac{a}{2}$ — радиусы. Отношение радиусов вписанной и описанной сфер (в такой последовательности сферы названы в условии):

$$\frac{r}{R} = \frac{a \cdot 2}{2 \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1380. Сделаем чертеж (рис. 371).

Рассмотрим основание призмы (рис. 372). Используя свойства треугольников и прямоугольников, легко показать, что около любой правильной 6-угольной призмы можно описать сферу, центр O которой — середина отрезка PP_1, соединяющего центры оснований. Радиус — расстояние

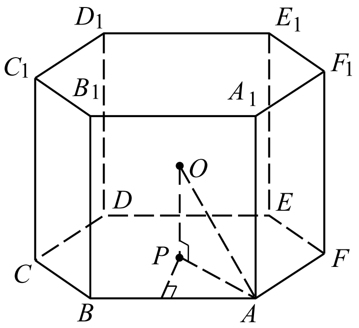


Рис. 371.

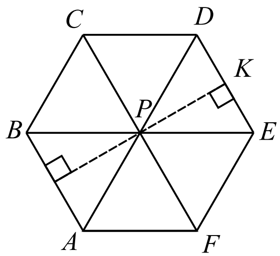


Рис. 372.

от O до любой вершины призмы.

Вписанная сфера касается всех граней призмы, а следовательно, расстояния между противоположными боковыми гранями должны быть равны расстоянию между основаниями, то есть высоте призмы.

Для последующих вычислений заметим, что диагонали оснований, соединяющие противоположные вершины, равны удвоенному ребру основания и разбивают 6-угольник на 6 равных правильных треугольников.

Обозначим: a — ребро основания, h — высота призмы, r — радиус вписанной сферы, R — радиус описанной сферы.

Тогда $PF = r = \dfrac{h}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{h^2 + (2a)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4a^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

$\dfrac{r}{R} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot a\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

1381. Сделаем чертеж (рис. 373).

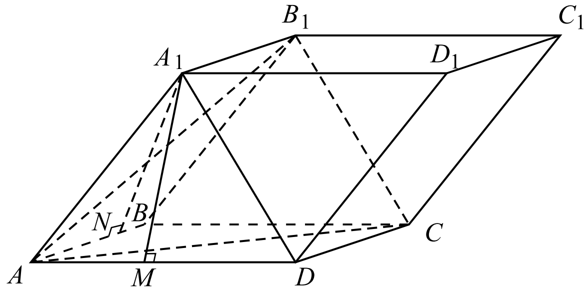


Рис. 373.

Пусть a — длина ребра призмы. Проведем высоту A_1M треугольника AA_1D. Так как $\angle A_1AD = 60°$, то $AM = \dfrac{a}{2}$. Аналогично, N — середина AB. Пусть A_1P — высота призмы. По теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, получаем $PM \perp AD$, $PN \perp AB$. $\triangle AA_1M = \triangle AA_1N \Rightarrow \triangle A_1MP = \triangle A_1NP \Rightarrow \triangle AMP = \triangle ANP$ (по признакам равенства прямоугольных треугольников). А это значит, что точка P лежит на диагонали AC квадрата $ABCD$, причем, так как $AM = MD$, $MP \parallel DC$, то P — середина диагонали AC, то есть центр квадрата $ABCD$. Тогда $AP \perp BD$ (по свойству диагоналей квадрата), $AP \perp A_1P$ (так как A_1P перпендикулярна плоскости ABC). Следовательно, AP перпендикулярна плоскости A_1BD (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), а значит, $AP \perp A_1D$, так как $A_1D \in A_1BD$. Прямая AC перпендикулярна плоскости A_1BD, содержащей A_1D. Значит, угол между прямыми AC и A_1D равен $90°$.

Ответ: $90°$.

1382. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $AD = 2$; O — центр вписанного в куб шара, см. рис. 374.
Найти: $V_{\text{кон}}$.
Решение. Легко понять, что O — середина диагонали куба $\Rightarrow$
$OA = \dfrac{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{12}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Пусть $O_1O = R$, где R – радиус шара. Тогда $O_1O = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. $AO_1 = AO - OO_1 = \sqrt{3} - 1$. $KO_1 \perp AC_1$, $KO_1 = r$ — радиус основания конуса. Из соображений симметрии $K \in AB_1$ и $\triangle AB_1C_1 \backsim \triangle AO_1K \Rightarrow \dfrac{B_1C_1}{KO_1} = \dfrac{AB_1}{AO_1}$,

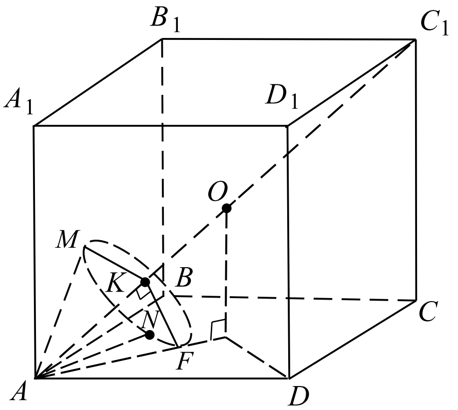


Рис. 374.

$$\frac{2}{r}=\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{\sqrt{3}-1},\ \ r=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.\ V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot AO_1=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi(\sqrt{3}-1)^3}{2}\cdot(\sqrt{3}-1),\ \ V_{\text{кон}}=\frac{\pi(\sqrt{3}-1)^3}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi(\sqrt{3}-1)^3}{6}$.

1383. На чертеже (рис. 375) изображена вершина A куба, которая од-

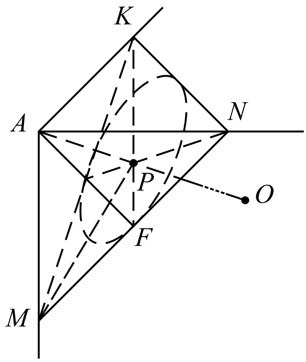


Рис. 375.

новременно является вершиной конуса. На продолжении AP находится точка O — центр куба — точка пересечения его диагоналей. Если a —

ребро куба, то радиус вписанной сферы $R = \dfrac{a}{2}$. Вписанная сфера в точке P пересекает диагональ куба. $OP = R$, а так как $OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, то $AP = AO - R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

Основание конуса находится в плоскости, касательной к сфере, значит, плоскость KMN перпендикулярна радиусу OP, то есть $AO \perp KMN$. Отрезок AO образует равные углы с ребрами, выходящими из вершины A. Из равенства прямоугольных треугольников ANP, AKP и AMP следует, что равны прямоугольные треугольники AMN, ANK, AMK. Таким образом, основание тетраэдра $AMNK$ — равносторонний треугольник, его боковые ребра равны и взаимно перпендикулярны. Основанием конуса является окружность, вписанная в $\triangle MNK$, AP — его высота, AF — образующая. Обозначим боковое ребро тетраэдра x, тогда $x\sqrt{2}$ — ребро основания, $\dfrac{x\sqrt{2}}{2}$ — апофема AF (образующая конуса), $\dfrac{x}{\sqrt{6}}$ — радиус вписанной в основание окружности (радиус конуса), $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ — высота пирамиды (конуса) AP.

Выше было показано, что $AP = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$, значит, $\dfrac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, то есть $x = \dfrac{a}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)$. $AF = \sqrt{AP^2 + PF^2} = \sqrt{\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^2}{6}} = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

$$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot PF \cdot AF = \pi\frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi a^2\left(12 - 6\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}\cdot 4} = \frac{\pi\left(\sqrt[4]{3}\right)^2 \cdot 6\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2\sqrt{3}\cdot 4} =$$
$$= \frac{3\pi\left(2 - \sqrt{3}\right)}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3\pi\left(2 - \sqrt{3}\right)}{4}$.

1384. Сделаем чертеж (рис. 376).

Изобразим часть сечения AA_1C_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 377).

O — центр куба (точка пересечения его диагоналей) и центр вписанного шара радиуса R, M — точка касания большого шара с гранью $A_1B_1C_1D_1$, M_1 — точка касания малого шара радиуса r с гранью $A_1B_1C_1D_1$, F — точка касания шаров.

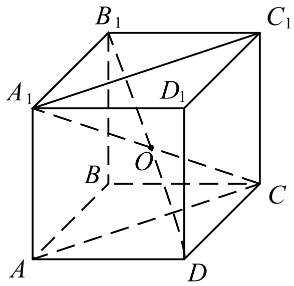


Рис. 376.

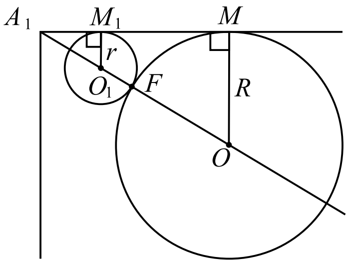


Рис. 377.

Пусть a — ребро куба. Так как $A_1C = a\sqrt{3}$, то $A_1O = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $OM = R = \dfrac{a}{2}$, $O_1O = r + R = r + \dfrac{a}{2}$. Из подобия треугольников $A_1M_1O_1$ и A_1MO получаем: $\dfrac{M_1O_1}{MO} = \dfrac{A_1O_1}{A_1O}$ или $\dfrac{r\cdot 2}{a} = \dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2} - r - \dfrac{a}{2}\right)\cdot 2}{a\sqrt{3}}$,

$r\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - r - \dfrac{a}{2}$, $r\left(\sqrt{3}+1\right) = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$. По условию $a = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$, значит, $r = \dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(\sqrt{3}+1\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = 1$. Следовательно, объем малого шара: $V = \dfrac{4\pi\cdot 1^2}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.

Ответ: $\dfrac{4\pi}{3}$.

1385. Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед.

$a = AD = 2$, $b = DC = 1$, $h = DD_1 = 2$, см. рис. 378.

Найти d — расстояние между D_1 и AC.

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть V — объем данного параллелепипеда. D_1D_2 — продолжение ребра DD_1, причем $DD_2 = \dfrac{h}{2}$. Точки A_2, B_2, C_2 — середины соответствующих ребер. Легко понять, что $V_{B_2ABC} = V_{D_2ACD}$. Плоскость $A_2B_1C_2D$ делит данный параллелепипед на две симметричные относительно центра параллелепипеда фигуры. Учитывая, что $V_{B_2ABC} = V_{D_2ACD}$, заключаем, что $V_1 = V_{AB_2CD_2A_2B_1C_2D} = \dfrac{V}{2}$, то есть $V = 2V_1$. Легко понять, что высота призмы $A_2B_1C_2DAB_2CD_2$ равна d. Пусть $S = S_{AB_2CD_2}$. Тогда $V_1 = Sd$, $V = 2V_1 = 2Sd \Rightarrow d = \dfrac{V}{2S}$. $S = 2S_{A_2B_1D}$.

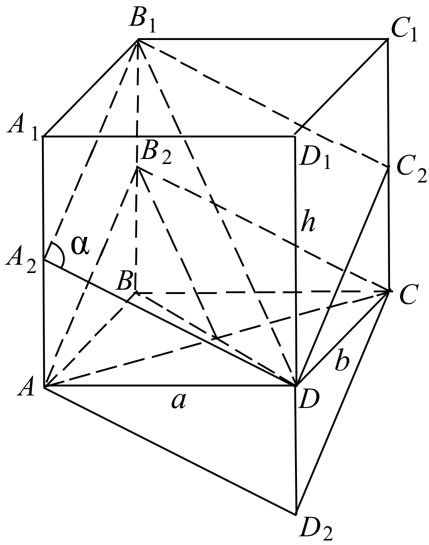


Рис. 378.

Пусть $\angle B_1A_2D = \alpha$. Дальнейший план таков: по теореме косинусов находим $\cos\alpha$, затем $\sin\alpha$ и, наконец, $S_{A_2B_1D}$.

$$DA_2 = \sqrt{\frac{h^2}{4} + a^2}, \quad A_2B_1 = \sqrt{\frac{h^2}{4} + b^2}, \quad DB_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2},$$

$$DB_1^2 = DA_2^2 + A_2B_1^2 - 2DA_2 \cdot A_2B_1 \cdot \cos\alpha.$$

$$a^2 + b^2 + h^2 = \frac{h^2}{4} + a^2 + \frac{h^2}{4} + b^2 - 2 \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{h^2}{4}\right)\left(b^2 + \frac{h^2}{4}\right)} \cdot \cos\alpha.$$

$$\frac{h^2}{2} = -2 \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{h^2}{4}\right)\left(b^2 + \frac{h^2}{4}\right)} \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = -\frac{h^2}{4 \cdot \sqrt{\left(a^2 + \frac{h^2}{4}\right)\left(b^2 + \frac{h^2}{4}\right)}},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{h^4}{16\left(a^2+\frac{h^2}{4}\right)\left(b^2+\frac{h^2}{4}\right)}}.$$

$$S = 2\cdot S_{A_2B_1D} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot A_2B_1\cdot A_2D\cdot\sin\alpha,\quad S = A_2B_1\cdot A_2D\cdot\sin\alpha,$$

$$S = \sqrt{b^2+\frac{h^2}{4}}\cdot\sqrt{a^2+\frac{h^2}{4}}\cdot\sqrt{1 - \frac{h^4}{16\left(a^2+\frac{h^2}{4}\right)\left(b^2+\frac{h^2}{4}\right)}},$$

$$S = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{16\left(a^2+\frac{h^2}{4}\right)\left(b^2+\frac{h^2}{4}\right) - h},$$

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{\left(a^2b^2+(a^2+b^2)\frac{h^2}{4}\right)\cdot 16},$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2b^2+h^2(a^2+b^2)}.$$

$$d = \frac{V}{2S} = \frac{abh}{\sqrt{4a^2b^2+h^2(a^2+b^2)}}.$$

Подставим теперь вместо a, b, h их значения:

$$d = \frac{2\cdot1\cdot2}{\sqrt{4\cdot4\cdot1+4(4+1)}} = \frac{4}{\sqrt{16+20}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

1386. Дано: $SABCD$ — четырехугольная пирамида с вершиной S (см. рисунок 379), $SA = SB = SC = SD$, $ABCD$ — прямоугольник, $AB = 4$, $BC = 2$, M — середина AS, $P \in SD$, $BM||$пл. PAC, $V_{PACD} = \frac{16}{9}$.

Найти: расстояние от точки S до плоскости PAC.

*Решение.*Так как$SA = SB = SC = SD$, то вершина S проектируется на основание в точку O, равноудаленную от вершин основания, то есть точка O — центр описанной окружности прямоугольника $ABCD$. Значит, $O = AC \cap BD$. Пусть N — середина ребра SC, тогда MN — средняя линия в $\triangle ASC \Rightarrow MN \parallel AC$. Так как $MN \parallel AC$ и $BM \parallel$ пл. PAC, то пл. $BMN \parallel$ пл. PAC. Введём точку $K = MN \cap SO$. Так как MN — средняя линия в $\triangle ASC$, то $OK = KS$. Так как прямая $KB =$ пл. $BMN \cap$ пл. BSD, прямая $PO =$ пл. $PAC \cap$ пл. BSD и

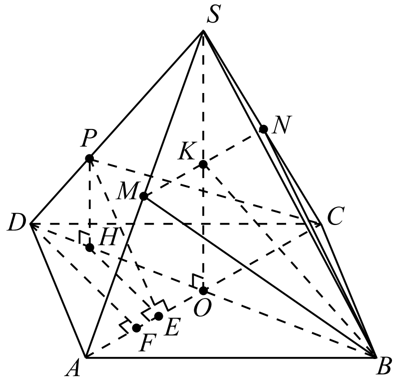


Рис. 379.

пл. $BMN \parallel$ пл. PAC, то $BK \parallel PO$.

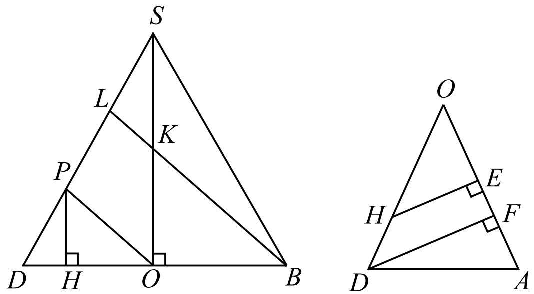


Рис. 380.

Рассмотрим $\triangle BSD$ (см. рисунок 380). Пусть $L = BK \cap SD$. Так как $BL \parallel OP$ и $OD = OB$, то OP — средняя линия в $\triangle BLD \Rightarrow DP = PL$. Так как $KL \parallel OP$ и $OK = SK$, то LK — средняя линия в $\triangle SPO \Rightarrow SL = PL$. Таким образом, получили, что $DP = PL = LS$ или, что то же самое, $DP = \dfrac{1}{3}DS$. Опустим из точки P перпендикуляр PH на прямую DB, тогда $PH \parallel SO$ и треугольники PHD и SOD подобны $\Rightarrow \dfrac{DP}{DS} = \dfrac{PH}{SO} = \dfrac{DH}{DO} \Rightarrow$ $PH = \dfrac{1}{3}SO$ и $DH = \dfrac{1}{3}DO$. Так как $PH \parallel SO$, то $PH \perp$ пл. ABC, а следовательно, PH — высота пирамиды $PACD$.

Поэтому $V_{PACD} = \frac{1}{3}PH \cdot S_{ACD} = \frac{16}{9}$, $\frac{1}{3}PH \cdot \frac{1}{2}AD \cdot DC = \frac{16}{9}$,

$$\frac{1}{3}PH \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{16}{9} \Rightarrow PH = \frac{4}{3} \Rightarrow SO = 3PH = 4.$$

Опустим из H перпендикуляр HE на AC. Так как $SO \perp HE$ и $AC \perp HE$, то $HE \perp$ пл. SAC. А так как $PH \parallel$ пл. SAC, то длина HE равна высоте пирамиды $SPAC$, опущенной из P на плоскость SAC. Следовательно, $V_{SPAC} = \frac{1}{3}HE \cdot S_{SAC}$.

Пусть h — искомое расстояние от S до плоскости PAC. Тогда $V_{SPAC} = \frac{1}{3}h \cdot S_{PAC}$.

Таким образом, $\frac{1}{3}HE \cdot S_{SAC} = \frac{1}{3}h \cdot S_{PAC} \Rightarrow h = \frac{HE \cdot S_{SAC}}{S_{PAC}}$. Так как $HE \perp AC$ и $PH \perp AC$, то $AC \perp$ пл. $PHE \Rightarrow AC \perp PE$. Значит, PE — высота треугольника PAC. Тогда $S_{PAC} = \frac{1}{2}PE \cdot AC$, а $S_{SAC} = \frac{1}{2}SO \cdot AC$. Поэтому

$$h = \frac{HE \cdot \frac{1}{2}SO \cdot AC}{\frac{1}{2}PE \cdot AC} = \frac{HE \cdot SO}{PE}.$$

Найдём HE. Для этого рассмотрим $\triangle OAD$ (см. рисунок 380), в котором $OA = OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5}$. Проведем в $\triangle OAD$ высоту DF, тогда треугольники OHE и ODF подобны. Следовательно, $\frac{HE}{DF} = \frac{OH}{OD} = \frac{2}{3} \Rightarrow HE = \frac{2}{3}DF$. $S_{ODA} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = 2$.

$S_{ODA} = \frac{1}{2}OA \cdot DF \Rightarrow DF = \frac{2 \cdot S_{ODA}}{OA} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

$HE = \frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{8\sqrt{5}}{15}$. $PE = \sqrt{PH^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{320}{225}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Тогда $h = \dfrac{\dfrac{8\sqrt{5}}{15}\cdot 4}{\dfrac{4\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{8}{3}$.

Ответ: $\dfrac{8}{3}$.

1387. $SABCD$ — правильная пирамида, SO — высота пирамиды (рис. 381).

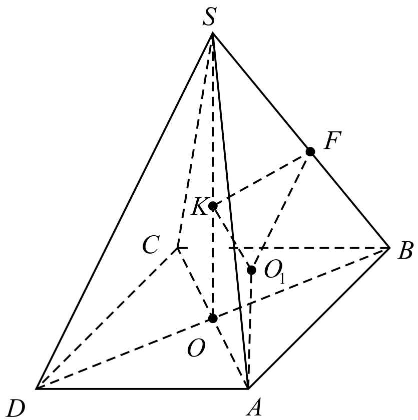


Рис. 381.

Пусть O_1 — центр шара, касающегося плоскости основания $ABCD$ в точке A и прямой BS. Тогда $O_1A \perp (ABC)$ как радиус, проведенный в точку касания сферы и плоскости, $SO \perp (ABC)$, значит, $O_1A \parallel SO$. $AO \perp BD$, $AO \perp SO$, поэтому $AO \perp (BSD)$. Проведем $O_1K \parallel AO$, тогда
$O_1K \perp (BSD)$, O_1F — наклонная к плоскости BSD, KF — проекция наклонной O_1F на плоскость BSD. $O_1F \perp SB$, так как касается BS, значит, $KF \perp SB$ по теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах.

Рассмотрим $\triangle SOB$.

$OB = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$

$= \frac{\sqrt{14}}{2}$. $\triangle SOB \sim \triangle SFK$ ($\angle S$ — общий, $\angle SOB = \angle SFK = 90°$).

$\dfrac{SO}{SF} = \dfrac{SB}{SK}$, $SF = SB - BF$, $BF = AB$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, $BF = 1$. $SF = 2-1 = 1$. $O_1K \parallel AO$, значит, OKO_1A — прямоугольник, отсюда $OK = O_1A = R$, R — радиус шара.

$$\frac{\frac{\sqrt{14}}{2}}{1} = \frac{2}{\frac{\sqrt{14}}{2} - R},\ \frac{\sqrt{14}}{2}\left(\frac{\sqrt{14}}{2} - R\right) = 2,\ \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{14}}{2}\cdot R = 2,$$

$$R = \frac{3\cdot 2}{2\cdot\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$.

1388. Сделаем чертеж (рис. 382).

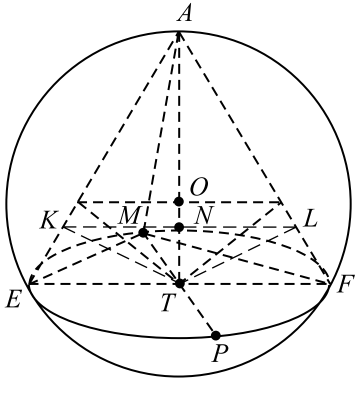


Рис. 382.

1) $\triangle EMF$ — прямоугольный, так как EF — диаметр. $V_{\text{пир.}EFMA}$ — наибольший, если высота AT — наибольшая и S_{EMF} — наибольшая. S_{EMF} — наибольшая, если $S_{EMF} = \dfrac{1}{2}S_{\text{кв.}EMFP}$, таким образом, $EM = MF$, $AT = R + OT = 4 + 2 = 6$, где R — радиус сферы.

2) Найти угол между пл. TML и пл. TMK. Т. к. $EF \perp MP$ (диагонали квадрата), то $KT \perp MT$ (по теореме о 3-х перпендикулярах), аналогично $LT \perp MT$. Значит, искомый угол LTK: $\angle LTK = 2\angle LTO$ (так как

$\triangle KTL$ — равнобедренный), $KL = \dfrac{3}{4}EF$. Из $\triangle EOT$ имеем: $ET =$
$= \sqrt{EO^2 - OT^2}$, $ET = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$, $EF = 4\sqrt{3}$, $KL = \dfrac{3}{4} \cdot 4\sqrt{3} =$
$= 3\sqrt{3}$. $OL = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $OT = \dfrac{1}{4}AT$; $OT = 6 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2}$. Из $\triangle LTO$ имеем: $\operatorname{tg}\angle LTO = \dfrac{LO}{OT} = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot 2}{2\cdot 3}$, $\angle LTO = 60^\circ$, $\angle LTK = 120^\circ$, $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1389. Сделаем чертеж (рис. 383).

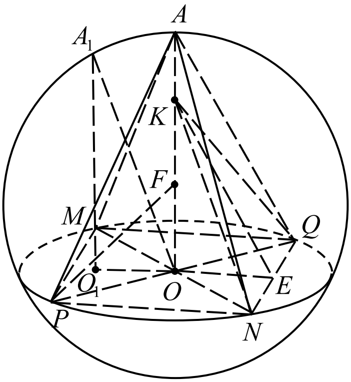


Рис. 383.

$V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot H$. Объем пирамиды наибольший, если площадь основания и высота принимают наибольшие значения.

1) Пусть R — радиус сферы, описанной около пирамиды. Так как четырехугольник $MPNQ$ вписан в окружность сечения радиуса r, то его диагонали MN и PQ — хорды этой окружности, и поэтому $MN \leqslant 2r$ и $PQ \leqslant 2r$. Отсюда для площади S четырехугольника $MPNQ$ имеем неравенство

$S = \dfrac{1}{2}MN \cdot PQ \cdot \sin\alpha \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cdot \sin\angle NOQ$. При этом $S = 2r^2$ только если $\sin\angle NOQ = 1$, $\angle NOQ = 90°$, $MN \perp PQ$, то есть из всех четырехугольников, вписанных в данное сечение сферы, наибольшую площадь имеет квадрат $MPNQ$.

2) Пусть H — высота пирамиды $AMPNQ$, равная расстоянию от точки A до плоскости MPQ. Допустим точка A находится в положении A_1, то есть $A_1O_1 \perp (MPO)$, тогда $A_1O_1 = A_1O \cdot \sin AA_1OO_1$. Значение A_1O_1 — наибольшее, если $\sin\angle A_1OO_1 = 1$, то есть $\angle A_1OO_1 = 90°$. Тогда $H = AO$. Таким образом, пирамида $AMPNQ$ при указанных условиях имеет наибольший объем, если ее основание $MPNQ$ — квадрат, вписанный в окружность сечения радиуса r, а вершина A проектируется в центр квадрата, то есть $AO \perp MPQ$. Отсюда следует, что пирамида $AMPNQ$ — правильная.

3) F — центр сферы, описанной около правильной пирамиды $AMPNQ$. $FA = FP = R = 5$. O — центр окружности сечения, $OP = OM = = OQ = ON = r$. $\triangle AOP$: $OP^2 = \sqrt{PF^2 - OF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, тогда диагональ квадрата $MPNQ$ $PQ = 8$, а сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$, $PN = 4\sqrt{2}$.

4) Найдём линейный угол между плоскостями KQN и MPQ. В $\triangle NKQ$ проведем высоту KE, тогда $OE \perp NQ$ по теореме обратной теореме о трёх перпендикулярах, значит $\angle KEO$ — искомый.

5) $\triangle KOE$: $\operatorname{tg}\angle KEO = \dfrac{OK}{OE}$, $OK = \dfrac{5}{8}AO = \dfrac{5}{8}(AF+OF) = \dfrac{5}{8}(5+3) = = 5$, $OE = \dfrac{1}{2}PN = \dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. $\operatorname{tg}\angle KEO = \dfrac{5}{2\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$. Обозначим $\angle KEO = \alpha$, $0° < \alpha < 90°$. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$, $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \dfrac{25}{8} + 1 = = \dfrac{33}{8}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{8}{33}$ $\sin^2\alpha = \dfrac{25}{33}$, угол α — острый, значит $\sin\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{33}}$.

Ответ: $\dfrac{5}{\sqrt{33}}$.

1390. Рассмотрим рисунок 384.

$V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h$. Поскольку $S_{\text{осн.}} = S_{ABCD}$, то пирамида будет иметь наибольший объём, при наибольшем возможном значении h. Это условие выполняется при $h = R_{\text{сф.}}$. Центральное сечение сферы — окружность $R = R_{\text{сф.}}$. В неё по условию вписан прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Тогда диагональ прямоугольника есть диаметр сферы. Например,

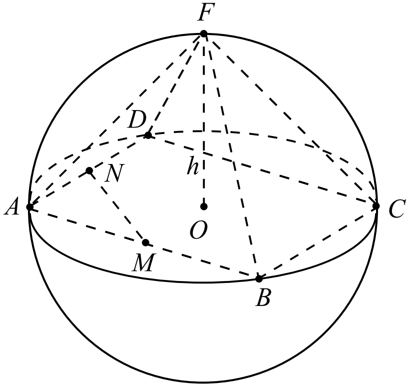


Рис. 384.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$; $BD = 10$.
Значит, $h_{\text{пир.}} = R_{\text{сф.}} = 5$ см. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед с основанием $ANOM$ и высотой OF. Тогда AF — его диагональ, NM — диагональ основания.
$a = AM = AB : 2 = 3\,(\text{см})$; $b = AN = AD : 2 = 4\,(\text{см})$;
$h = FO = 5$ (см) — его измерения. Учитывая, что NM — средняя линия $\triangle ABD$, $NM = BD : 2 = 5$ (см). Тогда по формуле расстояния между диагональю прямоугольного параллелепипеда и скрещивающейся с ней диагональю основания найдём расстояние d между AF и

$$NM{:}d = \frac{abh}{\sqrt{4a^2b^2 + h^2(a^2 + b^2)}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 16 + 25(16 + 9)}} = \frac{60}{\sqrt{576 + 625}} = \frac{60}{\sqrt{1201}}.$$

Ответ: $\frac{60}{\sqrt{1201}}$.

1391. Сделаем чертеж (рис. 385).

$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$. $V_{\text{пир.}}$ наибольший, если $S_{\text{осн.}}$ и h принимают наибольшие значения. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, так как один из его углов опирается на диаметр окружности.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} 2r \cdot 2r \cos\angle B \sin\angle B = r^2 \sin 2\angle B$, где r — радиус сечения. Площадь наибольшая при $\sin 2\angle B = 1$, $2\angle B = 90°$,

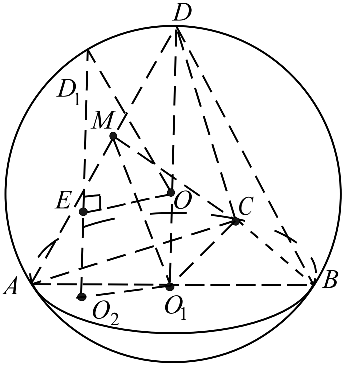


Рис. 385.

$\angle B = 45°$, то есть при условии, что $\triangle ABC$ — равнобедренный. Рассмотрим возможные размеры высоты пирамиды.

Пусть точка D находится в положении D_1, а сечение сферы плоскостью расположено ниже центра сферы, $D_1O_2 \perp ABC$; проведем отрезок $OE \perp D_1O_2$, тогда OEO_2O_1 — прямоугольник и $O_2E = OO_1$; $D_1O_2 = OO_1 + D_1E$; $D_1O_2 = OO_1 + D_1O \cdot \sin\angle EOD_1 = OO_1 + R \cdot \sin\angle EOD_1$, где R — радиус сферы. D_1O_2 принимает наибольшее значение, если $\sin\angle EOD_1 = 1$. $\angle EOD_1 = 90°$, то есть при условии, что точка D лежит на диаметре сферы, проходящем через точку O_1 так, что центр сферы (точка O) — между D и O_1. $DO_1 = 20 + 10 = 30$. Чтобы найти угол между CM и плоскостью ADB, необходимо найти проекцию CM на плоскость ADB. $DO_1 \perp ABC$, значит, $DO_1 \perp CO_1$, $CO_1 \perp AB$, то $CO_1 \perp (ABD)$, значит MO_1 — проекция MC на плоскость ABD, тогда $\angle CMO_1$ — угол между прямой CM и плоскостью ADB. Из $\triangle OO_1B$: $r = O_1B = \sqrt{OB^2 - OO_1^2} = \sqrt{20^2 - 10^2} = 10\sqrt{3}$. $O_1C = 10\sqrt{3}$.

В $\triangle ADB$ MO_1 — средняя линия. $MO_1 = \dfrac{1}{2}BD$.

Из $\triangle DO_1B$: $BD = \sqrt{DO_1^2 + O_1B^2} = \sqrt{30^2 + (10\sqrt{3})^2} = 20\sqrt{3}$.

$MO_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 20\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$. Таким образом, $\triangle MO_1C$ — прямоугольный, равнобедренный. $\operatorname{tg}\angle CMO_1 = \operatorname{tg} 45° = 1$.

Ответ: 1.

1392. $V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h$ (рис. 386). Поэтому $V_{\text{пир.}}$ наибольший, если $S_{\text{осн.}}$

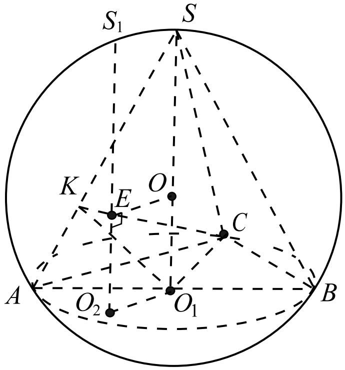


Рис. 386.

и h принимают максимально возможные значения.

$\triangle ABC$ прямоугольный, так как $\angle C$ опирается на диаметр сечения AB. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \dfrac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r\cos\angle B \cdot \sin\angle B = r^2 \sin 2\angle B$, где r — радиус сечения. Площадь наибольшая при $\sin 2\angle B = 1$. Тогда $2\angle B = 90°$, $\angle B = 45°$, то есть при условии, что $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Пусть точка S находится в положении S_1, а сечение сферы плоскостью расположено ниже центра сферы. $S_1O_2 \perp ABC$. Проведём $OE \perp S_1O_2$, тогда OEO_2O_1 — прямоугольник, $O_2E = OO_1$.
$S_1O_2 = OO_1 + R\sin\angle EOS_1 = h$. Величина h максимальна, если $\sin\angle EOS_1 = 1$, $\angle EOS_1 = 90°$. Значит, точка S лежит на диаметре сферы, проходящем через точку O. Поэтому центр сферы (точка O) лежит между точками S и O_1.

Построим линейный угол двугранного угла $CASB$. $SO_1 \perp (ABC)$, значит, $SO_1 \perp O_1C$; $O_1C \perp AB$, так как O_1C — медиана к основанию равнобедренного треугольника ABC. Тогда $O_1C \perp (ABS)$. Проведем $O_1K \perp AS$, тогда $CK \perp AS$ по теореме о трёх перпендикулярах и $\angle O_1KC$ — искомый. $O_1A = O_1B = O_1C = r = 48 : 2 = 24$. Найдём R из $\triangle OO_1B$. $R = OB = \sqrt{OO_1^2 + O_1B^2} = \sqrt{49 + 576} = 25$;
$SO_1 = 7 + 25 = 32$.

В $\triangle ASO_1$ боковое ребро пирамиды
$AS = \sqrt{32^2 + 24^2} = 8\sqrt{4^2 + 3^2} = 40$. Тогда
$O_1K = \dfrac{AO_1 \cdot O_1S}{AS} = \dfrac{24 \cdot 32}{40} = \dfrac{96}{5}$. Из $\triangle KO_1C$: $\operatorname{tg}\angle O_1KC = \dfrac{O_1C}{O_1K} =$

$= \dfrac{24 \cdot 5}{24 \cdot 4} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25.$

Ответ: 1,25.

1393. Будем обозначать радиус оснований цилиндра и конусов через R, их высоту через H и радиус шара через r. Пусть точки M и N — центры нижнего и верхнего оснований цилиндра соответственно, а точки A и B — вершины конусов, точка C — центр основания конуса с вершиной A, точка F — точка касания окружностей оснований конусов, точка P — центр шара, точка O — точка касания шара и плоскости нижнего основания цилиндра, а точка E — точка касания шара и боковой поверхности конуса с вершиной A. Разберем подробно касание шара и конуса с вершиной A. Для этого рассмотрим сечение плоскостью PAC (см. рис. 387).

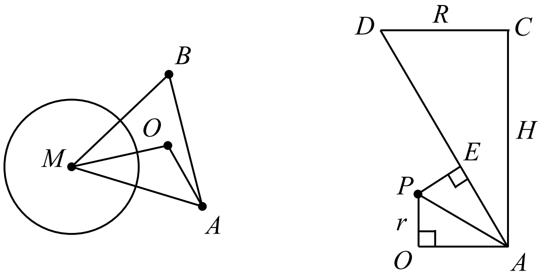


Рис. 387.

Пусть D — точка пересечения этой плоскости с окружностью основания конуса с вершиной A. Из $\triangle ADC \Rightarrow \operatorname{tg}\angle DAC = \dfrac{R}{H} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $\angle DAC = 30^\circ$, а потому $\angle DAO = 90^\circ - \angle DAC = 60^\circ$. Так как точка P равноудалена от прямых AE и AO, то AP — биссектриса угла $\angle DAO$, и значит, $\angle PAO = 30^\circ$. Тогда из $\triangle AOP \Rightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{r}{OA} \Rightarrow$ $OA = r\sqrt{3}$. Аналогично показывается, что $OB = r\sqrt{3}$. Так как $OA = OB$, то точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB в плоскости MAB. Учитывая, что треугольник MAB равносторонний (все его стороны равны $2R$), получаем, что луч MO — биссектриса угла AMB. Так как шар касается поверхности цилиндра, то $OM = R + r$. По теореме косинусов из $\triangle AMO \Rightarrow$

$OA^2 = OM^2 + AM^2 - 2 \cdot OM \cdot AM \cos 30^\circ =$

$= (R+r)^2 + 4R^2 - 4R(R+r)\dfrac{\sqrt{3}}{2} =$

$= R^2+r^2+2Rr+4R^2-2R^2\sqrt{3}-2Rr\sqrt{3} = R^2(5-2\sqrt{3})-2R(\sqrt{3}-1)r+r^2.$
С другой стороны, $OA^2 = 3r^2$. Таким образом, получаем уравнение для нахождения r:
$R^2(5-2\sqrt{3})-2R(\sqrt{3}-1)r+r^2 = 3r^2, 2r^2+2R(\sqrt{3}-1)r-R^2(5-2\sqrt{3}) = 0,$

$$r_{1,2} = \frac{-R(\sqrt{3}-1) \pm \sqrt{R^2(\sqrt{3}-1)^2 + 2R^2(5-2\sqrt{3})}}{2} =$$

$= \dfrac{-R(\sqrt{3}-1) \pm R\sqrt{14-6\sqrt{3}}}{2}$. Так как радиус — положительная величина, то $r = \dfrac{-R(\sqrt{3}-1) + R\sqrt{14-6\sqrt{3}}}{2} =$

$$= \frac{R\left(\sqrt{14-6\sqrt{3}} - \sqrt{3}+1\right)}{2} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{14-6\sqrt{3}} + \sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{14-6\sqrt{3}} - (\sqrt{3}-1)\right)}{2} =$$

$$= \frac{14-6\sqrt{3}-(4-2\sqrt{3})}{2} = \frac{10-4\sqrt{3}}{2} = 5-2\sqrt{3}.$$

Ответ: $5-2\sqrt{3}$.

1394. 1. Пусть O — центр сферы радиуса R, описанной около пирамиды $FABC$ (см. рис. 388). По условию $4\pi R^2 = 48$, отсюда $R = 2\sqrt{3}$. Так как

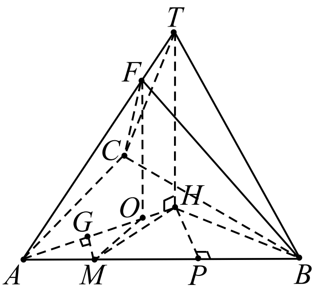


Рис. 388.

$OA = OB = OC$ и O лежит в плоскости ABC, то O — центр правильного треугольника ABC.

2. $FABC$ — правильная пирамида, поэтому FO — высота пирамиды. Опустим из точки T перпендикуляр TH на прямую AO, см. рис. 388. Так как $TH \parallel FO$, то $TH \perp ABC$, и, значит, TH — высота пирамиды $TAMC$. По условию $TM = TB$, то есть отрезки HM и HB — проекции равных наклонных и, следовательно, $HM = HB$. Пусть точка P — проекция H на прямую AB, тогда $PM = PB$.

3. Объем V пирамиды $TAMC$ найдем по формуле: $V = \frac{1}{3} \cdot TH \cdot S_{AMC}$. $S_{AMC} = \frac{1}{2} AM \cdot CK$, где CK — высота $\triangle ABC$. Так как $\triangle ABC$ правильный и $R = 2\sqrt{3}$ — радиус его описанной окружности, то $CK = \frac{3}{2}R = 3\sqrt{3}$, $AB = \sqrt{3}R = 6$. Пусть точка G — проекция точки M на прямую AO. По условию $AM = MO$, следовательно, $AG = GO$, $AG = \frac{1}{2}AO = \sqrt{3}$. Из $\triangle AMG$: $\angle MAG = 30°$, $AM = \dfrac{AG}{\cos\angle MAG} = \sqrt{3} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2$. Имеем: $MB = AB - AM = 4$, $MP = \frac{1}{2}MB = 2$, $AP = AM + MP = 4$, $AH = \dfrac{AP}{\cos 30°} = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Так как $AO = FO$, то прямоугольный треугольник AFO — равнобедренный и $\angle FAO = 45°$, поэтому $TH = AH = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Итак, $V = \frac{1}{3}TH \cdot \frac{1}{2}AM \cdot CK = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} = 8$.

Ответ: 8.

1395.

1. Пусть R — радиус сферы, описанной около пирамиды $FABC$, а точка O — её центр. Так как $OA = OB = OC$ и O лежит в плоскости ABC, то O — центр правильного треугольника ABC.

2. Пирамида $FABC$ правильная, поэтому FO — её высота. Опустим из точки T перпендикуляр TH на прямую AO, см. рис. 388, $TH \parallel FO$, TH — высота пирамиды $TAMC$. Пусть P — проекция точки H на прямую AB. Так как по условию $TM = TB$, то $HM = HB$, $PM = PB$.

3. Выразим объем V пирамиды $TAMC$ через R. $V = \frac{1}{3} \cdot TH \cdot S_{AMC}$,

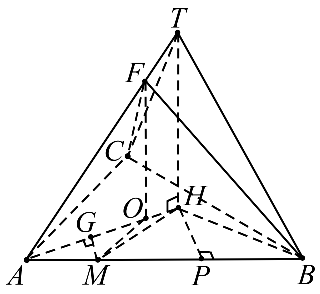


Рис. 389.

$S_{AMC} = \frac{1}{2}AM \cdot CK$, где CK — высота $\triangle ABC$. Так как $\triangle ABC$ правильный, и R — радиус его описанной окружности, то $CK = \frac{3}{2}R$, $AB = \sqrt{3}R$. Пусть G — проекция точки M на прямую AO. По условию $AM = MO$, следовательно, $AG = GO$, $AG = \frac{1}{2}AO = \frac{R}{2}$. Из $\triangle AMG$: $\angle MAG = 30°$, $AM = \frac{AG}{\cos \angle MAG} = \frac{R}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $\frac{AM}{AB} = \frac{R}{\sqrt{3}} : \sqrt{3}R = \frac{1}{3}$ $BM = \frac{2}{3}AB$, $MP = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{3}AB$, $AP = AM + MP = \frac{2}{3}AB = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$, $AH = AP : \cos 30° = \frac{4}{3}R$. Так как $AO = FO$, то прямоугольный треугольник AFO — равнобедренный и $\angle FAO = 45°$, поэтому $TH = AH = \frac{4}{3}R$. Итак, $V = \frac{1}{3}TH \cdot \frac{1}{2}AM \cdot CK = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}R \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2}R = \frac{R^3}{3\sqrt{3}}$. По условию, $V = 24\sqrt{3}$, следовательно, $R^3 = 24\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 216$, $R = 6$.

Ответ: 6.

1396. 1) Так как параллелограмм $ABCD$ можно вписать в окружность, то он является прямоугольником. Пусть O — центр сферы, описанной вокруг $SABCD$, а R — радиус этой сферы, то есть $SO = CO = R$, (см. рис. 390). Поскольку точка O равноудалена от точек A, B, C, D, то проекция точки O на плоскость ABC является центром описанной вокруг $ABCD$ окружности, то есть совпадает с точкой K. Таким образом, OK — перпендикуляр к плоскости ABC, а SK — высота пирамиды $SABCD$. Так как $CK \perp SK$

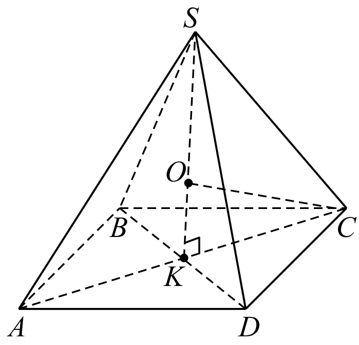


Рис. 390.

и $DK \perp SK$, то $\angle CKD$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями ASC и BSD, то есть тем углом, синус которого подлежит определению.

2) По условию, $SO : OK = 13 : 5 \Rightarrow OK = \dfrac{5}{13}R$. Из $\triangle COK$ имеем: $CK = \sqrt{CO^2 - OK^2} = \dfrac{12}{13}R$. Но $CK = \dfrac{AC}{2} = 6 \Rightarrow \dfrac{12}{13}R = 6$, $R = \dfrac{13}{2}$, $SK = SO + OK = \dfrac{18}{13}R = 9$.

3) Объём V пирамиды $SABCD$ равен: $V = \dfrac{1}{3}SK \cdot S_{ABCD} = 3S_{ABCD}$. По условию, $V = 108 \Rightarrow S_{ABCD} = 36$. Воспользовавшись формулой, выражающей площадь четырёхугольника через длины диагоналей, имеем: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\angle CKD$, $\dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \sin\angle CKD = 36$, $\sin\angle CKD = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

1397. Решение данной задачи разобьём на несколько пунктов.

1. Пусть O — центр сферы, описанной вокруг пирамиды $ABCD$, см. рис. 391. Так как BD — диаметр этой сферы, то $\angle BCD = \angle BAD = 90°$. Поскольку вершина A равноудалена от вершин B, C, D, то её проекция на плоскость BCD является центром описанной вокруг $\triangle BCD$ окружности, то есть совпадает с точкой O. Таким образом, AO — перпендикуляр к плоскости BCD и, значит, плоскость ABD перпендикулярна плоскости BCD. Следовательно, $\angle CBD$ есть угол между ребром BC и плоскостью ABD (прямая BD является проекцией прямой BC на плоскость

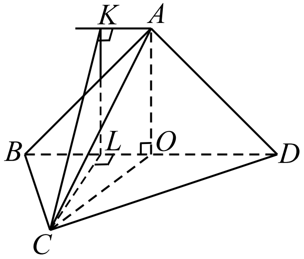


Рис. 391.

ABD). Обозначим через R — радиус сферы, описанной вокруг $ABCD$, а через α величину угла $\angle CBD$. Тогда $AO = CO = R$, $BD = 2R$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $BC = 2R\cdot\cos\alpha$, $CD = 2R\cdot\sin\alpha$.

2. Через вершину A проведём прямую, параллельную ребру BD, и пусть K — проекция вершины C на эту прямую, а L — проекция точки K на BD. Так как $AK \parallel BD$, то угол между рёбрами AC и BD равен $\angle KAC$. Заметим, что $\sin\angle KAC = \dfrac{CK}{AC}$.

3. Из $\triangle KLC$ и $\triangle ADC$ по теореме Пифагора имеем: $CK = \sqrt{KL^2 + CL^2} = \sqrt{R^2 + CL^2}$, $AC = \sqrt{2}R$. Поскольку $BD \parallel AK$, $AK \perp CK$, то $BD \perp CK$, и по теореме о трёх перпендикулярах $BD \perp CL$, то есть CL — высота в $\triangle BCD$. Найдём длину CL, выразив площадь $\triangle BCD$ двумя способами: $2S_{BCD} = CL\cdot BD = BC\cdot CD$. Имеем,

$$CL = \frac{BC\cdot CD}{BD} = 2R\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2R\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2}R}{2},$$

$$CK = \sqrt{R^2 + CL^2} = \frac{\sqrt{3}R}{\sqrt{2}}.$$

4. $\sin\angle KAC = \dfrac{\sqrt{3}R}{\sqrt{2}} : (\sqrt{2}R) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Итак, $\angle CAK = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, градусная мера $\angle CAK$ равна 60°.

Ответ: 60°.

1398. Решение данной задачи разобьём на несколько пунктов.

1. Через вершину D проведём прямую, параллельную ребру AB, и пусть K — проекция вершины C на эту прямую, а L — проекция точки K на AB, см. рис. 392. Так как центр описанной вокруг $ABCD$ сферы — точка O, лежит на ребре AB, а вершина D равноудалена от вершин A, B, C, то $\angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$, а прямая DO перпендикулярна плос-

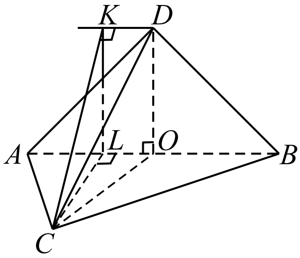


Рис. 392.

кости ABC. Поскольку прямая AB является проекцией прямой AC на плоскость ABD, то угол между ребром AC и гранью ABD равен $\angle BAC$, и, значит, $\cos\angle BAC = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

2. Радиус сферы, описанной вокруг $ABCD$, обозначим через R, тогда $AC = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cdot AB = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}R$, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}R$.
По теореме Пифагора из $\triangle CLK$ и $\triangle COD$ имеем:
$CK = \sqrt{KL^2 + CL^2} = \sqrt{R^2 + CL^2}$, $CD = \sqrt{CO^2 + DO^2} = \sqrt{2}R$.
Заметим, что $AL \perp CK$, так как $AL \parallel KD$, $KD \perp CK$. Поэтому, по теореме о трёх перпендикулярах, $AL \perp CL$, то есть CL — высота в $\triangle ABC$.
Найдём длину CL, выразив площадь $\triangle ABC$ двумя способами:
$2S_{ABC} = CL \cdot AB = AC \cdot BC$, $AC \cdot BC = R^2$, $CL = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{R}{2}$.
Далее, $CK = \sqrt{R^2 + CL^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}R$, $\sin\angle CDK = \dfrac{CK}{CD} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

3. Чтобы найти расстояние d между прямыми AB и CD, выразим объём пирамиды $ACOD$ по двум формулам:
$V = \dfrac{DO}{3} \cdot S_{AOC}$ и $V = \dfrac{d}{6} \cdot AO \cdot CD \cdot \sin\alpha$, где α — угол между AB и CD. Из первой формулы имеем: $V = \dfrac{DO}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot AO \cdot CL = \dfrac{R^3}{12}$. Заметим, что $\alpha = \angle CDK$, поскольку $AB \parallel DK$. Поэтому из второй формулы имеем: $V = \dfrac{d}{6} \cdot R \cdot \sqrt{2}R \cdot \sin\angle CDK = \dfrac{\sqrt{5}}{12} \cdot d \cdot R^2$. Итак, $\dfrac{\sqrt{5}}{12}R^2 d = \dfrac{1}{12}R^3$,

$d = \dfrac{R}{\sqrt{5}} = 1.$

Ответ: 1.

1399. Пусть O — центр сферы, H и H_1 — центры оснований призмы (см. рис. 393). Найдём сначала сторону основания призмы. Пусть $BC = a$, тогда $CK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $CL = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\angle LKC = 2\sqrt{3}$.

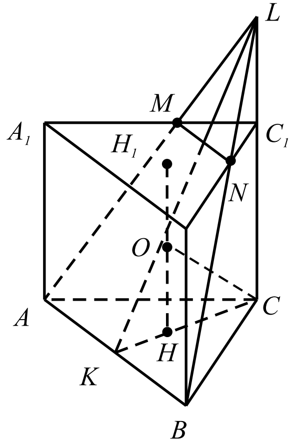


Рис. 393.

Заметим, что $\triangle C_1MN \sim \triangle C_1A_1B_1$ и найдем коэффициент подобия k: $LC_1 = LC - CC_1 = 2a\big(\sqrt{3} - 1\big)$, $k = \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{LM}{LB} = \dfrac{LC_1}{LC} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

Поэтому $\dfrac{S_{C_1MN}}{S_{C_1A_1B_1}} = k^2 = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$ и $\dfrac{S_{A_1MNB_1}}{S_{C_1A_1B_1}} = 1 - k^2 = \dfrac{2\sqrt{3}-1}{3}$.

Значит, $S_{A_1MNB_1} - \dfrac{2\sqrt{3}-1}{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\big(6-\sqrt{3}\big)}{12}$.

С другой стороны, $S_{AMNB} = \dfrac{S_{A_1B_1MN}}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$, $S_{ABMN} = \dfrac{\sqrt{17}\cdot a^2\big(6-\sqrt{3}\big)}{12}$. По условию, $S_{ABMN} = \dfrac{\sqrt{17}\big(6-\sqrt{3}\big)}{3}$, $\Rightarrow$ $a^2 = 4$, $a = 2$.

Теперь вычислим радиус сферы: $CO^2 = CH^2 + OH^2 = \dfrac{a^2}{3} + a^2$,

$R = CO = \dfrac{2}{\sqrt{3}}a = \dfrac{4}{\sqrt{3}}.$

Ответ: $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

1400. Пусть O — центр сферы, H и H_1 — центры оснований призмы, R — радиус сферы, описанной вокруг призмы (рис. 394). $S_{\text{сф.}} = 4\pi \cdot R^2_{\text{сф.}}$. По условию $S_{\text{сф.}} = 12\pi$, значит $R_{\text{сф.}} = \sqrt{3}$.

Пусть $AB = a$, тогда $AA_1 = 2a$, $OH = a$. $HC = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. $OC^2 = OH^2 + HC^2$, $3 = a^2 + \dfrac{a^2}{3}$, $4a^2 = 9$, $a^2 = \dfrac{9}{4}$. Так как $\triangle ABC$ — правильный, то $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{16}$. По условию, угол между плоскостями ABL и ABC равен 30°, и так как C — проекция точки L, то $S_{ABL} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos 30^\circ} = \dfrac{9\sqrt{3}}{16} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}125$.

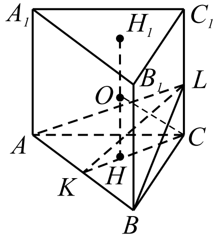


Рис. 394.

Ответ: 1,125.

1401. Пусть O — центр сферы, H и H_1 — центры оснований призмы, R — радиус сферы, описанной вокруг призмы (см. рис. 395). Пусть $AB = x$, тогда $AA_1 = 2x$, $OH = x$. $HC = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$. $R = \sqrt{x^2 + \dfrac{x^2}{3}} = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$. $\angle LKC$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения ALB и плоскостью основания ABC, поэтому $\angle LKC = 45^\circ$. Значит, $CL = KC = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, $KL = \dfrac{x\sqrt{6}}{2}$. $S_{ALB} = \dfrac{1}{2} \cdot KL \cdot AB = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot \dfrac{x\sqrt{6}}{2} = \dfrac{x^2\sqrt{6}}{4}$.

$\dfrac{x^2\sqrt{6}}{4} = 2{,}25\sqrt{6}$, $x^2 = 9$, $x = 3$. $R = \dfrac{2x}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

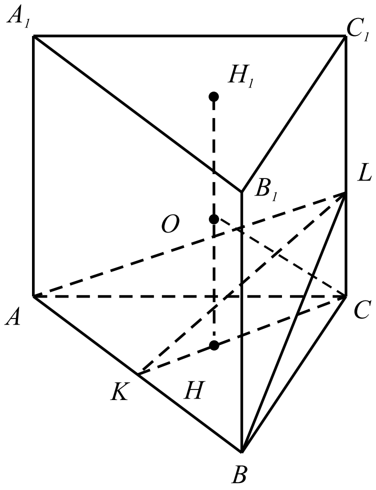


Рис. 395.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

1402. 1) Пусть радиус основания конуса R, а высота конуса h, тогда $S_{SAB} = R\cdot h$, а $S_{MON} = \dfrac{1}{4}S_{ABS} = \dfrac{1}{4}Rh$ (площадь серединного треугольника равна четверти площади исходного треугольника) (рис. 396).

2) Опустим высоту CP в треугольнике ACO. Тогда CP — перпендикуляр к плоскости ABS, так как CP перпендикулярно еще и SO. Поэтому AB — перпендикуляр к плоскости SPC. Из условия следует, что дуга AC равна $30°$, тогда из треугольника POC находим $PC = \dfrac{R}{2}$, $PO = R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Пусть точка Q — точка пересечения SP и MO. Восстановим перпендикуляр из точки Q к SP в плоскости SPC. Он перпендикулярен еще и к AB, так как лежит в плоскости SPC. Следовательно, он пересечет SC в точке L, так как $SCP \perp ABS$. Тогда LQ — искомая высота пирамиды $LMNO$.

4) Треугольники PQO и PSB подобны (рис. 397), так как $MO \parallel SB$. Поэтому $PQ : QS = PO : OB = \sqrt{3} : 2$, значит,
$SQ : SP = SQ : (SQ + PQ) = 2 : (2 + \sqrt{3})$.

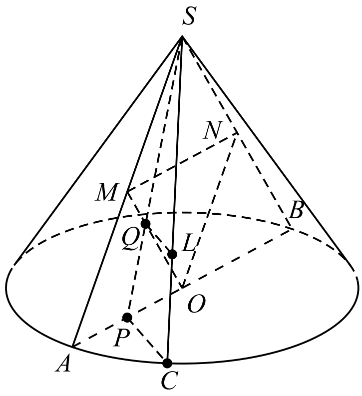


Рис. 396.

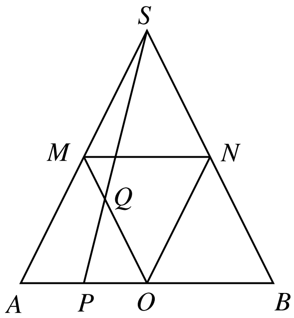


Рис. 397.

5) Так как $LQ \perp SP$ и $CP \perp SP$, то прямоугольные треугольники SQL и SPC подобны. $QL : PC = SQ : SP = 2 : (2+\sqrt{3})$. $QL = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}}PC = \dfrac{R}{2+\sqrt{3}}$.

6) $V_{OLMN} = \dfrac{1}{3}QL \cdot S_{OMN} = \dfrac{hR^2}{12(2+\sqrt{3})}$.

Площадь основания $\pi R^2 = 12\pi$, значит, $R^2 = 12$, $h = 10 + 5\sqrt{3}$, подставляя в выражение для объема, находим $V_{OLMN} = 5$.

Ответ: 5.

1403. План решения:

1) Докажем, что точка M — середина A_1C.

2) Докажем, что искомый объем равен половине объема пирамиды

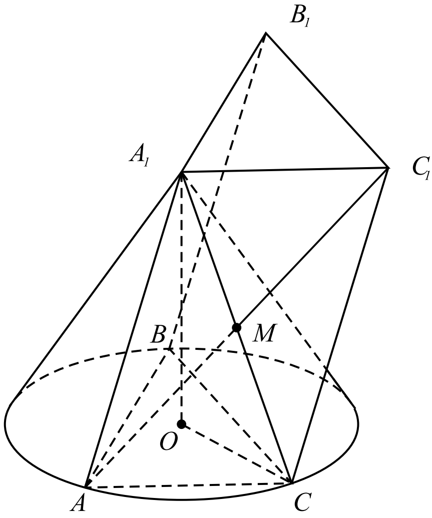


Рис. 398.

A_1ABC.

3) Вычислим радиус описанной окружности, площадь треугольника ABC.

4) Угол между прямой A_1C и плоскостью основания — это угол A_1CO. Найдём высоту конуса A_1O.

5) Найдём объем A_1ABC и, с помощью соотношения, полученного во втором пункте, найдем объем искомой пирамиды.

1) A_1C — образующая конуса (рис. 398), поэтому точка пересечения AC_1 и A_1C является точкой пересечения AC_1 с конусом. Но AC_1 пересекает конус только в двух точках: A и M. Следовательно, M — точка пересечения диагоналей параллелограмма AA_1C_1C. Значит, M — середина A_1C.

2) Поскольку прямая BB_1 параллельна плоскости AA_1C_1C, то длина перпендикуляра из точки B_1 равна длине перпендикуляра из точки B. Кроме того, $S_{AMC} = \dfrac{1}{2}S_{AA_1C}$, так как M — середина A_1C. Поэтому

$$V_{B_1AMC} = V_{BAMC} = \frac{1}{2}V_{A_1ABC}.$$

3) По теореме синусов $AB : \sin 60^\circ = 2R$, где R — радиус описан-

ной окружности. Поэтому $R = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$. По формуле площади правильного треугольника $S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$.

4) A_1O — перпендикуляр к плоскости основания, поэтому угол между A_1C и основанием равен углу A_1CO. $A_1O = CO \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 10$.

5) $V_{B_1AMC} = \dfrac{1}{2}V_{A_1ABC} = \dfrac{1}{6}A_1O \cdot S_{ABC} = \dfrac{250\sqrt{3}}{6} = \dfrac{125}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\dfrac{125}{\sqrt{3}}$.

1404. 1) A_1C — образующая конуса (рис. 399), поэтому точка пересечения C_1N и A_1C является точкой пересечения C_1N с конусом. Но C_1N пересекает конус только в двух точках: N и M. Следовательно, M — точка пересечения A_1C и C_1N. Треугольники A_1MN и CMC_1 подобны. Значит, $CM : MA_1 = CC_1 : A_1N = 2 : 1$.

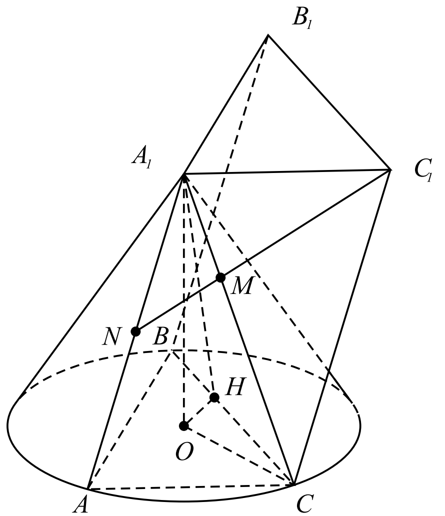


Рис. 399.

2) Перпендикуляр из M на плоскость BB_1C_1C относится к перпендикуляру из точки A_1 как CM к CA_1, и равно $2 : 3$. $V_{MBB_1C_1} = \dfrac{2}{3}V_{A_1BB_1C_1}$. Поскольку прямая CC_1 параллельна плоскости AA_1B_1B, то

$V_{A_1BB_1C_1} = V_{A_1BB_1C}$. Кроме того, $S_{A_1BB_1} = S_{A_1BA}$, поэтому $V_{A_1BB_1C} = V_{A_1BAC}$. Таким образом, искомый объем равен $\frac{2}{3}$ от объема пирамиды A_1ABC.

3) Пусть O — центр окружности-основания конуса, а AH — высота в треугольнике ABC. $A_1B = A_1C$, поэтому H — середина стороны BC, поэтому OH — перпендикулярно BC. То есть угол между плоскостями A_1BC и ABC равен углу A_1HO $OH = OC \cdot \sin 30^\circ = 6$. $CH = 6\sqrt{3}$; $AB = AC = BC = 12\sqrt{3}$. $S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3}$.

4) OH и AH — перпендикуляры к плоскости BC, поэтому угол между плоскостями A_1BC и ABC равен углу A_1HO. $A_1O = OH \cdot \operatorname{tg} A_1HO = 6\sqrt{3}$.

5) $V_{MBB_1C_1} = \dfrac{2}{3}V_{A_1ABC} = \dfrac{2}{9}A_1O \cdot S_{ABC} = 432$.

Ответ: 432.

1405. Дано: $SMNPQ$ — четырехугольная пирамида (см. рисунок 400), центр O сферы T, описанной около пирамиды $SMNPQ$ лежит в плоскости MNP, $H = MP \cap NQ$, $SH \perp$ пл. MNP, $SN = MN$, $PH = 8$, $MQ = 6$, $\operatorname{tg} \angle(SM, \text{пл. } MNP) = \dfrac{4}{3}$.

Найти: QP.

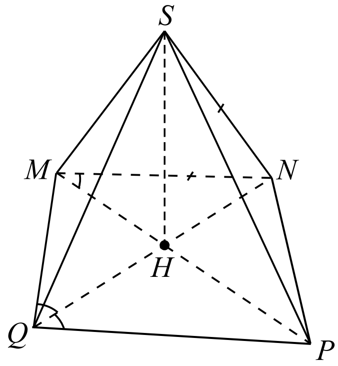


Рис. 400.

План решения: 1. Докажем, что треугольники SQN и SMP прямоугольные. 2. Найдём все элементы треугольника SMP. 3. Докажем, что QN — биссектриса угла MQP и по свойству биссектрисы найдем QP из треугольника MQP.

Решение. Поскольку центр сферы, описанной около пирамиды $SMNPQ$ лежит в плоскости основания $MNPQ$, плоскость MNP является плоскостью симметрии сферы T. Так как $SH \perp$ пл. MNP и $SH \subset$ пл. MSP, то пл. $MSP \perp$ пл. MNP. Поэтому сечение сферы T плоскостью пл. MSP является окружность с диаметром MP, при этом в эту окружность вписан треугольник SMP. Значит, $\angle MSP = 90°$, как угол, опирающийся на диаметр. Аналогично, $\angle QSN = 90°$.
Так как $SH \perp$ пл. MNP, то $\angle(SM, \text{пл. } MNP) = \angle SMH \Rightarrow$ $\operatorname{tg}\angle SMH = \dfrac{4}{3}$. Треугольник MSP прямоугольный. Так как SH — высота в нем, то $\angle SMH = \angle HSP$, откуда $\dfrac{HP}{SH} = \operatorname{tg}\angle HSP = \dfrac{4}{3}$. Поэтому $SH = 8 \cdot \dfrac{3}{4} = 6$, $SP = \sqrt{SH^2 + HP^2} = 10$, $MH = \dfrac{SH}{\operatorname{tg}\angle SMH} = \dfrac{9}{2}$. Треугольник SNQ прямоугольный, поэтому $SN^2 = NH \cdot NQ$. В силу того, что $SN = MN$, $MN^2 = NH \cdot NQ$, откуда следует, что $\dfrac{MN}{NH} = \dfrac{NQ}{MN}$, а это означает, что треугольники MHN и QMN подобны. Поэтому $\angle MQN = \angle NMP$. Но четырехугольник $MNPQ$ вписан в сечение сферы T плоскостью MNP, которое является окружностью, что означает, что $\angle NMP = \angle NQP$ как вписанные углы. Следовательно, $\angle MQN = \angle NMP = \angle NQP$, то есть QN — биссектриса угла MQP. Из треугольника MQP по свойству биссектрисы имеем $\dfrac{QP}{QM} = \dfrac{PH}{MH} \Rightarrow$ $QP = QM \cdot \dfrac{PH}{MH} = \dfrac{32}{3}$.

Ответ: $\dfrac{32}{3}$.

1406. Дано: $SABC$ — треугольная пирамида (см. рис. 401), $\triangle ABC$ — остроугольный, центр O сферы T, описанной около пирамиды $SABC$ лежит в плоскости ABC, CH — биссектриса угла ACB, $SH \perp$ пл. ABC, $AS = \sqrt{15}$, $BH = 2$, $\operatorname{tg}\angle(\text{пл. } SBC, \text{пл. } ABC) = \sqrt{2}$.

Найти: V_{ABC}.

План решения: 1. Докажем, что треугольник ASB прямоугольный. 2. Найдём все элементы треугольника ASB. 3. Найдём элементы треугольника ABC.

Решение. 1. Поскольку центр сферы, описанной около пирамиды

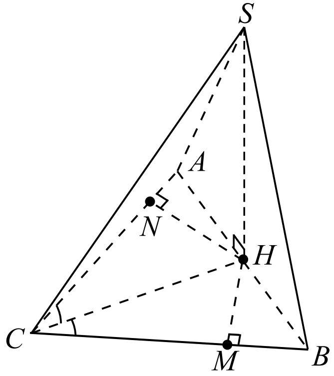


Рис. 401.

$SABC$, лежит в плоскости основания ABC, плоскость ABC является плоскостью симметрии сферы T. Так как $SH \perp$ пл. ABC и $SH \subset$ пл. ASB, то пл. $ASB \perp$ пл. ABC. Поэтому сечением сферы T плоскостью ASB является окружность с диаметром AB, при этом в окружность вписан треугольник ASB. Значит, $\angle ASB = 90°$, как угол, опирающийся на диаметр.

2. Треугольник ASB прямоугольный, поэтому $SB^2 = HB \cdot AB$. Пусть $SB = x$. Тогда $AB = \sqrt{15 + x^2}$ и $x^2 = 2\sqrt{15 + x^2}$. Таким образом, получили уравнение для нахождения x. Сделаем в нем замену $t = x^2$, тогда уравнение примет вид: $t = 2\sqrt{15 + t} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} t^2 = 4t + 60, \\ t \geqslant 0, \end{cases} \begin{cases} t^2 - 4t - 60 = 0, \\ t \geqslant 0, \end{cases} \begin{cases} (t - 10)(t + 6) = 0, \\ t \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow t = 10 \Rightarrow$$

$x = \sqrt{10}$. Значит, $AB = 5$, $AH = AB - BH = 3$ и $SH = \sqrt{BS^2 - BH^2} = \sqrt{6}$.

3. Пусть $M \in BC$, так что $BC \perp$ пл. SMH, тогда так как $BC \perp MH$, $BC \perp MS$ и BC — линия пересечения плоскостей SBC и ABC, то угол между этими плоскостями равен углу SMH, откуда $\operatorname{tg}\angle SMH = \sqrt{2}$. Тогда из прямоугольного $\triangle SMH$ следует, что $HM = \dfrac{SH}{\operatorname{tg}\angle SMH} = \sqrt{3}$. Опустим перпендикуляр HN из точки H на прямую AC. Точка N попадет на отрезок AC, так как $\triangle ABC$ — остроугольный. $NH = MH = \sqrt{3}$, поскольку все точки биссектрисы равноудалены от сторон угла. Пусть $\angle ABC = \alpha$, $\angle BAC = \beta$. Так как $HM \perp BC$, а $HN \perp AC$, то $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. По основному тригонометрическому тождеству $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Значит, $\sin\angle ACB = \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha+\beta) =$ $= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$. Тогда по теореме синусов из треугольника ABC следует: $\dfrac{\sin\angle ACB}{AB} = \dfrac{\sin\beta}{BC} \Rightarrow$

$BC = \dfrac{\sin\beta}{\sin\angle ACB}\cdot AB = \dfrac{10\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. Значит, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\alpha =$ $= \dfrac{75}{6\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$ и $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SH\cdot S_{SABC} = \dfrac{10\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{10\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{2}$.

1407. 1. По свойству прямой, параллельной плоскости, плоскость сечения, проходящая через середину ребра DC точку N параллельно прямым BC и AD, пересекает грани BCD, ACD, ADB, ABC по отрезкам соответственно параллельным этим ребрам, то есть $NE \parallel BC \parallel MF$ и $MN \parallel AD \parallel EF$ (см. рис. 402). Следовательно, сечение $MNEF$ (основание пирамиды $PMNEF$) является параллелограммом, стороны которого суть средние линии треугольников-граней пирамиды.

2. Диагональ NF делит параллелограмм $MNEF$ на два равных треугольника, поэтому $S_{MNF} = \dfrac{1}{2}S_{MNEF}$. Значит $V_{PMNEF} = 2V_{PMNF}$.

3. Примем $\triangle PMF$ за основание пирамиды $PMNF$, тогда проведем $NO \parallel DH$, так как DH — высота пирамиды $DABC$. $DH \perp ABC \Rightarrow NO \perp ABC \Rightarrow NO$ — высота пирамиды $NPMF$. $HKNO$ — прямоугольник $\Rightarrow NO = KH = 2{,}5$.

4. В $\triangle PMF$ поведем высоту PQ, тогда $PCMQ$ прямоугольник ($MF \parallel BC$, $\angle C = 90^\circ$, $CM \parallel PQ$), значит

$PQ = CM = 7{,}5$. $S_{PMF} = \dfrac{1}{2}\cdot MF\cdot PQ = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 7{,}5 = 22{,}5$.

5. $V_{PMNEF} = 2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot S_{PMF}\cdot NO = 2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 22{,}5\cdot 2{,}5 = 37{,}5$.

Ответ: 37,5.

1408. 1) По свойству прямой, параллельной плоскости, плоскость сечения, проходящая через середину M ребра BD параллельно ребрам BC

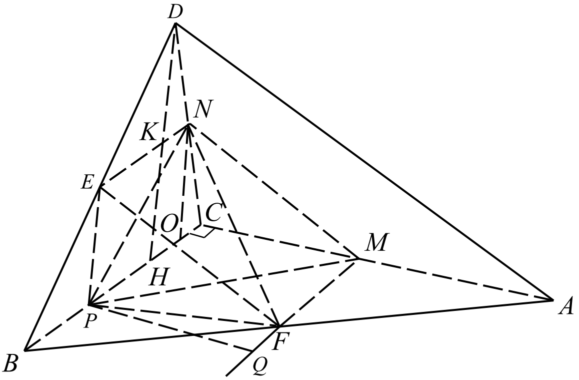


Рис. 402.

и AD, пересекает грани BCD, ABC, ABD, ACD по отрезкам, соответственно параллельным этим ребрам, то есть $LM \parallel BC \parallel FN$ и $MN \parallel AD \parallel LF$ (см. рис. 403).

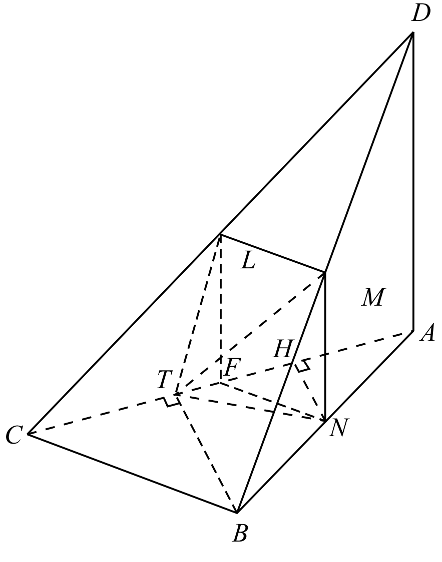


Рис. 403.

Следовательно, сечение $MLFN$ (основание пирамиды $TMLFN$) является параллелограммом, причем его стороны — средние линии треугольников — граней пирамиды $DABC$.

2) Диагональ LN делит параллелограмм $MLFN$ на два равных треугольника, поэтому площадь треугольника LFN равна половине площади параллелограмма $MLFN$. Следовательно, объем V пирамиды $TMLFN$ равен удвоенному объему пирамиды $TLFN$, поскольку они имеют общую вершину T, то есть $V = 2V_{TLFN}$.

3) Примем треугольник TFN за основание пирамиды $TLFN$. Поскольку $AD \perp ABC$ и $AD \parallel LF$, то $LF \perp ABC$, следовательно, LF — высота пирамиды $TLFN$, опущенная из вершины L. По свойству средней линии треугольника ADC $LF = 0{,}5AD$.

4) В прямоугольном треугольнике BCT $CT = BC\cos 60^\circ = \sqrt{5}$. Следовательно, $FT = CF - CT = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Пусть NH — высота треугольника TFN. Тогда $NH \parallel BT$, а так как N — середина отрезка AB, то по свойству средней линии треугольника ABT имеем
$NH = 0{,}5BT = 0{,}5\sqrt{BC^2 - CT^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{15}$. Найдём площадь S основания TFN: $S = 0{,}5 \cdot FT \cdot NH = \dfrac{5\sqrt{3}}{8}$.

Следовательно, $V = 2V_{TLFN} = \dfrac{2}{3}S \cdot LF = \dfrac{5\sqrt{3}}{24} \cdot AD$. Вычислим объем пирамиды $DABC$: $V_{DABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin 60^\circ \cdot AD = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \cdot AD$.

Отсюда $\dfrac{V_{DABC}}{V} = 12$. Следовательно, объем пирамиды $DABC$ в 12 раз больше объема пирамиды $TMLFN$.

Ответ: 12.

1409. 1) Плоскость сечения, проходящая через середину L ребра DC параллельно ребрам BC и AD, пересекает грани BCD, ABC, ABD, ACD по отрезкам, соответственно параллельным этим ребрам, то есть
$LM \parallel BC \parallel FN$ и $MN \parallel AD \parallel LF$ (см. рис. 404). Следовательно, сечение
$MLFN$ — параллелограмм, причем его стороны — средние линии треугольников — граней пирамиды $DABC$.

2) LN делит $MLFN$ на два равных треугольника, поэтому $S_{LFN} = \dfrac{1}{2}S_{MLFN}$. Отсюда $V_{TMLFN} = 2V_{TLFN}$, поскольку вершина T — об-

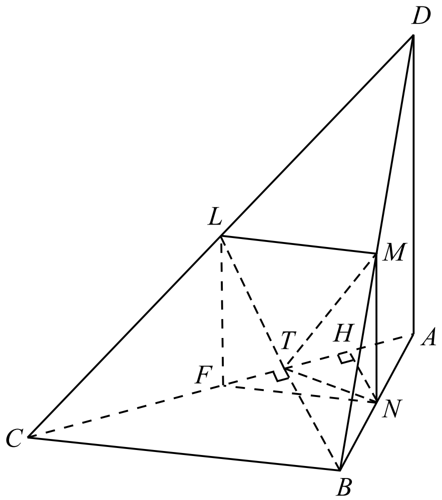


Рис. 404.

щая.

3) Примем TFN за основание пирамиды $TLFN$. Так как $AD \perp ABC$ и $AD \parallel LF$, то $LF \perp ABC$, следовательно, LF – высота пирамиды $TLFN$, опущенная из вершины L. По свойству средней линии $\triangle ADC$ $LF = \dfrac{AD}{2}$.

4) В прямоугольном треугольнике BCT $CT = BC\cos 30^\circ = 3$. Следовательно, $FT = CT - CF = 0{,}5$. Пусть NH – высота треугольника TFN. Тогда $NH \parallel BT$, а так как N — середина отрезка AB, то $NH = \dfrac{1}{2}BT = \dfrac{1}{2}\sqrt{BC^2 - CT^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь $S_{TFN} = \dfrac{1}{2}\cdot FT\cdot NH = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$. Следовательно, $V_{TMLFN} = 2V_{TLFN} = \dfrac{2}{3}S_{TFN}\cdot LF = \dfrac{\sqrt{3}}{24}\cdot AD$. Вычислим $V_{DABC} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot \sin 30^\circ\cdot AD = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}\cdot AD$. Отсюда $\dfrac{V_{DABC}}{V_{TMLFN}} = 20$.

Ответ: 20.

1410. По условию задачи сделаем чертеж (см. рис. 405). Проведем $AK \perp BC$, тогда $SK \perp BC$ (по теореме о трёх перпендикулярах).

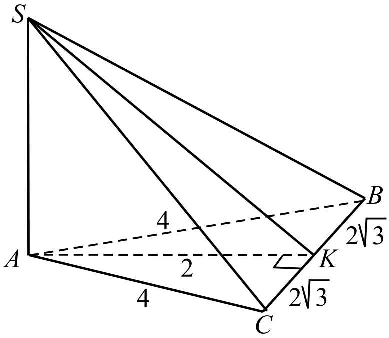


Рис. 405.

Высота пирамиды $H = SA$. Из прямоугольного треугольника AKC находим $AK = 2$. Тогда $SK = \sqrt{4 + H^2}$.

Воспользуемся формулой: $V = \dfrac{1}{3} r S_{\text{пол.}}$, где V — объем пирамиды, r — радиус вписанного в нее шара, $S_{\text{пол.}}$ — площадь полной поверхности пирамиды. С другой стороны

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H = \frac{2}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3} \cdot 2}{2} \cdot H = \frac{4\sqrt{3}}{3} H.$$

Найдём $S_{\text{пол.}}$. $S_{SBA} = S_{SCA} = \dfrac{4H}{2} = 2H.$

Найдём S_{BCS}. $S_{BCS} = \dfrac{1}{2} 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{4 + H^2} = 2\sqrt{3}\sqrt{4 + H^2}.$

$S_{\text{пол.}} = 4\sqrt{3} + 4H + 2\sqrt{3}\sqrt{4 + H^2}.$

Имеем: $\dfrac{4\sqrt{3}H}{3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{5} \cdot (4\sqrt{3} + 4H + 2\sqrt{3}\sqrt{4 + H^2})$, $3H - 2\sqrt{3} =$ $= \sqrt{3}\sqrt{4 + H^2}$. Решая это уравнение, находим: $H = 2\sqrt{3}$.

Точка H — центр шара, описанного около пирамиды $SABC$ (HD — серединный перпендикуляр к SA, $HO \perp ABC$, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC) (см. рис. 406).

Иначе, H — вершина прямоугольника $ADHO$, AH — радиус шара.

$$AH^2 = OH^2 + AO^2; OH = \frac{H}{2} = \sqrt{3},$$

$$AO = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{ABC}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3}}{4 \cdot 4\sqrt{3}} = 4. \; AH = \sqrt{3 + 16} = \sqrt{19}.$$

Ответ: $\sqrt{19}$.

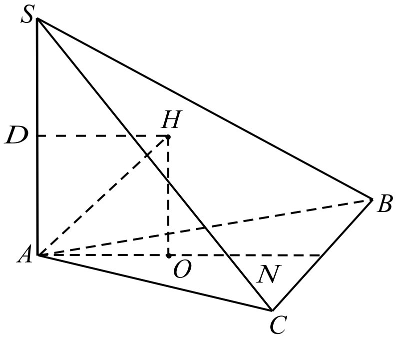


Рис. 406.

1411. Дано: $AB = BC = 6$, $AC = 4$. $SB \perp ABC$, $H = SB = \left(4+\sqrt{2}\right)r$.

Найти: R.

Решение. Воспользуемся формулой $V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3} \cdot r \cdot S_{\text{пол. пов.}}$ Обозначим высоту пирамиды $SB = H$ (см. рис. 407). Из прямоугольного треугольника ABK: $BK = 4\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольни-

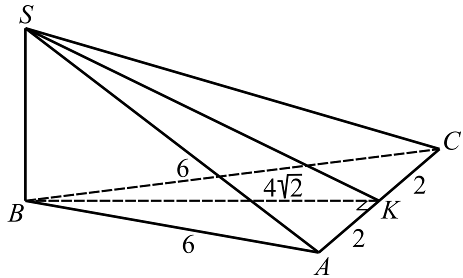


Рис. 407.

ка BSK: $SK = \sqrt{H^2+32}$. Тогда $S_{\triangle ABC} = 8\sqrt{2}$; $2S_{\triangle SAB} = 6H$; $S_{\triangle SAC} = 2\sqrt{H^2+32}$;

$V_{\text{пир.}} = \dfrac{1}{3} \cdot H \cdot 8\sqrt{2}$. Подставим найденные значения в формулу:

$\dfrac{1}{3} \cdot H \cdot 8\sqrt{2} = \dfrac{1}{3} r\left(8\sqrt{2} + 6H + 2\sqrt{H^2+32}\right)$,

$4\sqrt{2}H = \dfrac{H}{4+\sqrt{2}}\left(4\sqrt{2} + 3H + \sqrt{H^2+32}\right)$, что даёт уравнение

$12\sqrt{2} + 8 - 3H = \sqrt{H^2 + 32}$ (1). Возведем его в квадрат. Получим $H^2 - \left(6 + 9\sqrt{2}\right)H + 40 + 24\sqrt{2} = 0$. Вычислим дискриминант этого уравнения: $D = \left(6 + 9\sqrt{2}\right)^2 - 4\left(40 + 24\sqrt{2}\right) = 38 + 12\sqrt{2} = \left(6 + \sqrt{2}\right)^2$. Тогда $H_{1,2} = \dfrac{6 + 9\sqrt{2} \pm \left(6 + \sqrt{2}\right)}{2}$. $H_1 = 4\sqrt{2}$, $H_2 = 5\sqrt{2} + 6$. Второй корень $H = 5\sqrt{2} + 6$ не является решением уравнения (1), так как $12\sqrt{2} + 8 - 3H < 0$. Значит, $H = 4\sqrt{2}$. Центр описанного около пирамиды шара лежит в точке O — точке пересечения прямой DO, проходящей через точку D — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, перпендикулярно плоскости ABC и плоскости, проходящей через середину высоты SB, перпендикулярно этой высоте (см. рис. 408). То есть $BHOD$ —

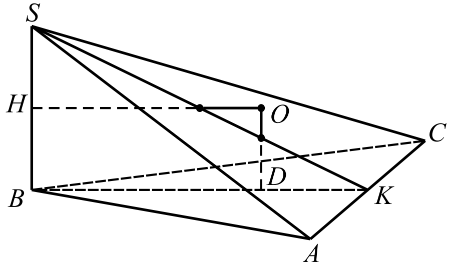


Рис. 408.

прямоугольник и радиус описанного шара $R = OB$. Для его нахождения найдем $DB = R_{\triangle ABC}$. $R_{\triangle ABC} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 4}{4 \cdot 8\sqrt{2}} = \dfrac{9}{4}\sqrt{2}$. $BH = 2\sqrt{2}$. Тогда

$$R = \sqrt{\frac{81}{16} \cdot 2 + 8} = \frac{\sqrt{290}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{290}}{4}$.

1412. Пусть AB_1MN — заданное сечение (см. рисунок 409).
Найти: V_{BB_1MNA}.
Найдём $S_{\text{осн}}$: $AB_1 = 2\sqrt{2}$, $MN = \sqrt{2}$, $B_1M = AN = \sqrt{5}$. B_1MNA — равнобочная трапеция. Её высота равна $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $S_{\text{тр}} = S_{\text{осн}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{2}} =$

$= \dfrac{9}{2}$. Пусть K и P — середины сторон MN и AB_1 соответственно, $KL \perp CD$.

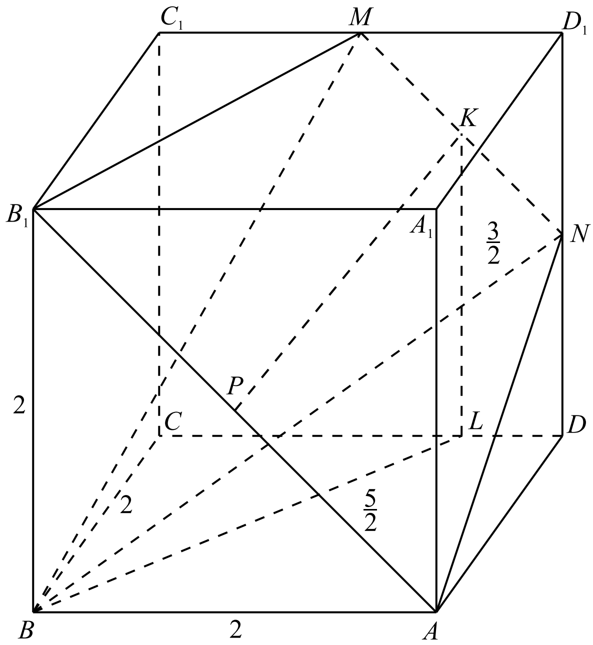


Рис. 409.

В треугольнике BPK: $BP = \sqrt{2}$, $KP = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$,

$BK = \sqrt{BL^2 + KL^2} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$. Высота этого треугольника, проведенная из вершины B, является высотой пирамиды H. Из $\triangle BPK$ находим, что $H = \dfrac{4}{3}$. А искомый объем $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{4}{3} = 2$.

Ответ: 2.

1413. Проведем указанное в условии сечение (рис. 410). Обозначим середины ребер AA_1 и CC_1 соответственно M и N. Искомый объем будет находиться по формуле $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{MB_1ND} \cdot h$, где h — высота пирамиды BH. Четырехугольник MB_1ND является ромбом. Его диагонали $MN = 3\sqrt{2}$ и $B_1D = 3\sqrt{3}$. $S_{\text{осн}} = S_{MB_1ND} = \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$. Найдём высоту пирамиды BH. BH есть высота $\triangle BB_1D$. Так как $\triangle B_1BD \sim \triangle B_1HB$, то

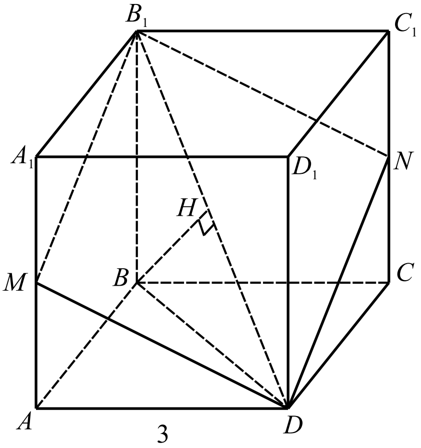


Рис. 410.

$\dfrac{BH}{BD} = \dfrac{BB_1}{B_1D}$. Отсюда $BH = h = \sqrt{6}$.

Объем равен $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{9\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{6} = 9$.

Ответ: 9.

1414. По условию задачи сделаем чертеж (см. рис. 411).
Пусть NMM_1N_1 — сечение пирамиды плоскостью a, Q — середина AB. Условие $AM > \dfrac{1}{2}AS$ позволяет однозначно определить взаимное расположение заданной плоскости и сферы.
План решения:
1. Докажем, что пирамида $SABC$ есть правильный тетраэдр, то есть что все её ребра равны.
2. Найдём стороны $\triangle PQK$.
3. Найдём радиус вписанной сферы как радиус вписанной окружности в $\triangle PQK$.
1. Так как $AM = AN$ и $MN \parallel SC$, то $AC = AS$. А так как $SC = SA$, то $\triangle ACS$ — правильный. Значит, и вся пирамида — правильный тетраэдр.
2. Сечение NMM_1N_1 — прямоугольник. $KP = MN = 2\sqrt{2}$. Найдём углы $\triangle PQK$. Пусть ребро пирамиды равно a. Тогда $SQ = CQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

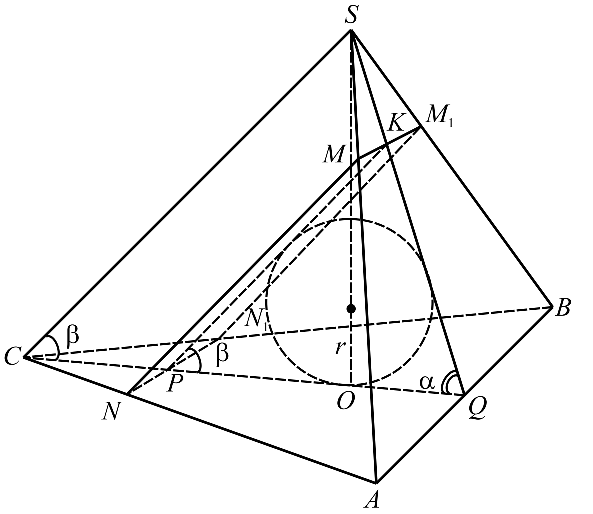


Рис. 411.

$OQ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $CO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Из $\triangle SOQ$ по теореме Пифагора:

$SO^2 = SQ^2 - OQ^2 = \dfrac{a^2 \cdot 3}{4} - \dfrac{a^2 \cdot 3}{36} = 3a^2\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{36}\right) = \dfrac{2}{3}a^2$; $SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\sin\alpha = \dfrac{SO}{SQ} = \dfrac{a\sqrt{6} \cdot 2}{3 \cdot a\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. $\sin\beta = \dfrac{SO}{SC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3a} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Тогда по теореме синусов из $\triangle PQK$: $\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{KQ}{\frac{\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow KQ = \sqrt{6}$. А так как $QP = QK$, то и $QP = \sqrt{6}$.

3. Найдём радиус окружности, вписанной в $\triangle PQK$, по формуле $r = \dfrac{S}{p}$, где S — площадь $\triangle PQK$, p — его полупериметр.

$p = \sqrt{2} + \sqrt{6}$. $S = \dfrac{1}{2}QK \cdot QP \cdot \sin\alpha = \dfrac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$. Значит,

$r = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \sqrt{3} - 1$.

Ответ: $\sqrt{3} - 1$.

1415. Пусть DPP_1D_1 — сечение пирамиды плоскостью, N — середина BC. Условие $BD > \frac{1}{2}BA$ позволяет однозначно определить взаимное расположение заданной плоскости и сферы.

План решения:

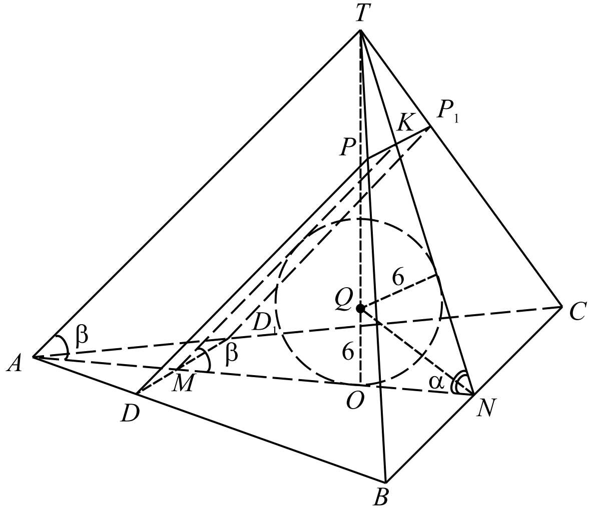


Рис. 412.

1. Докажем, что пирамида $TABC$ есть правильный тетраэдр, то есть что все её ребра равны.
2. Покажем, что $KM = PD$.
3. Найдём KM из треугольника ATN.
1. Так как $BP = BD$ и $DP \parallel AT$, то $AB = BT$. А так как $BT = AT$, то $\triangle ATB$ — правильный. Значит и вся пирамида — правильный тетраэдр.
2. Сечение DPP_1D_1 — прямоугольник, точки K и M — середины его противоположных сторон. Значит $KM = PD$.

3. Рассмотрим $\triangle ATN$. Обозначим $\angle ANT = \alpha$, $\angle NMK = \beta$. Тогда $\angle ONQ = \frac{\alpha}{2}$. Обозначим ребро пирамиды a. Тогда $ON = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $TN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. $\cos\alpha = \frac{ON}{TN} = \frac{1}{3}$. $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. $\angle TAN = \angle KMN = \beta$.
Из $\triangle OTN$:

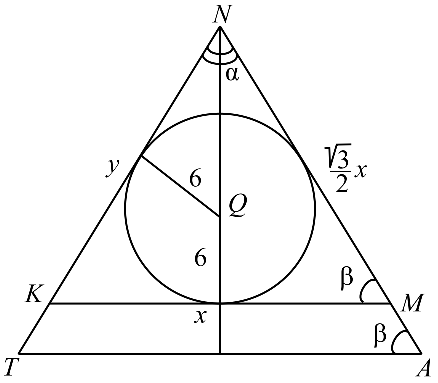


Рис. 413.

$OT = \sqrt{TN^2 - ON^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. $\sin\beta = \dfrac{TO}{AT} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3a} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $\cos\beta = \sqrt{1 - \dfrac{6}{9}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Обозначим $NK = y$; $KM = x$. Тогда из $\triangle KNM$ по теореме синусов $\dfrac{y}{\sin\beta} = \dfrac{x}{\sin\alpha}$; $\dfrac{y\cdot 3}{\sqrt{6}} = \dfrac{x\cdot 3}{2\sqrt{2}}$. Значит $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot x$ (см. рис. 413). Воспользуемся формулой $p\cdot r = S$. Для $\triangle KNM$

$S = \dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}x^2\sqrt{6}}{4\cdot 3} = \dfrac{\sqrt{2}x^2}{4}$. $p = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\right)x = \dfrac{x}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Имеем: $\dfrac{x}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot 6 = \dfrac{\sqrt{2}x^2}{4}$; $x = \dfrac{12}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right) = 6\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.

Ответ: $6\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.

1416. Пусть r — радиус оснований конусов, h — высота конусов, α — угол между образующей и плоскостью основания конуса, R — искомый радиус сферы.

На чертеже (см. рисунок 414): O — центр сферы, CG — образующая конуса, B_1 — точка касания сферы и плоскости, E — точка касания сферы и конуса.

Тогда $CO_1 = h, O_1G = r, OB_1 = R$. Центры оснований конусов образуют правильный треугольник со стороной $2r$, O_1B — радиус описанной вокруг этого треугольника окружности. Значит, $O_1B = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Из $\triangle COB_1 \Rightarrow \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{R}{CB_1} \Rightarrow R = CB_1\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = O_1B\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

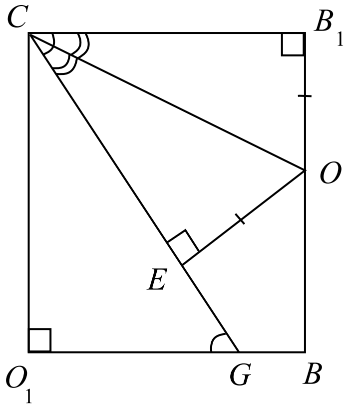


Рис. 414.

Из $\triangle CO_1G \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{r}$, но $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$. Обозначая $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = x$, получим $\dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{h}{r}$. Это уравнение имеет корни $x_{1,2} = \dfrac{-r \pm \sqrt{r^2+h^2}}{h}$. Так как $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} > 0$, значит, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{r^2+h^2}-r}{h}$.

Итак, $R = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3h}(\sqrt{r^2+h^2}-r) = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

1417. Так как $\angle KD_1L = \angle KD_1H = \angle HD_1L$, то $KL = LH = KH$ (см. рис. 415). Так как $\triangle KLH$ — равносторонний, то центр сферы лежит на прямой, являющейся перпендикуляром к плоскости KLH, восстановленным в точке центра описанной около $\triangle KLH$ окружности, то есть BD_1. Перпендикуляр к MN из любой точки, принадлежащей BD_1, будет падать в середину MN (точка P), так как проекция BD_1 на $ABCD$ перпендикулярна MN и проходит через её центр (проекцией является BD). Пусть O — центр сферы, тогда OP — ее радиус. Пусть радиус сферы равен r. Тогда $OF = 4 - r$. $FP = BD - BP - FD = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} - r\sqrt{2}$. $OP^2 = FP^2 + OF^2 = \left(3\sqrt{2} - r\sqrt{2}\right)^2 + (4-r)^2$, но $OP = r$, значит $\left(3\sqrt{2} - r\sqrt{2}\right)^2 + (4-r)^2 = r^2$. Решив уравнение, получим $r_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{2}$,

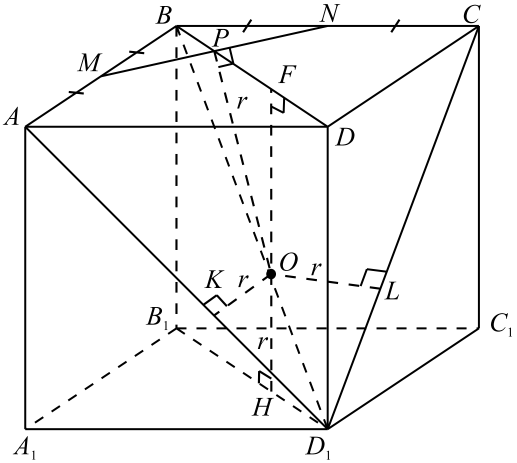


Рис. 415.

но $r < 4\sqrt{2}$, значит, $r = 5 - 2\sqrt{2}$.

Ответ: $5 - 2\sqrt{2}$..

1418. Пусть сторона основания призмы равна a. Тогда радиус описанной

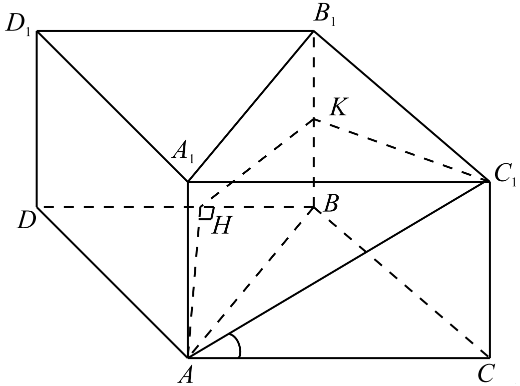


Рис. 416.

около $\triangle A_1B_1C_1$ окружности равен $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Из условия следует, что высота призмы равна радиусу, значит $CC_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Пусть искомый угол равен α, тогда $\angle C_1AC = \alpha$. Докажем это. Достроим к призме $ABCA_1B_1C_1$ такую же призму так, чтобы она была симметрична относительно плоскости AA_1B_1B (см. рис. 416). Плоскость сечения пересечет плоскость $\triangle ABC$ по прямой AH, но $\triangle AC_1C \sim \triangle BKH$ ($KH \parallel AC_1$, $AC \parallel BH$, $CC_1 \parallel BK$) $\Rightarrow HB = \frac{1}{2}AC$. Плоскость AC_1C перпендикулярна плоскости AA_1H, так как $AC \perp AH$ и $AC \perp AA_1$, значит $C_1A \perp AH$, следовательно $\angle C_1AC$ есть угол между плоскостью сечения и плоскостью $\triangle ABC$. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{C_1C}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ (так как α — острый угол).

Ответ: 30.

1419. 1. Пусть SH — высота пирамиды, SM — апофема, K — центр вписанной окружности. Обозначим $SH = H$, $MH = a$, тогда $HC = a\sqrt{2}$ (рис. 417). Так как $HC^2 = SH(2R - SH)$, где R — радиус описанной

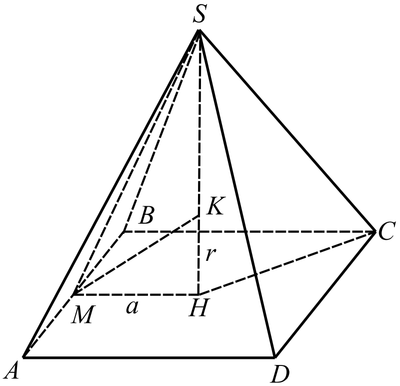


Рис. 417.

сферы, то $2a^2 = H(2-H)$, $a = \sqrt{\dfrac{H\cdot(2-H)}{2}}$.

2. $KH = r = \sqrt{2} - 1$ — радиус вписанной сферы. MK — биссектриса. Тогда $\dfrac{MH}{KH} = \dfrac{MS}{SK}$, $\dfrac{a}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{MS}{H - \sqrt{2} + 1}$; $MS = \sqrt{\dfrac{H^2+2H}{2}}$ (по теореме Пифагора для $\triangle MSH$).

3. $\dfrac{\sqrt{\dfrac{H\cdot(2-H)}{2}}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{H^2+2H}{2}}}{H-\sqrt{2}+1}$; $\dfrac{\sqrt{2H-H^2}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{H^2+2H}}{H-\sqrt{2}+1}$;

$\dfrac{\sqrt{2-H}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{H+2}}{H-(\sqrt{2}-1)}$; $\dfrac{2-H}{3-2\sqrt{2}}=\dfrac{H+2}{H^2-2H\big(\sqrt{2}-1\big)+3-2\sqrt{2}}$;

$2H^2-4H\big(\sqrt{2}-1\big)+6-4\sqrt{2}-H^3+2H^2\big(\sqrt{2}-1\big)-\big(3-2\sqrt{2}\big)H=$
$=H\big(3-2\sqrt{2}\big)+2\big(3-2\sqrt{3}\big)$. Разделив на $H\neq 0$ и упростив, получим уравнение $\big(H-\sqrt{2}\big)^2=0,\ H=\sqrt{2}$.

4. $S_{\text{осн.}}=4a^2=2H(2-H)=2\sqrt{2}\big(2-\sqrt{2}\big)$.

5. $V=\dfrac{1}{3}S_{\text{осн.}}\cdot H=\dfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\big(2-\sqrt{2}\big)\cdot\sqrt{2}=\dfrac{4}{3}\big(2-\sqrt{2}\big)$.

Ответ: $\dfrac{4}{3}\big(2-\sqrt{2}\big)$.

1420. 1) По условию задачи сделаем чертеж (рис. 418). Найдём радиус шара, вписанного в четвертинку конуса $SABC$. Нетрудно догадаться, что тот же шар будет вписан в пирамиду $SAB'C'$, здесь $B'C'$ – отрезок в плоскости основания конуса, касательный к окружности основания в точке H – середине дуги BC, и образующий с прямыми AB и AC углы по 45°.

2) Найдём в пирамиде $SAB'C'$ ребра SA, AB', AC', $B'C'$; площадь её полной поверхности $S_{\text{пол}}$ и объем V. Так как $\angle SHA=60^\circ$, то
$SA=AH\operatorname{tg}60^\circ=(\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{3}=3+\sqrt{6}$ и $SH=\dfrac{AH}{\cos 60^\circ}=$
$=2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Так как $\angle AB'C'=\angle AC'B'=\angle HAB'=\angle HAC'=45^\circ$, то $AB'=AC'=AH\sqrt{2}=2+\sqrt{6},\ B'C'=2AH=2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Теперь
$S_{\text{пол}}=S_{AB'C'}+S_{SAB'}+S_{SAC'}+S_{SB'C'}=$
$=\dfrac{1}{2}AB'\cdot AC'+\dfrac{1}{2}SA\cdot AB'+\dfrac{1}{2}SA\cdot AC'+\dfrac{1}{2}SH\cdot B'C'=$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})(6\sqrt{2}+5\sqrt{3})$, $V=\dfrac{1}{3}S_{AB'C'}\cdot SA=\dfrac{1}{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2(3+\sqrt{6})$.

3) Радиус вписанного в пирамиду $SAB'C'$ шара найдём по формуле:
$r=\dfrac{3V}{S_{\text{пол}}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2(3+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(6\sqrt{2}+5\sqrt{3})}=\dfrac{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{6\sqrt{2}+5\sqrt{3}}=1$.

Ответ: 1.

1421. 1. Пусть A — центр окружности, лежащей в основании конуса (см. рис. 419). $B'B$ и $C'C$ — отрезки, образованные пересечением пер-

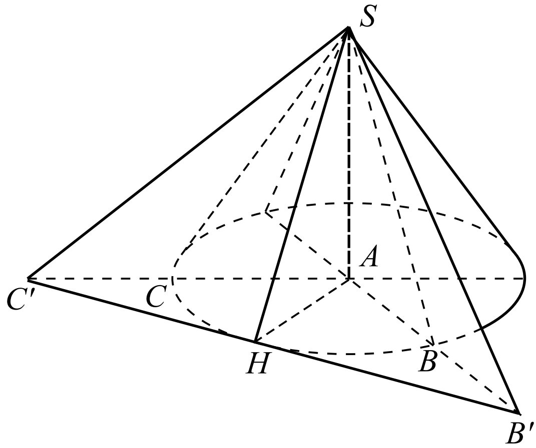


Рис. 418.

пендикулярных плоскостей, проходящих через ось конуса с кругом, лежащим в его основании. $H \in CB$ и $\smile CH = \smile HB$. $C'B'$ — касательная к окружности, лежащей в основании конуса, проходящая через точку H.

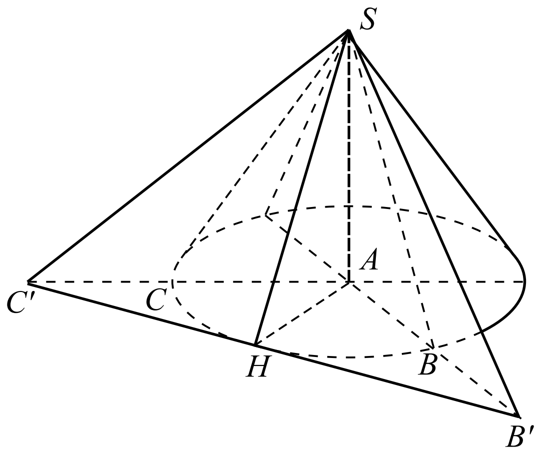


Рис. 419.

$SAB'C'$ — пирамида, в основании которой лежит прямоугольный треугольник $C'AB'$, образованный прямыми AC, AB и $C'B'$. Тогда шар, вписанный в четвертинку конуса $SABC$, вписан в пирамиду $SAB'C'$.

2. Пусть R — радиус конуса. Тогда $AH = R$; $SA = AH \cdot \operatorname{tg} \angle SHA = R \operatorname{tg} 60^\circ = R\sqrt{3}$; $SH = \dfrac{AH}{\cos 60^\circ} = 2R$. Так как $\angle AB'C' = \angle AC'B' = \angle HAB' = \angle HAC' = 45^\circ$, то $AB' = AC' = AH\sqrt{2} = R\sqrt{2}$; $B'C' = 2AH = 2R$.

Выразим площадь поверхности пирамиды $SAB'C'$:
$S_{\text{пол.}} = S_{AB'C'} + S_{SAB'} + S_{SAC'} + S_{SB'C'} =$
$= \dfrac{1}{2}AB' \cdot AC' + \dfrac{1}{2}SA \cdot AB' + \dfrac{1}{2}SA \cdot AC' + \dfrac{1}{2}SH \cdot B'C' =$

$= \dfrac{1}{2}(2R^2 + R^2\sqrt{6} + R^2\sqrt{6} + 4R^2) = (3 + \sqrt{6})R^2.$

Объем пирамиды $SAB'C'$ может быть выражен так:
$V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{AB'C'} \cdot SA = \dfrac{1}{3} \cdot R^2 \cdot R\sqrt{3} = \dfrac{R^3\sqrt{3}}{3}$. С другой стороны,

$V = \dfrac{1}{3}rS_{\text{пол.}}$, где r — радиус вписанного в пирамиду шара.

$V = \dfrac{1}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{6})R^2$. Приравняем найденные выражения объема пирамиды. $\dfrac{R^3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})(3 + \sqrt{6})R^2$; $R = \dfrac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{\sqrt{3}} =$

$= \dfrac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1.$

Ответ: 1.

1422. а) $\angle ASD = 90^\circ$, поэтому AD — гипотенуза. Точки A и D не могут принадлежать разным основаниям цилиндра ввиду того, что $AD \parallel BC$, $AD \neq BC$. Поэтому A, S, D $\in$ одной окружности одного основания (см. рис. 420). Пусть SH — высота в $\triangle ASD$ (где $H \in AD$). Тогда $SH \leqslant \dfrac{AD}{2} \leqslant 2{,}5$. Если S принадлежит окружности другого основания цилиндра, нежели A и D, то SH не меньше высоты цилиндра, то есть $SH \geqslant 3$, что противоречит $SH \leqslant 2{,}5$.

б) $\angle SDC = 90^\circ$; $SD \perp DC$. По теореме, обратной теореме о трёх перпендикулярах, $SD \perp DC$, $\angle SDC_1 = 90^\circ$, поэтому SC_1 — диаметр. Таким образом, находим положение точек C и B. $BC \parallel AD$ и $SABCD$ — пирамида, следовательно точки B и C лежат на окружности другого основания цилиндра, нежели A, S и D.

в) Пусть B_1 и C_1 — проекции точек B и C соответственно на плоскость

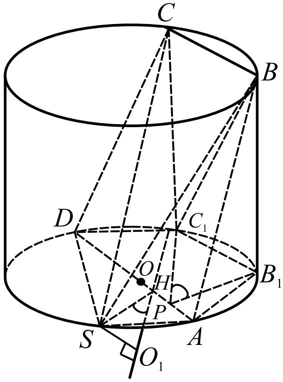


Рис. 420.

основания цилиндра, содержащего точки A, S и D; O — центр основания, содержащего точки A, S и D; M — середина B_1C_1 ; B_1P — высота в $\triangle OB_1A$ $(P \in OA)$. Значит, $AD = 5$, $BC = 5 \cdot \dfrac{3}{5} = 3$. $B_1M = 1{,}5$, $B_1O = 2{,}5$. $MO = \sqrt{6{,}25 - 2{,}25} = 2$. $B_1P = MO = 2$ (см. рис. 421).

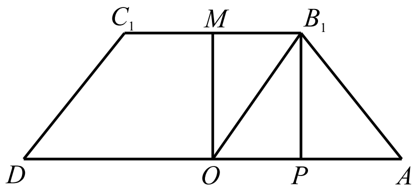


Рис. 421.

г) $BP \perp AD$ по теореме о трёх перпендикулярах ($BB_1 \perp ADB$, $B_1P \perp AD$). $BP = \sqrt{BB_1^2 + B_1P^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(BC + AD) \cdot BP$. $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(5+3)\sqrt{13} = 4\sqrt{13}$.

д) Пусть SO_1 — высота пирамиды $SABCD$ $(O_1 \in ABC)$. Тогда $O_1H \perp AD$ по теореме о трёх перпендикулярах. $\angle BPB_1 = \angle SHO_1$ — линейные углы двугранного угла при ребре AD. $\sin BPB_1 = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

$AS = DC_1 = \sqrt{5}$ $(AB_1 = DC_1 = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$, так как $\angle C_1DS = \angle DSA = \angle OC_1A = 90^\circ)$.
$SD = \sqrt{AD^2 - AS^2} = \sqrt{25-5} = \sqrt{20}$. $2S_{ASD} = AS \cdot SD = 10$;

$2S_{ASD} = AD \cdot SH = 5SH \Rightarrow SH = 2$. Из $\triangle SO_1H$ получим

$SO = SH \cdot \sin\angle SHO$, $SO_1 = 2 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{13}} = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$. $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot SO_1$;

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 4\sqrt{13} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{13}} = 8$.

Ответ: 8.

1423. $V_{\text{призмы}} = S_{\triangle ABS} \cdot H$, где $H = CO$ — высота пирамиды $CABS$ (рис. 422). Так как по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle BAS = 90°$, то $S_{\triangle ABS} = \dfrac{AB \cdot AS}{2} = 6$. Так как боковые ребра пирамиды $CABS$ рав-

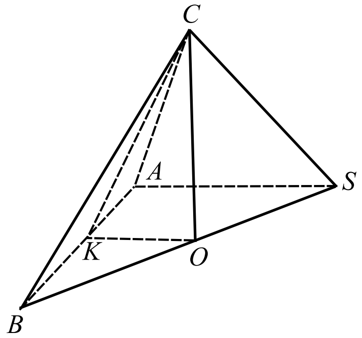


Рис. 422.

ны между собой, то O — центр описанной около $\triangle ABS$ окружности. А так как этот треугольник прямоугольный, то O — центр гипотенузы BS. Проведем $CK \perp AB$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $OK \perp AB$. Значит OK — средняя линия $\triangle ABS$, поэтому $OK = \dfrac{AS}{2} = 2$. Так как, по условию, $\triangle ABC$ — равносторонний, то его высота $CK = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Из прямоугольного $\triangle CKO$ получим $OC = H = \sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Поэтому $V_{\text{призмы}} = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{11}}{2} = 3\sqrt{11}$.

Ответ: $3\sqrt{11}$.

1424. По условию задачи сделаем чертеж (см. рис. 423).

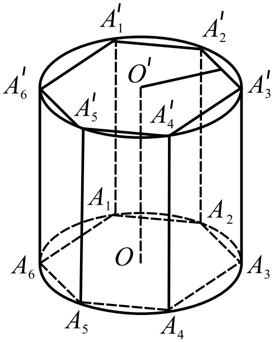


Рис. 423.

По формуле $S_{\text{бок. цил.}} = 2\pi RH = 16\pi\sqrt{3}$, где R — радиус цилиндра, H — его высота. Отсюда $RH = 8\sqrt{3}$. Расстояние $d = 2\sqrt{3}$ есть расстояние между осью цилиндра и плоскостью боковой грани призмы (так как $OO_1 \parallel A_2A_3A_3'A_2'$). А это есть радиус вписанного в шестиугольник круга: $d = r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Отсюда $R = 4$. Сторона основания правильной шестиугольной призмы $A_2A_3 = R = 4$. Высоту призмы H найдем из равенства $RH = 8\sqrt{3}$; $H = 2\sqrt{3}$.

$S_{\text{осн.}} = 6S_{\triangle OA_2A_3} = 6 \cdot \dfrac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}.$

$V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн.}} \cdot H = 24\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 144.$

Ответ: 144.

1425. Пусть $SABC$ — правильная треугольная пирамида. Треугольник ABC (основание исходной пирамиды) — правильный. Точка O — его центр. Прямая AM (проходящая через O) и медиана, и высота треугольника ABC. Треугольник CSB (боковая грань пирамиды) — равнобедренный. SM — его высота (по теореме о трёх перпендикулярах). Пирамида $ONLKQ$ — правильная (по условию). Значит, в основании ее лежит квадрат $NLKQ$, который вписан в $\triangle CSB$ (по условию). Это возможно, так как $\triangle CSB$ — равнобедренный. При этом $BQ = CN$; $NM = MQ$. Высота OP этой пирамиды попадает в центр квадрата, и она перпендикулярна всей плоскости CSB. Угол между основанием и боковой гранью пирамиды (любой) есть угол OMS.

Пусть $\angle OMS = \alpha$. Итак, ищем угол α (см. рис. 424).

Обозначим $AB = AC = BC = 2a$, а сторону квадрата $NL = x$. То-

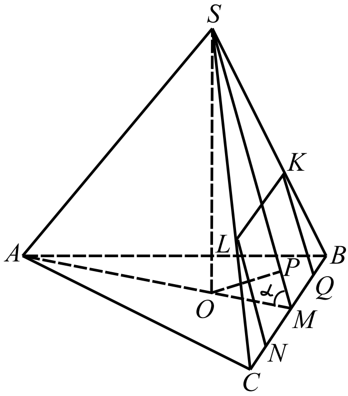


Рис. 424.

гда $OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ как радиус вписанной окружности в $\triangle ABC$. $MB = a$, $QB = a - \dfrac{x}{2}$. $\triangle KQB \sim \triangle SMB \Rightarrow \dfrac{SM}{KQ} = \dfrac{BM}{BQ}$; $\dfrac{SM}{x} = \dfrac{2a}{2a-x}$; $SM = \dfrac{2ax}{2a-x}$. $OP \perp SM$; $\triangle OPM \sim \triangle SOM \Rightarrow \dfrac{SM}{OM} = \dfrac{OM}{PM}$; $\dfrac{3 \cdot SM}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}\cdot 2}{3 \cdot x}$; $SM = \dfrac{2a^2}{3x}$. Значит, $\dfrac{2ax}{2a-x} = \dfrac{2a^2}{3\cdot x}$; $3x^2+ax-2a^2=0$.

Решив это уравнение как квадратное относительно x, получим $x = \dfrac{2a}{3}$; $\dfrac{x}{2} = \dfrac{a}{3}$. Из $\triangle OPM$: $\cos\alpha = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{a\cdot 3}{3a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Итак, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\alpha = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

1426. По условию задачи объём пирамиды, вписанной в конус, должен быть наибольшим. Покажем, что наибольший объём может иметь только правильная пирамида.

Заметим, что из всех треугольников, вписанных в окружность данного радиуса наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник (см. рис. 425). В самом деле, пусть какие-то стороны треугольника ABC не равны, например, $AC \neq AB$, и он имеет наибольшую площадь среди всех вписанных в эту окружность треугольников. Рассмотрим $\triangle A_1BC$, где A_1 — точка пересечения серединного перпендикуляра OF к стороне BC с окружностью, описанной около $\triangle ABC$. Тогда высота A_1F треугольника A_1BC больше высоты AH треугольника ABC, потому $S_{A_1BC} > S_{ABC}$. Получили противоречие.

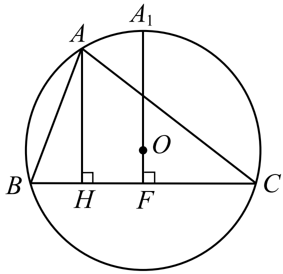


Рис. 425.

Так как объём пирамиды должен быть наибольшим, то из всех возможных пирамид, вписанных в конус она должна иметь наибольшую высоту. Следовательно её высота совпадает с высотой конуса SO (см. рис. 426). Значит пирамида $SABC$ — правильная.

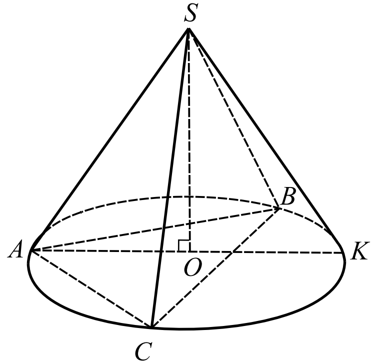


Рис. 426.

Так как $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} \cdot SO$ и $S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$, где R — радиус основания конуса, то $16\sqrt{3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3 \cdot 4^2\sqrt{3}}{4} \cdot SO$;

$SO = \dfrac{16\sqrt{3}\cdot 12}{3\cdot 4^2\sqrt{3}} = 4.$

В $\triangle AOS$: $\angle AOS = 90^\circ$, $AO = SO$, значит $\angle ASO = 45^\circ$. Равнобедренный треугольник ASK — осевое сечение конуса, высота SO — биссектриса $\angle ASK$. Следовательно, $\angle ASK = 2\angle ASO = 2\cdot 45^\circ = 90^\circ$.

Ответ: 90°.

1427. 1. Объем пирамиды $SABFC$ вычислим по формуле

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABFC}\cdot SO$. Так как $S_{ABFC} = S_{ABC} + S_{CBF}$ и по условию задачи SO, BC и S_{ABC} — постоянные величины, то наибольший объем пирамиды будет при наибольшей площади $\triangle BCF$. $S_{BCF} = \dfrac{1}{2}BC\cdot FE$, где FE — высота треугольника BCF, то есть расстояние от точки F дуги BC окружности до стягивающей ее хорды. Это расстояние наибольшее, если точка F — середина дуги BC (см. рис. 427).

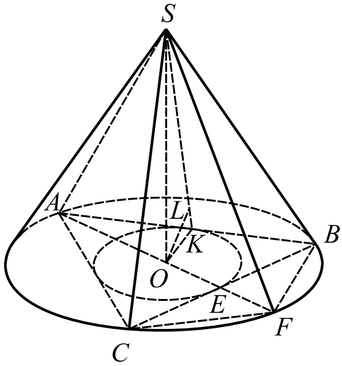


Рис. 427.

2. Пусть ρ_F и ρ_O — расстояния от точек F и O до плоскости $\alpha = ASB$ соответственно (см. рис. 428). Так как $\rho_F : \rho_O = FA : OA$, то $\rho_F = 2\cdot\rho_O$.

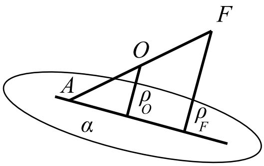


Рис. 428.

3. Проведем $OK \perp AB$, тогда $SK \perp AB$ по теореме о трёх перпендикулярах, отсюда $AB \perp SOK$. Проведем $OL \perp SK$, а так как $AB \perp SOK$, то $OL \perp AB$, значит, $OL \perp ASB$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Следовательно, OL — расстояние от точки O до плоскости ASB, то есть $OL = \rho_O$.

4. По условию пирамида $SABC$ — правильная $\Rightarrow \triangle ABC$ — равносторонний, OK и OA — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно $\Rightarrow OK = \dfrac{1}{2}OA = 8$.

В прямоугольном треугольнике OLK $OL = \dfrac{1}{2}OK$ как катет, лежащий против угла в 30°, поэтому $OL = \dfrac{1}{2} \cdot 8 = 4$, $\rho_0 = 4$, $\rho_F = 2 \cdot 4 = 8$.

Ответ: 8.

1428. 1. Пусть H — высота пирамиды $SA_1A_2 \ldots A_n$, опущенная из вершины S. Тогда ее объем $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H \leqslant \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot R$, где R — радиус сферы, $S_{\text{осн}} = S_{A_1A_2\ldots A_n}$ — площадь основания пирамиды (см. рис. 429). Значит, объем пирамиды наибольший тогда и только тогда, когда $H = R = SO$ и $S_{\text{осн}}$ является наибольшей.

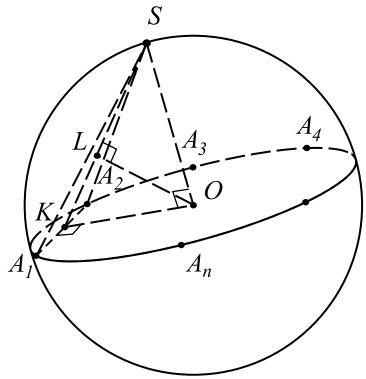


Рис. 429.

2. Докажем теперь, что если площадь основания $S_{\text{осн}}$ наибольшая, то многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ является правильным. Предположим, что это не так, то есть $S_{\text{осн}}$ наибольшая, но многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ не является правильным. Тогда, не нарушая общности рассуждений, можно счи-

тать, что $A_1A_2 \neq A_2A_3$.

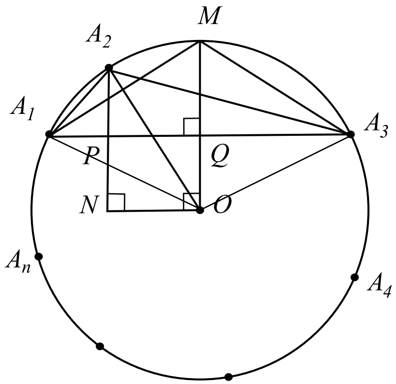


Рис. 430.

Пусть M такая точка, лежащая на описанной окружности многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$, что $A_1M = MA_3$, а точка N такая, что $ON \parallel A_1A_3$ и $A_2N \parallel MO$ (см. рис. 430). Тогда $NPQO$ — прямоугольник, так как $\triangle A_1OA_3$ равнобедренный и OQ его биссектриса и, следовательно, высота. Тогда $A_2N < A_2O$, так как катет в $\triangle A_2NO$ меньше гипотенузы. Но $A_2O = MO = R$, тогда $A_2N < MO$; $A_2P + PN < MQ + QO$; $A_2P < MQ$, так как $PN = QO$. В этом случае $\frac{1}{2}\cdot A_1A_3\cdot A_2P < \frac{1}{2}\cdot A_1A_3\cdot MQ$, то есть $S_{A_1A_2A_3} < S_{A_1MA_3}$; $S_{\text{осн}} < S_{A_1MA_3\ldots A_n}$. Но это противоречит предположению о том, что $S_{\text{осн}}$ наибольшая.

Значит, $A_1A_2\ldots A_n$ — правильный многоугольник.

3. Построим $OK \perp A_1A_2$ и $OL \perp SK$. Так как SO — высота правильной пирамиды $SA_1A_2\ldots A_n$, то $SO \perp A_1A_2A_3$. Значит, $A_1A_2 \perp SO$. Следовательно, $A_1A_2 \perp SKO$, то есть $OL \perp A_1A_2$. Кроме того, $OL \perp SK$ по построению. Поэтому $OL \perp SA_1A_2$, то есть OL — искомое расстояние от точки O до плоскости SA_1A_2.

4. Так как OK — радиус вписанной окружности правильного n-угольника, то $OK = R\cos\frac{\pi}{n}$. По свойству высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла, имеем:

$$OL = \frac{SO \cdot OK}{SK} = \frac{R \cdot R\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{R^2 + R^2\cos^2\frac{\pi}{n}}} = \frac{R\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{n}}}.$$ Так как $R = 1$ по условию, то $OL = \dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{n}}}$.

Ответ: $\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{n}}}$.

1429. Построим общую часть куба и правильной треугольной призмы. Проекцией куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали, является правильный шестиугольник, поэтому если одно из ребер правильной треугольной призмы совпадает с диагональю куба, то два других боковых ребра призмы проходят через середины M и N ребер A_1D_1 и C_1D_1 куба (см. рис. 431).

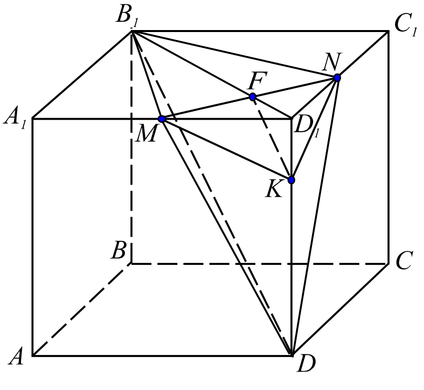


Рис. 431.

Боковая грань правильной треугольной призмы, параллельная диагонали куба, пересекает ребро куба DD_1 в точке K, причем $FK \parallel B_1D$, где F — точка пересечения B_1D_1 и MN. Поэтому общей частью куба и призмы является шестигранник с вершинами DB_1MNK. Объем общей части можно представить в виде разности объемов V_1 и V_2 пирамид DMB_1ND_1 и $KMND_1$.

Найдём объем этих пирамид:

$V_1 = \dfrac{1}{3} S_{MB_1ND_1} \cdot DD_1$, $S_{MB_1ND_1} = \dfrac{1}{2}$, $DD_1 = 1$, поэтому $V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 =$

$= \dfrac{1}{6}$. $V_2 = \dfrac{1}{3} S_{MND_1} \cdot KD_1$, $S_{MND_1} = \dfrac{1}{8}$, $KD_1 = \dfrac{1}{4}$ (так как $FK \parallel B_1D$),

поэтому $V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{96}$.

Найдём теперь объем общей части $V = V_1 - V_2$, $V = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{96} = \dfrac{5}{32}$.

Ответ: $\dfrac{5}{32}$.

1430. Указанное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $(3a-7)^2 \leqslant 1$, то есть $|3a-7| \leqslant 1$, $-1 \leqslant 3a - 7 \leqslant 1$, $2 \leqslant a \leqslant \dfrac{8}{3}$.

Нужно найти такие a из промежутка $\left[2; \dfrac{8}{3}\right]$, при которых функция

$f(a) = \dfrac{27(2-a)}{4(a-1)^3}$ принимает целые значения.

Найдём промежутки монотонности функции $f(a)$.

$$f'(a) = \frac{-27 \cdot 4(a-1)^3 - 4 \cdot 3(a-1)^2 \cdot 27(2-a)}{16(a-1)^6} = \frac{27(2a-5)}{4(a-1)^4}.$$

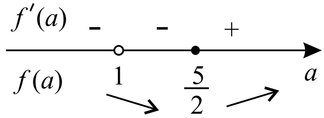


Рис. 432.

Итак, функция $f(a)$ имеет единственную точку минимума $a = \dfrac{5}{2}$

(см. рис. 432). При $a \in \left[2; \dfrac{5}{2}\right]$ функция $f(a)$ строго убывает, $f(2) = 0$, $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -1$, значит на этом промежутке у неё ровно два целых значения при $a = 2$ и $a = \dfrac{5}{2}$.

При $a \in \left(\frac{5}{2}; \frac{8}{3}\right]$ функция $f(a)$ строго возрастает, $f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{243}{250}$, значит на этом промежутке она не имеет целых значений. Искомые значения a равны 2 и $\frac{5}{2}$.

Ответ: $2; \frac{5}{2}$.

1431. Указанное уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда $(3p-2)^2 \leqslant 1$, то есть $|3p-2| \leqslant 1$, $-1 \leqslant 3p-2 \leqslant 1$, $\frac{1}{3} \leqslant p \leqslant 1$.

Нужно найти такие p из промежутка $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$, при которых функция $f(p) = \frac{1-3p}{4p^3}$ принимает целые значения. Найдём промежутки монотонности функции $f(p)$. $f'(p) = \frac{-3 \cdot 4p^3 - 4 \cdot 3p^2(1-3p)}{16p^6} = \frac{3 \cdot (2p-1)}{4p^4}$.

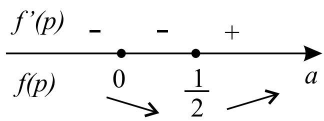


Рис. 433.

Итак, функция $f(p)$ имеет единственную точку минимума $p = \frac{1}{2}$ (см. рис. 433). При $p \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ функция $f(p)$ строго убывает, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, значит на этом промежутке у неё ровно два целых значения при $p = \frac{1}{3}$ и $p = \frac{1}{2}$.

При $p \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$ функция $f(p)$ строго возрастает, $f(1) = -\frac{1}{2}$, значит на этом промежутке она не имеет целых значений.

Искомые значения p равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{3}; \frac{1}{2}$.

1432. По условию функция $y = 2\sin x + ab - bx$ обращается в нуль ровно в двух точках. Обозначим их x_1 и x_2, $x_1 < x_2$. Эти точки разбивают числовую ось на 3 интервала: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$. Так как $y(x)$ непрерывна и не обращается на этих интервалах в ноль, она не меняет знак на этих интервалах.

Покажем, что на интервалах $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$ $y(x)$ имеет разные знаки. Не теряя общности, положим $b > 0$. Тогда при $x > \frac{ab+2}{b}$ имеем: $y \leqslant 2 + ab - bx < 0$, значит функция отрицательна на интервале $(x_2; +\infty)$, и аналогично доказывается, что функция положительна на интервале $(-\infty; x_1)$.

Поэтому на соседних промежутках $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$ или $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$ $y(x)$ имеет одинаковые знаки, а тогда либо x_1, либо x_2 является точкой экстремума и в ней $y'(x) = 2\cos x - b$ обращается в ноль.

Второе уравнение системы имеет вид:
$\sin 2x = b\sin x$; $2\sin x\cos x - b\sin x = 0$; $\sin x(2\cos x - b) = 0$. Следовательно, или при x_1, или при x_2 оно обращается в верное равенство, а значит система имеет не менее одного решения.

Ответ: да.

1433. Рассмотрим первое уравнение системы:
$3\cos x = \left(\frac{\sin\alpha}{2} + 1{,}5\right)x - 12.$

По условию графики функций $f(x) = 3\cos x$ и $g(x) = \left(\frac{\sin\alpha}{2} + 1{,}5\right)x - 12$ имеют две общие точки. $g(x) = kx - 12$, где $1 \leqslant k \leqslant 2$, так как $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{\sin\alpha}{2} \leqslant \frac{1}{2}$. Построим схематически графики функций $f(x)$ и $g(x)$.

График функции $g(x)$ — прямая, которая лежит внутри угла α.
$f(3\pi) = -3$, $g(3\pi) \geqslant 3\pi - 12$, значит $g(3\pi) \geqslant f(3\pi)$. Первое уравнение имеет ровно два корня лишь в том случае, когда прямая $g(x)$ пересекает и касается графика $f(x)$, как показано на рисунке 434.

Учитывая ограничения $g(x)$, такой случай единственен. Рассмотрим

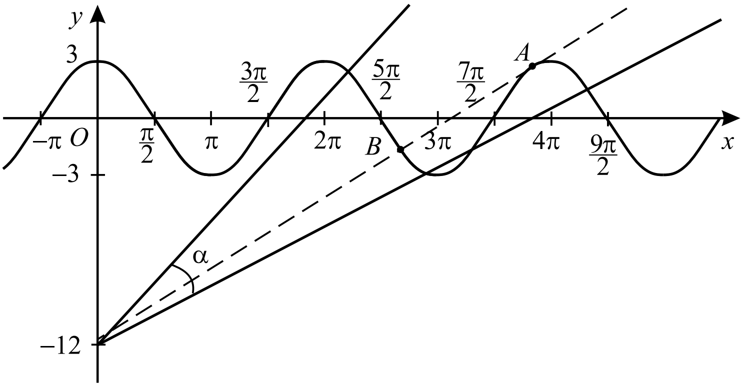


Рис. 434.

его. Так как $g(x)$ является касательной к $f(x)$, то $\frac{\sin a}{2} + 1{,}5$ — значение производной $f'(x)$ в абсциссе точки касания $A(x_0; y_0)$, то есть $(3\cos x)' = = \frac{\sin\alpha}{2} + 1{,}5$; $3\sin x_0 + \frac{\sin\alpha}{2} + 1{,}5 = 0$. Но x_0 не может являться корнем второго уравнения, так как знаменатель дроби $\dfrac{1}{\sin x + 0{,}5 + \frac{\sin\alpha}{6}}$ обращается в ноль.

Рассмотрим точку пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$ — $B(x_1, y_1)$. Замечаем, что $2\pi < x_1 < 3\pi$. Рассмотрим теперь второе уравнение системы.

$0 < \sin x_1 < 1$, то есть $\sin x_1 > 0$; $-\frac{1}{6} < \frac{\sin\alpha}{6} < \frac{1}{6}$, значит $\sin x_1 + 0{,}5 + \frac{\sin\alpha}{6} > 0$, следовательно $\dfrac{1}{\sin x_1 + 0{,}5 + \frac{\sin\alpha}{6}} > 0$, но $-|b|\sin x_1 < 0$, отсюда заключаем, что x_1 не является корнем второго уравнения системы и система решений не имеет.

Ответ: нет.

1434. Сделаем чертёж (см. рис. 435).

Обозначим $AC = x$ км, $BC = y$ км. Из условия, что проехать по дорогам на велосипеде можно за 32 минуты, получаем уравнение

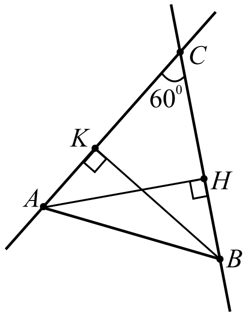


Рис. 435.

$\dfrac{x+y}{20} = \dfrac{32}{60}$, $x+y = \dfrac{32}{3}$.

Из условия, что дойти пешком, например, до пункта B можно за $4\sqrt{619}$ минут, получаем: $\dfrac{AB}{5} = \dfrac{4\sqrt{619}}{60}$, $AB^2 = \dfrac{619}{9}$, откуда по теореме косинусов имеем: $x^2+y^2-xy = \dfrac{619}{9}$.

Решим систему уравнений

$\begin{cases} x+y = \dfrac{32}{3}, \\ x^2+y^2-xy = \dfrac{619}{9}; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = \dfrac{32}{3}, \\ xy = 15; \end{cases}$ получаем пары $\left(\dfrac{5}{3}; 9\right)$ и $\left(9; \dfrac{5}{3}\right)$.

Необходимо проверить выполнение оставшегося условия. Учитывая, что $AH = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ и что точка B может располагаться не только, как показано на рисунке, но и на отрезке CH, получаем неравенство $\dfrac{x\sqrt{3}}{10} + \dfrac{\left|y - \dfrac{x}{2}\right|}{20} > 1{,}6$,

$x\sqrt{3} + \dfrac{1}{4}|2y-x| > 16$ $(*)$.

Подставив пару $\left(\dfrac{5}{3}; 9\right)$, получим $\dfrac{5}{3}\sqrt{3} > \dfrac{143}{12}$, $20\sqrt{3} > 143$, что неверно.

Аналогично убеждаемся, что пара $\left(9; \dfrac{5}{3}\right)$ удовлетворяет условию $(*)$.

Длину искомого отрезка BK найдём из $\triangle BCK$: $BK = \dfrac{y\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

1436. По условию задачи составим неравенство

$20 \leqslant \sqrt{5n} + \dfrac{1}{2} < 21$; $19{,}5 \leqslant \sqrt{5n} < 20{,}5$; $380{,}25 \leqslant 5n < 420{,}25$, $76{,}05 \leqslant n < 84{,}05$.

Учитывая, что $n \in N$, имеем $n = 77,\ 78, ..., 84$. Всего 8 значений n удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 8.

1437. По условию задачи составим неравенство
$15 \leqslant \sqrt{4n+2} < 16$,
$225 \leqslant 4n+2 < 256$,
$223 \leqslant 4n < 254$,
$55{,}75 \leqslant n < 63{,}5$.

Учитывая, что $n \in N$, имеем $n = 56,\ 57, ..., 63$. Всего 8 значений n удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 8.

1438. Пусть первоначально имеется $2n$ чисел, тогда после первого обхода по кругу после вычёркивания останутся числа с номерами
$1, 3, 5, ..., 2n-3, 2n-1$.

Следующий обход по кругу будет начинаться с вычёркивания числа 3. Это равносильно тому, что мы начинаем вычёркивание из n имеющихся чисел, при этом номер каждого из оставшихся чисел удваивается и уменьшается на 1. То есть если $f(n)$ — число, которое останется в конечном итоге (при последовательном вычёркивании из n чисел), то $f(2n) = 2f(n) - 1$. В случае, когда в круге нечётное количество чисел, например $2n+1$, то после обхода круга следующим вычёркивается число 1 и тем самым остаются числа: $3, 5, 7, ..., 2n-1, 2n+1$. В этом случае получаем $f(2n+1) = 2f(n) + 1$.

В нашем случае всего имеется 211 чисел, значит, последним будет вычеркнуто число
$f(211) = 2f(105) + 1$; $f(105) = 2f(52) + 1$; $f(52) = 2f(26) - 1$;
$f(26) = 2f(13) - 1$; $f(13) = 2f(6) + 1$; $f(6) = 2f(3) - 1$; $f(3) = 2f(1) + 1$;
$f(1) = 1$.
Теперь находим $f(3) = 2\cdot 1+1 = 3$; $f(6) = 2\cdot 3-1 = 5$; $f(13) = 2\cdot 5+1 = 11$;
$f(26) = 2\cdot 11 - 1 = 21$; $f(52) = 2\cdot 21 - 1 = 41$; $f(105) = 2\cdot 41 + 1 = 83$;

$f(211) = 2 \cdot 83 + 1 = 167.$

Ответ: 167.

1440. Вначале докажем, что диагональ не проходит через узлы сетки, лежащие внутри прямоугольника. Предположим противное, то есть диагональ проходит через некоторый внутренний узел. Введём прямоугольную декартову систему координат так, что левая нижняя вершина прямоугольника будет началом отсчёта, а оси проходят через стороны прямоугольника. Тогда координаты правой верхней вершины прямоугольника будут (m, n), а координаты внутреннего узла, через который прошла диагональ, будут (m_1, n_1). Из подобия прямоугольных треугольников получаем: $\dfrac{m}{m_1} = \dfrac{n}{n_1}$; $mn_1 = nm_1$. Отсюда mn_1 делится на n. Так как m и n взаимно просты, то n_1 должно делится на n, что невозможно ввиду $n_1 < n$. Получили противоречие, следовательно, ложным было предположение о прохождении диагонали через внутренний узел прямоугольника.
Будем двигать точку по диагонали от левой нижней к правой верхней вершине прямоугольника. Так как диагональ не проходит через внутренние узлы, то точка при движении пройдёт через $m-1$ вертикальных и $n-1$ горизонтальных сторон клеток. При каждом переходе через сторону клетки точка попадает в новую клетку. Учитывая также клетку, находящуюся в начале движения, получим, что диагональ прямоугольника пересекает $(m-1)+(n-1)+1 = m+n-1$ клеток. Непересечёнными останутся $mn - m - n + 1 = (m-1)(n-1)$ клеток. Исходя из условия, получим уравнение $(m-1)(n-1) = 116$, которое решим в натуральных числах. Натуральными делителями числа 116 являются 1, 2, 4, 29, 58, 116. Учитывая условие $m > n$, получим три решения последнего уравнения:

$$\begin{cases} m-1 = 116, \\ n-1 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 117, \\ n = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-1 = 58, \\ n-1 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 59, \\ n = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-1 = 29, \\ n-1 = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 30, \\ n = 5. \end{cases}$$

Из найденных решений условию задачи удовлетворяют только первые два, так как $\text{НОД}(30, 5) = 5 \neq 1$.

Ответ: $(117; 2)$, $(59; 3)$.

1442. Из условия следует, что $0 < c - a < 1$, откуда $a < c < a+1$. Выразим c через a из равенства $2c^2 + c = 20a + 10$.
$2c^2 + c - (20a + 10) = 0$; $D = 1 + 8(20a + 10) = 160a + 81$;

$c_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{160a+81}}{4}$, $c > a > 0$, $c = \dfrac{-1+\sqrt{160a+81}}{4}$.

Имеем $a < \dfrac{-1+\sqrt{160a+81}}{4} < a+1$, $a \in N$.

$$\begin{cases} \sqrt{160a+81} > 4a+1, \\ \sqrt{160a+81} < 4a+5, \\ a > 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 160a+81 > 16a^2+8a+1, \\ 160a+81 < 16a^2+40a+25, \\ a > 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2a^2-19a-10 < 0, \\ 2a^2-15a-7 > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство отдельно.

1. $2a^2-19a-10 < 0$, $(2a+1)(a-10) < 0$, $-\dfrac{1}{2} < a < 10$.

2. $2a^2-15a-7 > 0$, $D = 15^2+56 = 281$,

$a_{1,2} = \dfrac{15 \pm \sqrt{281}}{4}$, $a \in \left(-\infty; \dfrac{15-\sqrt{281}}{4}\right) \cup \left(\dfrac{15+\sqrt{281}}{4}; +\infty\right)$.

Вернёмся к системе, получим $a \in \left(\dfrac{15+\sqrt{281}}{4}; 10\right)$.

Учитывая, что a — натуральное число, получаем $a = 8; 9$.

При $a = 8$ $c = \dfrac{-1+\sqrt{160\cdot 8+81}}{4} = \dfrac{\sqrt{1361}-1}{4}$;

при $a = 9$ $c = \dfrac{-1+\sqrt{160\cdot 9+81}}{4} = \dfrac{-1+39}{4} = 9{,}5$ — рациональное число.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{1361}-1}{4}$.

1443. Запишем число b в виде $b = ka + c$, где $c, k \in N$, $c < a$.

$\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a+ka+c}{a} = k+1+\dfrac{c}{a}$, $0 < \dfrac{c}{a} < 1$. Из условия следует, что

$b-a = k+1$; $ka+c-a = k+1$; $k(a-1) = 1+a-c$; $k = \dfrac{a-c+1}{a-1} = 1+\dfrac{2-c}{a-1}$.

Так как $k \in N$, то $\dfrac{2-c}{a-1}$ — целое неотрицательное число, что возможно только при $c = 0, 1, 2$.

1) $c = 0$, тогда $b = k \cdot a$ и числа a и b не являются взаимно простыми.

2) $c = 1$, $k = 1 + \dfrac{1}{a-1}$, тогда из условия $k \in N$ получаем $a = 2$, $k = 2$, $b = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Проверкой убеждаемся, что пара $a = 2$, $b = 5$ удовлетворяет всем поставленным условиям.

3) $c = 2$, $k = 1$, $b = a + 2$.

Пусть в десятичной записи числа b n цифр ($n \in N$), тогда условие запишется в виде $b - a + \dfrac{b}{10^n} = \dfrac{a+b}{a}$; $2 + \dfrac{b}{10^n} = \dfrac{2a+2}{a}$; $\dfrac{b}{10^n} = \dfrac{2}{a}$; $ab = 10^n \cdot 2$; $ab = 5^n \cdot 2^{n+1}$.

Так как числа a и b взаимно просты и $a < b$, то возможно два случая.

1. $a = 1, b = 2 \cdot 10^n$. Учитывая, что $b = a + 2$, получаем уравнение $3 = 2 \cdot 10^n$, которое не имеет решений при $n \in N$.

2. $a = 2^{n+1}$, $b = 5^n$, $5^n = 2^{n+1} + 2$, $5^n = 2 \cdot (2^n + 1)$ — нет решений при $n \in N$, так как левая часть уравнения нечётна, а правая — чётна.

Ответ: $a = 2, b = 5$.

1444. Введём обозначение: $[a]$ — целая часть числа a.

Пусть в десятичной записи числа b n цифр ($n \in N$), тогда условие запишется в виде $\dfrac{b}{10^n} = \dfrac{b-2a}{a}$, $\dfrac{b}{10^n} = \dfrac{b}{a} - 2$ $(*)$. $\left[\dfrac{b}{10^n}\right] = 0$, тогда $\left[\dfrac{b}{a}\right] = 2$, то есть $b = 2a + c$, $c < a$, $c \in N$.

По условию НОД$(a, b) = 1$, тогда НОД$(a, c) = 1$.

Уравнение $(*)$ примет вид $\dfrac{2a+c}{10^n} = \dfrac{c}{a}$, $(2a + c) \cdot a = c \cdot 10^n$.

НОД$(a, c) = 1$, следовательно $(2a + c) \,\vdots\, c$ ($\vdots$ — делится нацело), тогда $2a \,\vdots\, c$ и так как a и c взаимно просты, то $2 \,\vdots\, c$.

Возможны два случая.

1) $c = 1$, тогда $(2a + 1) \cdot a = 10^n$, откуда $a = 2$, $b = 2a + 1 = 5$.

Проверкой убеждаемся, что пара $a = 2$, $b = 5$ удовлетворяет всем поставленным условиям.

2) $c = 2$, $(2a + 2) \cdot a = 2 \cdot 10^n$, $a(a + 1) = 10^n$ — нет решений для $a \in N$, $n \in N$.

Ответ: $a = 2, b = 5$.

1445. 1) Так как последняя цифра числа n^2 совпадает с последней цифрой числа b^2, где b — последняя цифра числа n, то из условия следует, что $b = 1$ или $b = 9$ ($1^2 = 1, 9^2 = 81$).

2) Если a — первая цифра числа n, то $a = 1$, или $a = 3$, или $a = 4$, так

как 1^2 и 4^2 начинаются с единицы, а несмотря на то, что $3^2 = 9$, n^2 всё же может начинаться с единицы за счёт переноса разряда при возведении в квадрат.
3) Если $a = 1$, то число n должно удовлетворять условию
$10000 < n^2 < 20000$. Следовательно, $100 < n < 100\sqrt{2} \approx 141,1 \Leftrightarrow 101 \leqslant n \leqslant 141$. Сумма этих чисел, удовлетворяющих условию задачи, равна:

$$S_1 = (101+111+121+131+141)+(109+119+129+139) = \frac{101+141}{2}\cdot 5+$$

$$+\frac{109+139}{2}\cdot 4 = 605 + 496 = 1101.$$

4) Если $a = 3$ или $a = 4$, то $100000 < n^2 < 200000$; $100\sqrt{10} < n < 200\sqrt{5}$; $316 < n < 447$. Сумма этих чисел, удовлетворяющих условию задачи, равна:

$$S_2 = (319 + 329 + ... + 439) + (321 + 331 + ... + 441) = \frac{319+439}{2}\cdot 13 +$$

$$+\frac{321+441}{2}\cdot 13 = 4927 + 4953 = 9880.$$

5) $S_1 + S_2 = 1101 + 9880 = 10981$.

Ответ: 10981.

1447. 1) Поскольку x — пятизначное число, то его можно представить в виде:
$x = x_5 \cdot 10^4 + x_4 \cdot 10^3 + x_3 \cdot 10^2 + x_2 \cdot 10 + x_1 = \overline{x_5x_4x_3x_2x_1}$, где $1 \leqslant x_i \leqslant 9$, $i = \overline{1,5}$.
2) Покажем, что все числа, получаемые из x циклическими перестановками цифр, взаимно просты с $B = 10^5 - 1$.
$\overline{x_4x_3x_2x_1x_5} = \overline{x_5x_4x_3x_2x_10} - \overline{x_500000} + x_5 = x \cdot 10 - x_5(10^5 - 1) =$
$= x \cdot 10 - x_5 \cdot B$.

Так как числа x и 10 взаимно просты с B, то полученное число, а значит, и число, полученное из x перестановкой $\overline{x_4x_3x_2x_1x_5}$, взаимно просто с B.

Аналогично получаем, что все остальные числа, получаемые из x циклической перестановкой, взаимно просты с B.

Всего из числа x циклическими перестановками (включая тождественную) можно получить 5 чисел.
3) Покажем, что все числа, получаемые из x циклической перестановкой, будут различны.

Пусть при какой-то циклической перестановке получилось исходное

число x, то есть
$x = \overline{x_5x_4x_3x_2x_1} = \overline{x_kx_{k-1}...x_1x_5...x_{k+1}}$, $k \leqslant 5$.

Тогда произведение
$x(10^k - 1) = \overline{x_kx_{k-1}...x_1x_5...x_{k+1}} \cdot 10^k - \overline{x_5x_4x_3x_2x_1} = \overline{x_kx_{k-1}...x_1} \cdot 10^5 + $
$+ \overline{x_5...x_{k+1}} \cdot 10^k - \overline{x_5x_4x_3x_2x_1} = \overline{x_kx_{k-1}...x_1} \cdot 10^5 - \overline{x_kx_{k-1}...x_1} =$
$= \overline{x_kx_{k-1}...x_1} \cdot (10^5 - 1) = \overline{x_kx_{k-1}...x_1} \cdot B$.

Так как по условию числа x и B взаимно просты, то $(10^k - 1)$ делится на $B = 10^5 - 1$.

Следовательно, $k = 5$, то есть такая перестановка тождественна. Значит, все циклические перестановки данного числа x различны.

Ответ: 5.

1448. 1) Числа n и m — полные квадраты. Обозначим $n = n_1^2$, $m = m_1^2$. Тогда $n_1^2 - m_1^2 = 111a$; $(n_1 + m_1)(n_1 - m_1) = 111a = 3 \cdot 37a$.
Так как число 37 — простое, то одно из чисел $(n_1 + m_1)$ или $(n_1 - m_1)$ делится на 37.
2) Так как n и m — трёхзначные числа, то $n_1 < \sqrt{1000}$ и $m_1 < \sqrt{1000}$. Следовательно, $n_1 - m_1 < \sqrt{1000} < 37$. Значит, $(n_1 - m_1)$ не делится на 37. Но тогда $(n_1 - m_1)$ должно делиться на $3a$ и $(n_1 + m_1)$ делится на 37. Следовательно, $37 \leqslant n_1 + m_1 < 2\sqrt{1000} < 74$.
3) Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} n_1 + m_1 = 37, \\ n_1 - m_1 = 3a, \\ n_1^2 < 1000, \\ m_1^2 \geqslant 100; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \dfrac{37 + 3a}{2}, \\ n_1^2 < 1000, \\ m_1 = 37 - n_1, \\ m_1^2 \geqslant 100. \end{cases}$$

Очевидно, что a может быть только нечётным числом. По условию $1 \leqslant a \leqslant 9$.

Подбором находим:

$-$ при $a = 9$: $n_1 = \dfrac{37 + 27}{2} = 32$; $n_1^2 = 1024 > 1000$;

$-$ при $a = 7$: $n_1 = \dfrac{37 + 21}{2} = 29$; $n_1^2 = 841 < 1000$;

$m_1 = 37 - 29 = 8$; $m_1^2 = 64 < 100$;

$+$ при $a = 5$: $n_1 = \dfrac{37 + 15}{2} = 26$; $n_1^2 = 676 < 1000$;

$m_1 = 37 - 26 = 11$; $m_1^2 = 121 > 100$;

$+$ при $a = 3$: $n_1 = \dfrac{37 + 9}{2} = 23$; $n_1^2 = 529 < 1000$;

$m_1 = 37 - 23 = 14$; $m_1^2 = 196 > 100$;

$+$ при $a = 1$: $n_1 = \dfrac{37+3}{2} = 20$; $n_1^2 = 400 < 1000$;

$m_1 = 37 - 20 = 17$; $m_1^2 = 289 > 100$.

Искомые $a \in \{1; 3; 5\}$.

Ответ: $1; 3; 5$.

1449. Так как число b — двузначное, то если к целому однозначному числу a приписать справа через запятую десятичную запись числа b, то получится число, равное $a + \dfrac{b}{100}$. Трёхзначное число, записанное цифрами чисел a и b не меняя порядка, равно $100a + b$ (так как a — однозначное, а b — двузначное). Получим уравнение:

$4\left(a + \dfrac{b}{100}\right) = \sqrt{100a + b}$; $\dfrac{4}{100}(100a + b) = \sqrt{100a + b}$; $\sqrt{100a + b} = 25$; $100a + b = 625$.

Из того, что a — однозначное, b — двузначное и из равенства $100a + b = 625$, следует, что $a = 6$, $b = 25$.

Ответ: $(6; 25)$.