МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФБГОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»

О.В. Ефременкова
И.И. Кулешова

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Методические указания

для студентов специальности «Экономика» дневной формы обучения

Рубцовск 2024

ЛЕКЦИЯ 1
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

1. Определение определителя

Для того, чтобы дать определение (или понятие) определителя *n*-го (или любого другого) порядка, нам надо разобраться с понятием «перестановка». Сделаем это на примере трех чисел: 1, 2, 3. Запишем все возможные перестановки из этих чисел (т.е. будем менять их местами):

$$(1\ 2\ 3),\ (2\ 3\ 1),\ (3\ 1\ 2), \tag{1}$$

$$(2\ 1\ 3),\ (3\ 2\ 1),\ (1\ 3\ 2). \tag{2}$$

Их шесть, причем первую перестановку из чисел 1, 2, 3 (которая записана в порядке возрастания чисел) будем называть основной. Число перестановок равно произведению этих чисел $1\cdot 2\cdot 3=6$. Значит, число перестановок из чисел от 1 до *n* будет равно произведению *n* чисел: $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot \mathrm{n}=\mathrm{n}!$ (что называется «n» факториалом), $1\cdot 2\cdot 3=3!,\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=4!$ и т.д. Вернемся к нашим перестановкам из трех первых чисел. Говорят, что в перестановке произведена транспозиция двух определенных ее элементов, если эти элементы поменяны местами. После транспозиции перестановка переходит в другую перестановку. В последней, в свою очередь, тоже можно сделать транспозицию, в результате получим третью перестановку (но не исключено, что и первую). Например: (1), (2). Обратите внимание, что перестановки (2) получены из основной перестановки при помощи одной транспозиции, а (1) – путем двух транспозиций, следовательно, число может быть как четным, так и нечетным.

Перестановка чисел называется четной (или нечетной), если она получена из основной при помощи четного (нечетного) числа транспозиций.

Обозначим через $j=(j_1,j_2,j_3,\cdots j_n)$ всевозможные различные перестановки из чисел *1, 2, 3, …, n*. Число *t(j)* – число транспозиций, которые нужно сделать, чтобы перейти от основной перестановки *1, 2, 3, …, n* к перестановке $j=(j_1,j_2,j_3,\cdots j_n)$, где $j_1,j_2,j_3,\cdots j_n$ - это числа *1, 2, 3, …, n,* взятые в некотором порядке.

Определение. Определителем (детерминантом) n-го порядка называется число, записываемое в виде:

$$\Delta=\left|a_{ik}\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}$$

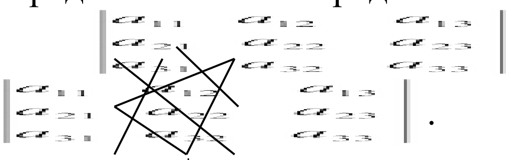
и вычисляемое по данным числам a_{ij} (действительным), (которые называются элементами определителя) по следующему закону: $\Delta=\sum_j(-1)^{t(j)}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$, где Δ- есть сумма членов определителя, распространенная на всевозможные различные перестановки $j=(j_1,\ldots,j_n)$ из чисел *1, 2, …, n*. Элемент a_{ik} находится на пересечении i – строки и k – столбца. Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ образуют главную диагональ, $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1}$ - побочную диагональ.

Рассмотрим определитель третьего порядка, где 3 строки и 3 столбца. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$, где $j = (j_1, j_2, j_3)$ - всевозможные перестановки основной перестановки 1, 2, 3.

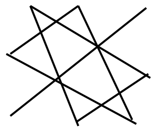
Четные $(1\ 2\ 3)$, $(2\ 3\ 1)$, $(3\ 1\ 2)$, для которых $(-1)^{t(j)} = 1$, нечетные $(3\ 2\ 1)$, $(2\ 1\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$, при этом $(-1)^{t(j)} = -1$.

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{22} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

А теперь то, что мы получим, исходя из определения определителя, покажем на самом определителе (соединим черточками элементы в произведениях), тем самым получим правило, по которому можно вычислять определители 3-го порядка:

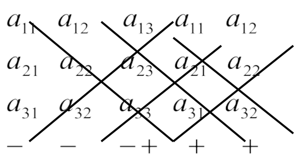


«+»



«-»

Так называемое правило «звездочки» или правило «треугольников». То же самое получим, если к определению дописать первые два столбца, складывая произведения элементов, перемноженные по главной диагонали и параллельно ей, затем вычитая произведения элементов, стоящих по побочной диагонали и параллельно ей.



Например, вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 0 - 15 - 20 - 4 = -45.$$

Рассмотрим определитель 2-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$j = (j_1, j_2)$ из чисел 1,2;

1,2 – основная (четная);

(2,1) перестановка из основной при помощи одной транспозиции (нечетная).

2. Свойства определителей

Свойство 1. Величина определителя не меняется, если в определителе все строки заменить соответствующими столбцами (1-ю строку на 1-й столбец и т.д.). Доказательство всех свойств будем приводить для определителей 3-го порядка.

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}=$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{23}a_{12}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Свойство 2. При перестановке двух строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\Delta.$$

Для доказательства этого свойства достаточно применить правило треугольников к левой и правой частям этого равенства.

Свойство 3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю. Пусть в определителе первая и вторая строки равны. Воспользуемся вторым свойством. При перестановке двух строк знак определителя поменяется на противоположный.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\Delta.$$

$\Delta=-\Delta \Rightarrow \Delta+\Delta=0,\ 2\Delta=0 \Rightarrow \Delta=0.$

Свойство 4. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5. Если соответствующие элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, то определитель равен 0. Это свойство следует из свойств 3 и 4. В самом деле: $\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{a_{22}}{a_{12}}=\frac{a_{23}}{a_{13}}=k$, тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\overset{(4)}{=}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\overset{(3)}{=}k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

Свойство 6. Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, где в 1-м определителе этой строки (столбца) только первые слагаемые, остальные все без изменений, а во втором определителе в той же строке (столбце) только вторые слагаемые, все остальные без изменений.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7. Если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + k0 = \Delta.$$

Это свойство является следствием 3, 4 и 6 свойств.

Свойство 8. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Определение. Минором элемента a_{ik} определителя n-го порядка называется определитель *(n-1),* полученный вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых находится данный элемент (i-строка, k-столбец). Обозначается M_{ik}. Величина $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ называется алгебраическим дополнением к элементу a_{ik}.

Докажем 8-е свойство:

с одной стороны:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32};$$

с другой стороны:

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) -$$

$$- a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Следовательно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

Дополнения к 8-му свойству.

Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна 0.

Например, для строк $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0,$ для столбцов $a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0.$

Проверим: $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11}(-M_{21}) + a_{12}(M_{22}) + a_{13}(-M_{23}) =$

$$- a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$- a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) -$$

$$- a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}).$$

Таким образом проверяются и другие равенства.

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 351.$$

Вычислить определитель четвертого порядка и выше, только используя 8-е свойство определителей.

Пример 2.

Для вычисления данного определителя преобразуем его, пользуясь свойствами определителей. Из первой строки вычтем соответствующие элементы третьей строки. Затем разложим его по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)3\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -117.$$

ЛЕКЦИЯ 2
МАТРИЦЫ. МЕТОД КРАМЕРА

1. Определение матрицы

При изучении определителей мы рассматривали таблицы, составленные из чисел: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Эти таблицы называются матрицами, а числа $a_{11}, a_{12} ..., a_{ij}$ - элементами матрицы. Если в матрице количество строк совпадает с количеством столбцов, то такую матрицу называют квадратной, причем число ее строк и столбцов называется порядком матрицы. Матрица, в которой число строк не совпадает с числом столбцов, называется прямоугольной. Например: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицы, имеющие только одну строку или столбец. Матрица $(a_{11} \;\; a_{12} \;\; a_{13} ... a_{1n})$ называется матрицей - строкой. Матрица  называется матрицей – столбцом.

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется определителем матрицы.

Для краткости будем обозначать какой-либо буквой алфавита: *A, B* и т.д., а определитель $|A|$=det A. Если определитель квадратной матрицы отличен от нуля, то матрица называется невырожденной, а если равен нулю, то вырожденной. Например: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, |A| = 0$, значит A – вырожденная матрица, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, |B| = 38$, значит B – невырожденная матрица.

2. Равенство матриц. Действия над ними

Две матрицы A и B называются равными (A=B), если они имеют одинаковое число строк или одинаковое число столбцов и их соответствующие элементы равны. Так, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то A=B, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$.

Сложение матриц. Если даны две квадратные матрицы одного порядка, например $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то их суммой называется матрица $C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$.

Аналогично определяется сумма прямоугольных матриц, имеющих одинаковое число строк и столбцов. Легко проверить, что сумма матриц подчиняется переместительному и сочетательному закону: A+B=B+A, A+(B+C)=(A+B)+C.

Умножение матриц на число. Произведением матрицы A на число μ называется матрица μA=$A\mu$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \mu A = \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \end{pmatrix}.$$

Точно так же умножаются на число все остальные матрицы.

Произведение матриц. Рассмотрим умножение матриц на примере двух квадратных матриц A и B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

По определению произведением матрицы A на матрицу B называется матрица C=AB, элементы которой составлены следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{21} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, элемент матрицы – произведения, находящейся на пересечении i-ой строки и j-го столбца, представляет собой сумму парных произведений элементов i-ой строки первой матрицы на соответствующий элемент j-го столбца второй матрицы. Эти правила сохраняются и для перемножения прямоугольных матриц, в которых число столбцов матрицы-множимого равно числу строк матрицы множителя.

Пример 3.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

В результате умножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько имеет матрица-множимое, и столько столбцов, сколько их имеет матрица-множитель.

Пример 4.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot1-1\cdot3 & 3\cdot1-1\cdot1 \\ -1\cdot1+2\cdot3 & -1\cdot1+2\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Этот пример показывает, что произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону $AB \neq BA$. Легко проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному и распределительному законам: $A(BC)=(AB)C$, $(A+B)C=AC+BC$. Рассмотрим матрицу E.

Матрица $E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ называется единичной.

Для единичной матрицы выполняется переместительный закон умножения. Если матрица E квадратная, то $|E|=1$.

Если A и B две квадратные матрицы одного порядка, то определитель матрицы $C=AB$ равен произведению матриц A и B.

$|C|=|A||B|$.

Пример 5.

$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C=AB=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

$|A|=5$, $|B|=-2$, $|C|=-10$, $-10=5\cdot(-2)$.

Обратная матрица.

Определение: если A – квадратная матрица, то обратной для нее называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию $A\cdot A^{-1}=E$ или $A^{-1}\cdot A=E$.

Теорема. Для того, чтобы квадратная матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица А была невырожденной, т.е. чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Покажем, что в этом случае $|A|\neq 0$.

От противного. Пусть $|A|=0$, то по определению произведения $|A\cdot A^{-1}|=|A||A|^{-1}=0$. А это невозможно в силу определения обратной матрицы: $|A\cdot A^{-1}|=|E|=1$. Следовательно, $|A|\neq 0$.

Достаточность. Для простоты приведем доказательство для случая матрицы третьего порядка. Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - невырожденная матрица, т.е. $|A|\neq 0$.

Покажем, что в этом случае для нее существует обратная матрица.

Пусть A_{ik} - алгебраическое дополнение элемента a_{ik}. Матрица A^{-1}, обратная к A, получается следующим образом:

1. Составим матрицу B, заменяя в матрице A каждый ее элемент a_{ik} его алгебраическим дополнением A_{ik}, деленном на $|A|$.

$$B=\begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| & A_{13}/|A| \\ A_{21}/|A| & A_{22}/|A| & A_{23}/|A| \\ A_{31}/|A| & A_{32}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}.$$

2. Составим новую матрицу B^*, поменяв в B местами строки со столбцами (матрица B^* называется транспонированной по отношению к матрице B). Имеем:

$$B^*=\begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем произведение $A\cdot B^*$:

$$A \cdot B^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}{|A|} & \dfrac{a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}}{|A|} & \dfrac{a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}}{|A|} \\ \dfrac{a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}}{|A|} & \dfrac{a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}}{|A|} & \dfrac{a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33}}{|A|} \\ \dfrac{a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13}}{|A|} & \dfrac{a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23}}{|A|} & \dfrac{a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

По свойству 8 определителей получаем: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$, т.е. $AB^*=E$, откуда $B^*=A^{-1}$, следовательно, если $|A| \neq 0$, обратная матрица существует.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Найти A^{-1} к матрице A. Вычислим определитель матрицы и найдем алгебраические дополнения ко всем элементам:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ |A| = -9.$$

$A_{11} = 3,\ A_{21} = -4,\ A_{31} = 2,$

$A_{12} = -6,\ A_{22} = 2,\ A_{32} = -1,$ $\qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}.$

$A_{13} = 3,\ A_{23} = -1,\ A_{33} = -4,$

Проверка: по определению обратной матрицы $A \cdot A^{-1} = E.$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/3+4/3+0 & 4/9-4/9+0 & -2/9+2/9+0 \\ -1+4/3-1/3 & 4/3-4/9+1/9 & -2/3+2/9+4/9 \\ 0+2/3-2/3 & 0-2/9+2/9 & 0+1/9+8/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ЛЕКЦИЯ 3
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = C_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = C_m. \end{cases} \qquad (3.1)$$

В коэффициенте a_{ik} первый индекс означает номер уравнения, а второй – номер неизвестного $x_{11}x_{21}\ldots$ - неизвестное.

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет решение, и несовместной, если не имеет решения. Совместная система линейных уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет бесчисленное множество решений. Две совместные системы линейных уравнений называются равносильными, если каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот, каждое решение второй системы является решением первой.

Следующие элементарные преобразования переводят систему линейных уравнений в равносильную ей систему:

1) перемена местами двух любых уравнений;

2) умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;

3) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

В результате таких элементарных преобразований в системе может появиться уравнение, все коэффициенты которого при неизвестных и свободный член равны нулю. Поскольку такому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестных, то это уравнение можно отбросить. А если в уравнении коэффициенты при неизвестных будут равны нулю, а свободный член – нет, то это уравнение не будет удовлетворять никаким значениям неизвестного и, следовательно, полученная система несовместна, а значит несовместна первоначальная.

2. Метод Крамера

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = C_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = C_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = C_3. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - будем называть его определителем системы.

Решим систему (3.2). Для этого умножим первое уравнение на алгебраическое дополнение A_{11} к элементу a_{11}, второе – на A_{21} к элементу a_{21}, и третье уравнение – на A_{31} к элементу a_{31}:

$$a_{11}A_{11}x_1 + a_{12}A_{11}x_2 + a_{13}A_{11}x_3 = A_{11}C_1,$$

$$a_{21}A_{21}x_1 + a_{22}A_{21}x_2 + a_{23}A_{21}x_3 = A_{21}C_2,$$

$$a_{31}A_{31}x_1 + a_{32}A_{31}x_2 + a_{33}A_{31}x_3 = A_{31}C_1.$$

Сложим все эти уравнения:

$$x_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) + x_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) +$$

$$+ x_3(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) = C_1A_{11} + C_2A_{21} + C_3A_{31}.$$

$$x_1 \cdot \Delta = C_1A_{11} + C_2A_{21} + C_3A_{31}.$$

Рассмотрим

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} C_1 & a_{12} & a_{13} \\ C_2 & a_{22} & a_{23} \\ C_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = C_1 A_{11} + C_2 A_{21} + C_3 A_{31},\ x_1 \cdot \Delta = \Delta_{x_1} \Rightarrow x_1 = \Delta_{x_1} / \Delta.$$

Аналогично получим для x_2 и x_3:

$x_2 = \Delta_{x_2} / \Delta,\ x_3 = \Delta_{x_3} / \Delta$ - формулы Крамера, где

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{12} & C_1 & a_{13} \\ a_{21} & C_2 & a_{23} \\ a_{31} & C_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & C_1 \\ a_{21} & a_{23} & C_2 \\ a_{31} & a_{33} & C_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы $\Delta = 0$ и по крайней мере один из $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3} \neq 0$, то система (3.2) не имеет решения, т.е. несовместна. Действительно, пусть для примера $\Delta_{x_1} \neq 0$.

$x_1 \cdot \Delta = \Delta_{x_1}$, т.к. $\Delta = 0$, то $x_2 \cdot \Delta = \Delta_{x_1}$, невозможно, т.к. $\Delta_{x_1} \neq 0$.

Если $\Delta = 0$ и $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3} = 0$, то система либо имеет множество решений, либо несовместна.

3. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система уравнений (3.2). Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрицу системы и $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрицу столбец из неизвестных, $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$ - матрицу столбец из свободных членов. Найдем произведение матриц A и X.

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix}.$$

Используя определения равенства матриц, систему линейных уравнений (3.2) можно записать в таком виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

или короче

$$A \cdot X = C \tag{3.3}$$

- матричное уравнение.

Если A – невырождена, т.е. $|A| \neq 0$, то уравнение (33) решается следующим образом: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C$. Пользуясь сочетательным законом для перемножения матриц, получаем: $(A^{1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot C,\ E \cdot X = A^{-1} \cdot C,\ X = A^{-1} \cdot C$ - решение матричного уравнения.

Пример 5.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23,. \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Составим обратную матрицу к матрице системы

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5.$$

4. Метод Гаусса (метод последовательного исключения)

Вернемся к нашей первой системе линейных уравнений. Допустим, что в системе (3.1) коэффициент при $x_1 - a_{11} \neq 0$. Исключим сначала x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого, прежде всего, разделим обе части первого уравнения на $a_{11} \neq 0$, тогда получаем новую систему, равносильную данной.

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}/a_{11}x_2 + \ldots + a_{1n}/a_{11}x_n = C_1/a_{11}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = C_m. \end{cases} \tag{3.4}$$

Умножим теперь первое уравнение на a_{21} и вычтем из второго уравнения. Затем умножим первое уравнение на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д. В результате получим равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = c'_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = c'_2, \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = c'_n. \end{cases} \tag{3.5}$$

Затем разделим второе уравнение на $a'_{22} \neq 0$, умножим его на a'_{32} и вычтем из третьего уравнения, затем на a'_{42} и вычтем его из четвертого уравнения и т.д., т.е. избавимся от x_2 в уравнениях, начиная с третьего.

Если, продолжая этот процесс, мы придем к системе, содержащей уравнение, в котором все коэффициенты в левой части равны 0, а свободный член отличен от 0, то эта система несовместна. В том случае, когда система совместна, мы придем либо к системе

$$\left.\begin{matrix} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n = c''_1 \\ x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n = c_2'' \\ x_p + \ldots + b_{pn}x_n = c''_p \end{matrix}\right\}, \tag{3.6}$$

$$p < n$$

либо к системе

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = c_1'' \\ x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n = c_2'' \\ x_n = c''_n \end{array}\right\}. \tag{3.7}$$

Система вида (3.6) называется ступенчатой, а система (3.7) – треугольной. В случае треугольной системы из последнего уравнения находим x_n, подставляем в предпоследнее, находим x_{n-1} и т.д. до x_1. Таким образом, если данная система после элементарных преобразований приводится к треугольной системе, то это означает, что система совместна и определена.

Если же данная система приводится к ступенчатой, то система совместна и не определена, т.к. имеет множество решений.

Все элементарные преобразования можно проверить и над матрицами, составленными из коэффициентов системы.

Системе (3.1) соответствуют две матрицы – A и B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \cdots a_{3n} \end{pmatrix}$$ и

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} C_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} C_2 \\ a_{31} & a_{32} \cdots a_{3n} C_3 \end{pmatrix}.$$

A – матрица системы, B – расширенная матрица системы.

При решении системы методом Гаусса элементарные преобразования системы заменяются соответствующими элементарными преобразованиями, выполняемыми над расширенной матрицей B.

Например: $\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ & -1,5 & 2,5 & 4,5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ & 1 & -1 & -1 \\ & -1,5 & 2,5 & 4,5 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ & 1 & -1 & -1 \\ & & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вернемся к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5, \\ x_2 - x_3 = 1, \\ x_3 = 3, \end{cases} \to x_3 = 3,\ x_2 = -1 + 3 = 2,\ x_1 = 0,5 - 0,5x_2 + 0,5x_3 = 1.$$

ЛЕКЦИЯ 4
РАНГ МАТРИЦЫ. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЛИНЕЙНАЯ ОДНОРОДНАЯ СИСТЕМА

1. Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу $m \times n$ (m строк, n столбцов):

$$A = [illegible].$$

Выделим в этой матрице произвольные k - строк и k - столбцов. Элементы, находящиеся на пересечении этих выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k.

Минором k – порядка матрицы A называется определитель квадратной матрицы, получающийся из данной матрицы выделением произвольных k - строк и k – столбцов. Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, размером 3х4 одним из миноров 3-го порядка является определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$. Минором второго порядка - $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. Сами элементы матрицы являются минорами первого порядка.

Определение. Рангом матрицы A называется наибольший из порядков, отличных от нуля, ее миноров. Если ранг матрицы A равен r, то это означает, что в матрице A существует хотя бы один, отличный от нуля, минор порядка r, а всякий минор порядка, большего, чем r, равен нулю. Ранг матрицы будем обозначать так: $r(A)$.

Пример 6. Найти ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единственный определитель четвертого порядка равен нулю (т.к. строка нулевая).

Составим минор третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0, \; r(A) = 3.$

Метод вычисления определителей, составленных из элементов матрицы для нахождения нулевого минора, называется методом окаймления минора.

При определении ранга матрицы приходится выделять очень много определителей. Чтобы облегчить этот процесс, над матрицей выполняются элементарные преобразования:

1. Умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) на одно и то же число, не равное нулю.

2. Прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

3. Перемена местами строк (столбцов) матрицы.

4. Отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются эквивалентными. Ранги эквивалентных матриц равны. Этим можно пользоваться при вычислении ранга матрицы.

Пример 7.

[illegible]

2. Теорема существования решения систем линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли)

При решении систем линейных уравнений методом Гаусса ответ на вопрос, совместна система или нет, может быть дан лишь в конце решения. Однако можно дать ответ на этот вопрос и, не решая системы уравнений:

[illegible]

(4.1)

Т е о р е м а К р о н е к е р а - К а п е л л и.

Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} c_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} c_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} c_m \end{pmatrix}.$$

Доказательство

Необходимость. Пусть система (4.1) совместна и $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ - одно из ее решений. Докажем, что r(A)=r(B). Подставляя $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ в систему, получим m равенств:

[illegible]

(4.2)

Выполним над матрицей *B* следующие преобразования: к последнему столбцу прибавим первый, умноженный на $(-\lambda_1)$, затем второй, умноженный на $(-\lambda_2)$ и т.д., n-й, умноженный на $(-\lambda_n)$. Тогда в силу равенств (4.2) матрица *B* перейдет в *B*’: но при элементарных преобразованиях ранги матриц равны *r*(*B*)=*r*(*B*’), но *B*’=*A*. Следовательно, *r*(*B*)=*r*(*A*).

$$B' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} 0 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} 0 \end{pmatrix}.$$

Достаточность. Пусть *r*(*B*)=*r*(*A*)=*r*. Докажем, что система (4.1) совместна. Так как *r*(*A*)=*r*, значит, существует минор порядка *r*, отличный от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Последние (*m*-*r*) уравнений являются следствиями первых *r* уравнений, а значит, их можно отбросить.

Система (1) будет совместна системе (1’):

(4.1’)

Возможны два случая: $r=n$, $r<n$.

Если $r=n$, то число неизвестных равно числу уравнений и $\Delta \neq 0$. Следовательно, эта система имеет единственное решение и это решение можно найти по формуле Крамера.

Если $r<n$, то число уравнений меньше числа неизвестных. Перенося члены, содержащие $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_n$ в правую часть уравнений, получим систему:

(4.1”)

Придавая неизвестным $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_n$ свободные значения, получаем систему, эквивалентную системе (1’), определитель которой не равен нулю и имеет единственное решение, т.к. значения $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_n$ - произвольны, то, следовательно, система (1”), а значит и (1’), если $r<n$, имеет множество решений.

3. Литейная однородная система из n уравнений с n неизвестными

(4.3)

Эта система совместна, т.к. имеет нулевое решение: $x_1 = x_2 = x_3 = \dots x_n = 0$.

Теорема.

Для того, чтобы система (4.3) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Δ был равен нулю.

Доказательство.

Необходимость. В случае однородной системы каждый определитель $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}, \dots, \Delta_{x_n}$ равен нулю, т.к. содержит столбец с нулевыми элементами. Поэтому по формуле Крамера получаем:

$\Delta \cdot x_1 = 0,\ \Delta \cdot x_2 = 0,\ \Delta \cdot x_3 = 0, \dots, \Delta \cdot x_n = 0.$

Если система (4.3) имеет ненулевое решение, то хотя бы одно из неизвестных отлично от нуля, например $x_1 \neq 0 \Rightarrow \Delta = 0.$

Достаточность. Пусть $\Delta = 0$, тогда матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$ имеет ранг меньше n, значит, система имеет множество решений, т.е. существует ненулевое решение.

ЛЕКЦИЯ 5
ВЕКТОР. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ
НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ. БАЗИС
РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ОРТАМ

Вектором называется направленный отрезок прямой, имеющий определенную длину, т.е. отрезок определенной длины, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец: $A\vec{B} = \vec{a}$.

Длина вектора $A\vec{B}$ называется его модулем $|A\vec{B}|$ или $|\vec{a}|$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными. Два вектора равны, если они сонаправлены, коллинеарны и их модули равны: $\vec{a}=\vec{b}$.

Линейными операциями называются операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число.

Сумма векторов: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ соединяет начало первого слагаемого с концом второго: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Разность векторов: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Умножение вектора на число

Даны вектор $\vec{a}$ и число λ. Произведением вектора на число называется вектор $\vec{c}$, коллинеарный $\vec{a}$ и имеющий длину $|\vec{c}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ и сонаправленный $\vec{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направленный, если $\lambda<0$. Из определения умножения вектора на число следует, что если $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, очевидно, что и обратно, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

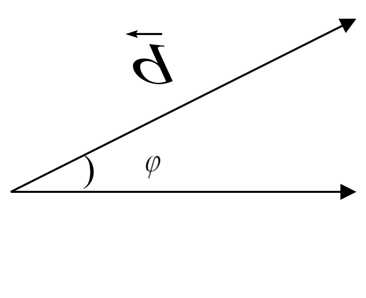
Таким образом, два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

Распределительный закон

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$; $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$.

Угол между двумя векторами

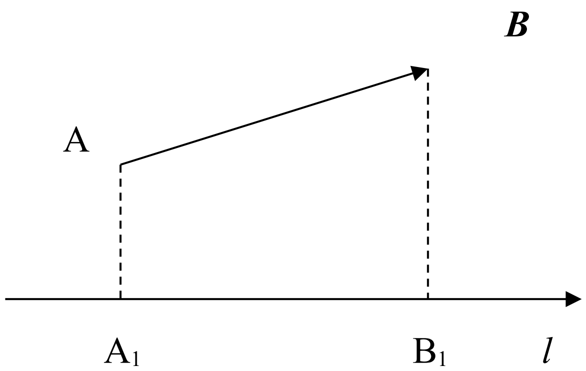
Пусть в пространстве даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим из произвольной точки С векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Углом между двумя векторами называется наименьший угол, на который надо повернуть один из векторов до его полного совпадения со вторым.



Проекция вектора на ось

Пусть l - некоторая ось, $\vec{AB}$ - вектор, произвольно расположенный в пространстве.

A_1 – проекция точки А на l, B_1 – проекция точки В на l. Точка A_1 имеет координату x_1, точка B_1 – координату x_2.



Разность x_2-x_1 между координатами проекций конца и начала вектора $\vec{AB}$ на ось l называется проекцией вектора $\vec{AB}$ на эту ось.

Если $\vec{AB}$ образует с осью l острый угол, то $x_2-x_1>0$ ($x_2>x_1$), проекция положительная.

Если угол между $\vec{AB}$ и l – тупой, то $x_2<x_1$ и проекция x_2-x_1 – отрицательна.

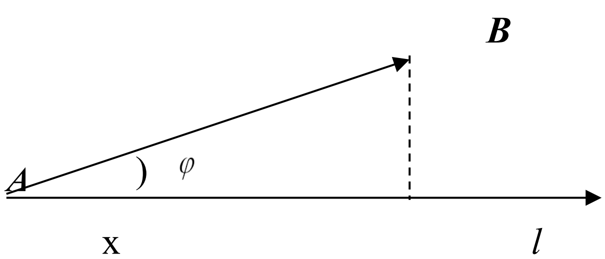
Если $\vec{AB}$ перпендикулярен к l, то $x_2=x_1$ и проекция x_2-x_1 равна нулю. Обозначение $пр_l \vec{AB}$.

Теорема 1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна модулю вектора а, умноженному на косинус угла φ между векторами и осью:

$пр_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$; $x=|AB|\cos\varphi$.

Свойства:

1. $пр_l(\vec{a}+\vec{b})=пр_l\vec{a}+пр_l\vec{b}$.
2. $пр_l(\lambda\vec{a})=\lambda\, пр_l\vec{a}$.



Линейная зависимость векторов. Базис

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ называются линейно зависимыми, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, не равные нулю, что выполняется равенство:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = 0. \qquad (1)$$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ называются линейно независимыми, если выполняется равенство (1) только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Предположим, что $\lambda_1 \neq 0$, тогда из (1) получим:

$$\vec{a}_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a}_3 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\vec{a}_k.$$

Пусть $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mu_2, \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \mu_3$ и т.д., тогда $\vec{a}_1 = \mu_2\vec{a}_2 + \mu_3\vec{a}_3 + \ldots + \mu_k\vec{a}_k$.

Выражение, стоящее в правой части этого неравенства, называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$. Таким образом, если несколько векторов линейно зависимы, то хотя бы один из них всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных и наоборот.

Теорема (без доказательства). Всякие три вектора a, b, c на плоскости линейно зависимы.

Для двух векторов a и b, если они коллинеарны, то $a = \lambda b$, а значит a является линейной комбинацией вектора b, т.е. a и b линейно зависимы, отсюда следует:

Теорема 2. Для того, чтобы a и b были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарны.

Теперь рассмотрим векторы в пространстве.

Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной плоскости.

Как и в случае плоскости, можно показать, что:

а) 4 вектора и больше в пространстве линейно зависимы;

б) для того, чтобы 3 вектора были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Базисом на плоскости называются два любых линейно независимых вектора. b и c – неколлинеарны, а значит линейно независимы и образуют базис, тогда третий вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы базиса: $\vec{a}_1 = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c}$ - говорят, что вектор a разложен по базису, образованному векторами b и c. Числа λ_1 и λ_2 называются аффинными координатами $\vec{a}$в этом базисе $\vec{a}_1 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Базисом в пространстве называют 3 любых линейно независимых вектора: $\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c} + \lambda_3 d$.

Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по осям координат

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве oxyz. На каждой из осей выберем единичный вектор, направления которых совпадают с направлением осей.

Эти три единичные взаимно перпендикулярные вектора называются ортами, т.к. i, j, k не компланарны, то они линейно независимы, а значит образуют базис, который называется декартовым ортогональным базисом.

Рассмотрим вектор $\vec{a}$ в пространстве, перенесем его в начало координат $O\vec{M} = \vec{a}$.

$$O\vec{M} = O\vec{M}_1 + O\vec{M}_2 + P\vec{M},\ P\vec{M} = O\vec{M}_3.$$

$$O\vec{M}_1 = a_{x\vec{i}} = np_{ox}O\vec{M} \cdot \vec{x},\ O\vec{M}_2 = a_{y\vec{j}} = np_{oy}O\vec{M} \cdot \vec{y},\ O\vec{M}_3 = a_{z\vec{k}} = np_{oz}O\vec{M} \cdot \vec{k}.$$

$a = a_{x\vec{i}} + a_{y\vec{j}} + a_{z\vec{k}}$ (*) – эта формула для разложения вектору по декартову базису.

Пусть точка М имеет координаты x, y, z, тогда $O\vec{M} = xi + yj + zk$. Проекции вектора a на оси координат называются прямоугольными координатами a_x, a_y, a_z. Так как $\vec{a}$ является диагональю параллелограмма, то $a^2 = |OM_1|^2 + |OM_2|^2 + |OM_3|^2, |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$

Рассмотрим теперь вектор $A\vec{B}$.

Координаты $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$. Из проекции вектора на ось следует, что

$$np_{ox}A\vec{B} = x_2 - x_1,\ np_{oy}A\vec{B} = y_2 - y_1,\ np_{oz}A\vec{B} = z_2 - z_1.$$

$$A\vec{B} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

$$|A\vec{B}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

ЛЕКЦИЯ 6
ДЛИНА ВЕКТОРА
СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА
ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

1. Длина вектора

Рассмотрим вектор $A\vec{B}$, $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$.

Из определения проекции вектора на ось следует:

$$np_{ox}A\vec{B} = x_2 - x_1,\ np_{oy}A\vec{B} = y_2 - y_1,\ np_{oz}A\vec{B} = z_2 - z_1.$$

На основании этого имеем:

$$A\vec{B} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

$$|A\vec{B}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2. Деление отрезка в данном отношении

Разделить отрезок M_1M_2 в данном отношении $\lambda > 0$ означает: найти на этом отрезке такую точку М, что имеет место равенство:

$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda$ или $M_1M = \lambda MM_2$.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, а точка М – текущие координаты (x, y, z), которые надо найти.

Рассмотрим $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$, так как $\lambda > 0$, то $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$ или $(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}, = \lambda(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$

Из равенств векторов следует равенство их проекций, значит:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \to \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) \to \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) \to \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если точка М является серединой M_1M_2, то $M_1M = MM_2$ и значит $\lambda = 1$. Тогда координаты точки М – это среднее арифметическое соответствующих координат концов отрезков:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \; z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3. Направляющие косинусы

Направление вектора в пространстве определяется углами, которые вектор составляет с осями координат. Косинусы этих углов $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называют направляющими косинусами вектора.

Пусть дан вектор $O\vec{M} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Тогда $x = пр_x a = |a|\cos\alpha$, $y = пр_y a = |a|\cos\beta$, $z = пр_z a = |a|\cos\gamma$.

$\cos\alpha = \frac{x}{|a|}, \cos\beta = \frac{y}{|a|}, \; \cos\gamma = \frac{z}{|a|},$ так как $|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

Пример 1

Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если А(1, 2, 3), В(2, 4,5), $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 2).$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{1}{3}, \; \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Условие коллинеарности. Пусть векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ коллинеарны. Тогда $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, то $x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = \lambda x_2\vec{i} + \lambda y_2\vec{j} + \lambda z_2\vec{k}$, $x_1 = \lambda x_1, \; y_1 = \lambda y_1, z_1 = \lambda z_1, \; \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda$. Таким образом, для того, чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были пропорциональны.

4. Скалярное произведение и его свойства

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha.$$

Рассмотрим $пр_{\vec{a}}\vec{b}$ и $пр_{\vec{b}}\vec{a}$.

$$пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\alpha,\; пр_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta.$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot пр_{\vec{a}}\,\vec{b} \Rightarrow пр_{\vec{a}}\,\vec{b} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|},$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|\cdot пр_{\vec{b}}\,\vec{a} \Rightarrow пр_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{b}|}.$$

В частном случае, если $|\vec{a}|=1$, то $пр_{\vec{a}}\vec{b} = (\vec{a},\vec{b})$ проекция вектора на единичный вектор равна скалярному произведению векторов.

Рассмотрим некоторые свойства скалярного произведения.

1. Скалярное произведение обладает переместительным свойством:

$$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a}),\; (\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\beta = (\vec{b},\vec{a}).$$

2. Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя:

$$\lambda(\vec{a},\vec{b}) = (\lambda\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a},\lambda\vec{b}).$$

Пусть $\lambda > 0$,

$$\lambda(\vec{a},\vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = (\lambda\vec{a},\vec{b}) = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha,$$

$$\lambda(\vec{a},\vec{b}) = (\lambda\vec{a},\vec{b}) \text{ и т.д.}$$

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством:

$$((\vec{a},\vec{b}),\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}),$$

$$((\vec{a},\vec{b}),\vec{c}) = |\vec{c}|\,пр_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|(пр_{\vec{c}}\vec{a} + пр_{\vec{c}}\vec{b}) = |\vec{c}|\,пр_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}|\,пр_{\vec{c}}\vec{b} =$$

$$(\vec{c},\vec{a}) + (\vec{c},\vec{b}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}).$$

Если скалярное произведение равно нулю, то равен нулю либо один из векторов, либо $\cos\alpha$, а это означает, что $\alpha = 90^0$, $\vec{a}\perp\vec{b}$. Таким образом, отсюда вытекает условие перпендикулярности двух векторов: для того, чтобы $\vec{a}\perp\vec{b}$, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов равнялось нулю.

Теперь рассмотрим скалярное произведение вектора самого на себя: $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2\cos 0 = |\vec{a}|^2$, т.о. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

Пример 2. Дан вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b},\ |\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 5,\ \cos(\vec{a},\vec{b}) = 60^0$. Найти $|\vec{c}|$.

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2} = \sqrt{(2\vec{a}+3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 12(\vec{a},\vec{b}) + 9\vec{b}^2} = \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + 9|\vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{4\cdot 16 + 12\cdot 4\cdot 5\cdot\cos 60^0 + 9\cdot 25} = \sqrt{64+120+225} = \sqrt{409} = 20{,}22.$$

Рассмотрим скалярное произведение векторов, если векторы разложены по ортам: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.

$$(\vec{a},\vec{b}) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2(\vec{i},\vec{i}) + x_1y_2(\vec{i},\vec{j}) + x_1z_2(\vec{i},\vec{k}) +$$

$$y_1z_2(\vec{j},\vec{i}) + y_1y_2(\vec{j},\vec{j}) + y_1z_2(\vec{j},\vec{k}) + z_1x_2(\vec{k},\vec{i}) + z_1y_2(\vec{k},\vec{j}) + z_1z_2(\vec{k},\vec{k}) =$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений их соответствующих координат.

Условие перпендикулярности $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$

Пример 3. При каком m вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ перпендикулярен вектору $\vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + m\vec{k}$?

Из условия перпендикулярности: $(\vec{a},\vec{b}) = 0,\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-5) - 1 \cdot m = 0,$ $2 - 15 - m = 0,\ m = -13.$

Косинус угла между векторами: из определения скалярного произведения векторов $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,$ $\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$

Пример 4. Найти внутренние углы треугольника ΔABC, где A(0, -1, 2), B(-1, 1, 1), C(2, 0, 8).

$$A\vec{B}(-1,2,-1),\ A\vec{C} = (2,1,1),\ B\vec{A} = (1,-2,1),\ B\vec{C} = (3,-1,2).$$

$$\cos\alpha = \frac{-2+2-1}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = -\frac{1}{6};\ \cos\varphi = \frac{3+2+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9+1+4}} = \frac{7}{\sqrt{6\cdot 14}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}};$$

$$\cos\delta = \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

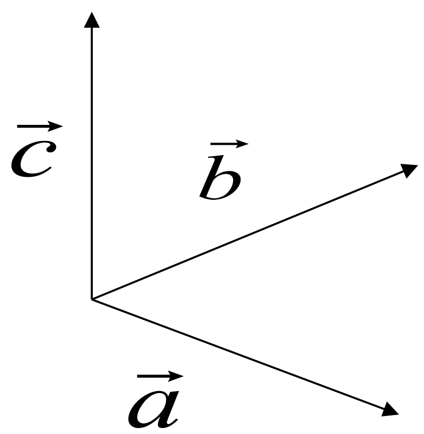
ЛЕКЦИЯ 7
ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ. ОБЪЕМ. КОМПЛАНАРНОСТЬ

Определение. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который определяется следующим образом:

1. Модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на сторонах, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha.$

2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости этого праллелограмма, т.е. $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}.$

3. Направление вектора $\vec{c}$: если поворот по кратчайшему пути от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ совершается против часовой стрелки, то $\vec{c}$ направлен вверх перпендикулярно к плоскости параллелограмма. Если по часовой стрелке, то перпендикулярно вниз. Обозначается $[\vec{a}\times\vec{b}]$.



Свойства векторного произведения

1. $[\vec{a}\times\vec{b}\,] = -[\vec{b}\times\vec{a}\,].$ Это следует из определения векторного произведения.

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т.е.

$$\lambda[\vec{a}\times\vec{b}\,] = [\lambda\vec{a}\times\vec{b}\,] = [\vec{a}\times\lambda\vec{b}\,],$$

$$\lambda > 0: \ |\lambda[\vec{a}\times\vec{b}\,]| = |\lambda|\,|[\vec{a}\times\vec{b}\,]| = \lambda\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\alpha,$$

$$|[\lambda\vec{a}\times\vec{b}\,]| = |\lambda|\,|\vec{a}|\times|\vec{b}|\,\sin(\lambda\vec{a},\vec{b}\,) = \lambda\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\alpha.$$

Вектор $\lambda[\vec{a}\times\vec{b}\,]$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $[\lambda\vec{a}\times\vec{b}\,]$ также перпендикулярен к $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.к. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в одной плоскости, следовательно векторы $[\vec{a}\times\vec{b}\,]$ и $[\lambda\vec{a}\times\vec{b}\,]$ коллинеарны.

3. Векторное произведение обладает распределительным свойством, т.е. $[\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}\,)] = [\vec{a}\times\vec{b}\,] + [\vec{a}\times\vec{c}\,].$

4. Если векторное произведение двух векторов равно нулевому вектору, то либо равен нулю один из перемножаемых векторов, либо векторы коллинеарны. В частности $[\vec{a}\times\vec{a}\,] = 0$.

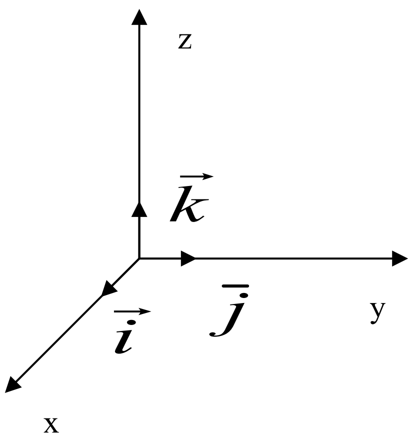
Пример 1. Найти

$$(2\vec{a}+3\vec{b}\,)\times(\vec{a}-2\vec{b}\,) = [2\vec{a}\times\vec{a}\,] + [3\vec{b}\times\vec{a}\,] - [2\vec{a}\times2\vec{b}\,] -$$

$$-[3\vec{b}\times2\vec{a}\,] = 3[\vec{b}\times\vec{a}\,] - 4[\vec{a}\times\vec{b}\,] = 7[\vec{b}\times\vec{a}\,].$$

Пусть даны векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Найдем $[\vec{a}\times\vec{b}\,]$, но предварительно рассмотрим попарные произведения векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$[\vec{i}\times\vec{j}\,] = \vec{k},\ [\vec{j}\times\vec{k}\,] = \vec{i},\ [\vec{k}\times\vec{i}\,] = \vec{j},\ \vec{i}\times\vec{i} = 0,\ \vec{j}\times\vec{j} = 0,\ \vec{k}\times\vec{k} = 0.$$



$$(\vec{a},\vec{b}\,) = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\,)(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\,) = x_1y_2[\vec{i}\times\vec{j}\,] + x_1z_2[\vec{i}\times\vec{k}\,] +$$

$$+ y_1x_2[\vec{j}\times\vec{i}\,] + y_1z_2[\vec{j}\times\vec{k}\,] + z_1x_2[\vec{k}\times\vec{i}\,] + z_1y_2[\vec{k}\times\vec{j}\,] = x_1y_2\vec{k} - x_1z_2\vec{j} - y_1x_2\vec{k} +$$

$$+ y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} = \vec{k}(x_1y_2 - y_1x_2) - \vec{j}(x_1z_2 - z_1x_2) + \vec{i}(y_1z_2 - z_1y_2) =$$

$$= i\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 2. Найти $[\vec{a}\times\vec{b}\,]$, если $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.

$$[\vec{a}\times\vec{b}\,] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 11\vec{j} - 11\vec{k}.$$

Так как $S_{\Delta} = \dfrac{1}{2}S_{\square} = \dfrac{1}{2}[\vec{a}\times\vec{b}\,]$.

Пример 3. (Решить самостоятельно).

Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках A(2, 3, 1), B(5, 6, 3), C(7, 1, 10).

Смешанное произведение векторов

Рассмотрим произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, составленное следующим образом: $([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c})$. Такое произведение называется смешанным произведением трех векторов. Смешанное произведение – число. Найдем его:

$[\vec{a}\times\vec{b}]=\vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, так как $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, то

$$[\vec{a}\times\vec{b}]\times\vec{c}==x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения векторов

1. $([\vec{b}\times\vec{a}],\vec{c})=-([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c})$.

$$([\vec{b}\times\vec{a}],\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=-([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c})=([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c})=([\vec{b}\times\vec{c}]\vec{a})=$$

$$=([\vec{c}\times\vec{a}]\vec{b})=-([\vec{b}\times\vec{a}]\vec{c})=-([\vec{a}\times\vec{c}]\vec{b})=-([\vec{c}\times\vec{b}]\vec{a}).$$

$$\overrightarrow{abc}=([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c}).$$

Геометрический смысл смешанного произведения

Рассмотрим три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, не лежащие в одной плоскости. Построим параллелепипед.

Найдем $[\vec{a}\times\vec{b}]=S_{□}=\delta$, $\overrightarrow{abc}=([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c})=\delta|\vec{c}|\cos\varphi$, $\varphi<\pi/2$, и обозначая высоту параллелепипеда через *h*, найдем ее: $h=|\vec{c}|\cos\varphi$.

$\overrightarrow{abc}=S_{осн}h=V$, если $\varphi>\pi/2$, то $\cos\varphi<0, |\vec{c}|\cos\varphi=-h$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\pm V$ или $V=|\pm(\vec{a}\vec{b}\vec{c})|$.

Условие компланарности двух векторов

Пусть три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, т. е. Лежат в одной плоскости, то $\vec{d}=[\vec{a}\times\vec{b}]\perp\vec{c}$ и следовательно, *abc=0.* Итак, для того, чтобы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю, т. е. (*abc)=0.*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Пример 4. Показать, что векторы $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$, $\vec{c}=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$ - компланарны.

$(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix}=0$, следовательно векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - компланарны.

ЛЕКЦИЯ 8
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. Уравнение прямой с нормальным вектором
Общее уравнение прямой

Выведем уравнение прямой линии в декартовой системе координат, т.е. найдем такое уравнение, которому будут удовлетворять координаты любой точки, лежащей на этой прямой, и не удовлетворять координатам точек вне этой прямой.

Рассмотрим на плоскости *xoy* произвольную прямую *l* и перпендикулярно к ней вектор $N = A\vec{i} + B\vec{j}$.

Возьмем точку $M_1(x_1, y_1)$ на *l, M(x,y)* – любая точка на прямой *l.* По условию вектор *N* перпендикулярен $\overrightarrow{M_1M}$, а $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)(y - y_1)$, значит, их искомое произведение равно нулю.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (1)$$

Полученному уравнению удовлетворяют координаты любой точки *M(x,y)*, лежащей на этой прямой. Пусть $M_2(x_2, y_2) \notin l$, тогда M_1M_2 не перпендикулярна *N*, а значит $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{N} \neq 0$, т.е. ее координаты не удовлетворяют уравнению (1). Значит, полученное уравнение и есть уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору *N*, где *N* называется нормальным вектором прямой.

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1{,}3) \perp \vec{N}(2{,}1),\ 2(x + 1) + 1(y - 3) = 0,\ 2x + y - 1 = 0.$

Вернемся к уравнению (1): $Ax - Ax_1 + By - By_1 = 0.$

$Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0,\ (-Ax_1 - By_1)$ обозначим С, тогда

$$Ax + By + C = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) называется общим уравнением прямой. Исследуем общее уравнение прямой:

а) если С=0, то прямая проходит через начало координат (*x=0, y=0*), $Ax + By = 0$;

б) $A = 0,\ By + C = 0,\ y = -C / B$ - прямая параллельна *ox;*

с) $B = 0,\ Ax + C = 0,\ x = -C / A$ - прямая паралельна *oy*.

2. Точка пересечения прямых. Построение прямой

Пусть даны две прямые $Ax + By + C = 0,\ A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и требуется найти их точки пересечения.

Так как точка принадлежит каждой из этих двух прямых, то ее координаты должны удовлетворять как уравнению первой прямой, так и уравнению второй прямой. Следовательно, для того, чтобы найти точку пересечения двух прямых, надо решить систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0. \end{cases}$$

Как построить прямую? Пусть $A \neq 0,\ B \neq 0$, для построения прямой надо найти координаты двух любых точек, удовлетворяющих уравнению прямой, проще – найти точки пересечения с осями координат: $Ox - y = 0,\ x = -C / A,$, $Oy - x = 0,\ y = -C / B.$

3. Направляющий вектор прямой. Каноническое уравнение прямой, уравнение прямой, проходящей через две точки

Рассмотрим на плоскости ХОУ прямую *l*.

Ее положение вполне можно определить заданием какой-либо точки $M_1(x_1, y_1)$ и вектора $\vec{p} = m\vec{i} + n\vec{j}$ параллельного *l* или лежащего на ней. Пусть *M(x,y)* – произвольная точка, лежащая на *l*. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{p}$, так как $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)(y - y_1)$ параллелен $\vec{p}$, то

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}. \qquad (3)$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

Замечание. Если *l* параллельна Oy, то уравнение примет вид $x = x_1$, а вектор $\vec{p}(0, n)$, формально каноническое уравнение *l* будет такое: $\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{n}$. Аналогично для *l*, параллельной Ox: $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{0} (y = y_1)$.

Пусть $M_2(x_2, y_2) \in l$. Рассмотрим $\overrightarrow{M_1M_2}$. Так как $\overrightarrow{M_1M_2} \in l$, то мы его можем принять за направляющий вектор $\vec{p}$, тогда каноническое уравнение прямой, проходящей через *M₁* и параллельной $\vec{p}$, примет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (4)$$

Это уравнение называется уравнением прямой, проходящей через две точки.

Пример 2. А(1,2), В(-2,3). Написать уравнение прямой АВ.

$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 2}{1}$ или $x - 1 = -3y + 6,\ x + 3y - 7 = 0.$

4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пучок прямых

Пусть на плоскости хоу дана прямая *l*, пересекающая ось Ox в точке M.

Углом α Ох и l будем называть наименьший угол, на который нужно повернуть Ох против часовой стрелки до совпадения с l. Если l параллельна Ох, то $\alpha = 0$. Пусть $M_1(x_1, y_1) \in l$. Тогда прямая l проходит через две точки M_1 и M_2 и ее уравнение:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \to y - y_1 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \text{ но } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\alpha, \text{ тогда } y - y_1 = tg\alpha(x - x_1).$$

Обозначим $tg\alpha = k$, тогда $y - y_1 = k(x - x_1)$ - это уравнение пучка прямых, а k называется угловым коэффициентом прямой.

Пример 3. М(2, -1), $\alpha = \pi/3.$ Множество всех прямых, проходящих через точку М плоскости, называется пучком прямых, а М – центром пучка.

Пусть прямая l составляет с осью Ох угол α, пересекает Оу в точке В(0, b).

Тогда $y = k(x - 0)b,\ y = kx + b$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом, а b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Оу.

Исследуем уравнение $y = kx + b$:

а) если $b = 0,\ y = kx$ - прямая проходит через начало координат;

б) если $k = 0,\ y = b$ - прямая параллельна оси Ох;

в) если $x = 0, b = 0,\ y = 0$ - ось Ох.

Решим $Ax + By + C = 0$ относительно у, $Ax + C = -By,\ y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$,

$k = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}.$

Пример 4. *2у-2х+3=0*, найти *a, b*.

$tg\alpha = k = -2/(-2) = 1,\ \alpha = \pi/4,\ b = -3/(-2) = 1{,}5.$

5. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности

$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1,\ l_1 : y = k_1x + b_1,\ l_2 : y = k_2x + b_2.$

Пусть l_1 не перпендикулярна l_2 иначе $tg\varphi$ не существует.

Найдем

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}. \qquad (*)$$

Угол φ отсчитывается в направлении от l_1 к l_2.

1. l_1 параллельна l_2, то $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$ и $k_1 = k_2$, значит необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.

2. Если l_1 перпендикулярна l_2, то (*) теряет смысл, но можем рассматривать $ctg\varphi \dfrac{1+tg\alpha_2 tg\alpha_1}{tg\alpha_2 - tg\alpha_1} = \dfrac{1+k_2k_1}{k_2-k_1} = 0,\ k_1 \times k_2 = -1$ - условие перпендикулярности прямых.

ЛЕКЦИЯ 9
УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ
РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

1. Уравнение прямой в отрезках

Пусть дана прямая l на плоскости. Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0,\ A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0.$

$$Ax + By = -C\ /:(-C),\ -\frac{Ax}{C} - \frac{By}{C} = 1,\ \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$

Обозначим $-C/A = a,\ -C/B = b$, получим уравнение прямой l:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (1)$$

где a и b - отрезки, отсекаемые прямой на осях Ох и Оу.

Соответственно, чтобы убедиться в этом, найдем точки пересечения прямой с осями координат:

с осью Ох - $y = 0,\ \dfrac{x}{a} = 1 \Rightarrow x = a;$

с осью Оу - $x = 0,\ \dfrac{y}{b} = 1 \Rightarrow y = b.$

Действительно, a - величина отрезка, отсекаемого прямой по оси Ох, b - по оси Оу.

Уравнение вида (1) принято называть уравнением прямой «в отрезках». Эту форму уравнения, в частности, удобно использовать для построения прямой на плоскости.

Пример 1. Дана прямая 3x-5y+15=0. Составить уравнение этой прямой в отрезках и построить прямую.

3x-5y=-15. Разделим обе части этого уравнения на –15: $\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1.$

Теперь исследуем уравнения двух прямых:

$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0,$

$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0.$

Составим систему из двух уравнений с двумя неизвестными и исследуем ее. Каждое решение этой системы определяет точку пересечения двух этих прямых.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0. \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Составим определитель этой системы: $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$. В каком случае он будет отличен от нуля? По свойству определителей, если строки перпендикулярны, то $\Delta = 0$, значит $\Delta \neq 0$, если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Если $\Delta \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение, т.е. прямые пересекаются в одной точке, а следовательно, эти прямые различны и не параллельны друг другу. Координаты точек пересечения можно найти по правилу Крамера:

$$x = \left| \frac{\begin{matrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{matrix}}{\begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}} \right|, \quad y = \left| \frac{\begin{matrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{matrix}}{\begin{matrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{matrix}} \right|.$$

Предположим, что $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, здесь, в свою очередь, могут быть два случая:

а) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$; б) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

Случай а) Пусть $g = \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, тогда $A_1 = gA_2,\ B_1 = gB_2, C_1 = gC_2$ и тогда в системе (2) мы получим два равносильных уравнения:

$$\begin{cases} gA_2x + gB_2y + gC_2 = 0. \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, оба уравнения в системе (2) определяют одну и ту же прямую.

Случай б) $A_1 = gA_2,\ B_1 = gB_2, C_1 \neq gC_2$. Из второго уравнения вычтем первое.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0. \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \Big|_{\times g.}$$

$x(A_2g - A_1) + y(B_2g - B_1) + C_2g - C_1 = 0, C_2g - C_1 = 0 \Rightarrow C_2g = C_1$ - противоречие с условием, значит, эта система не имеет решения, следовательно, уравнения (2) определяют прямые, не имеющие ни одной общей точки, т.е. параллельных.

Условие параллельности прямых: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2, (\vec{N}_1, \vec{N}_2) = 0, A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Примеры

1. Прямые 3x+4y-1=0, 2x+3y-1=0 пересекаются, так как $3/2 \neq 4/3$, координаты точек пересечения x=-1, y=1.

2. Прямые 2x+3y=1=0, 4x+6y+3=0 – параллельны, так как $2/4 = 3/6 \neq 1/3;$

3. Прямые x+y+1=0, 2x+2y+2=0 совпадают друг с другом, так как 1/2=1/2=1/2.

4. Прямые x-y+3=0, 2x+2y-5=0 перпендикулярны, так как $2\cdot 1+(-1)\cdot 2=0$.

2. Расстояние от точки до прямой

Рассмотрим на плоскости xoy прямую l: $Ax+By+C=0$, где $\vec{N}(A,B)$, $B=A\cdot tg\alpha$, $PQ=OQ-OP$, $OQ=пр_{\vec{N}}\overrightarrow{OM_1}=|OM_1|\cos\varphi=$

$$|OM_1|\cdot\frac{(\vec{N},\overrightarrow{OM_1})}{|\vec{N}||\overrightarrow{OM_1}|}=\frac{Ax_1+By_1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$$d=|PQ|-\left|\frac{Ax_1+By_1}{\sqrt{A^2+B^2}}-OP\right|=\left|\frac{Ax_1+By_1}{\sqrt{A^2+B^2}}-\sqrt{A^2+B^2}\right|.$$

Так как $P\in l$, то $AA+BB+C=0,\ A^2+B^2+C=0,$

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1-(A^2+B^2)}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\frac{|Ax_1+By_1+C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (*)$$

При C=0.

$OQ=\dfrac{(\vec{N},\overrightarrow{OM_1})}{|\vec{N}|}=\dfrac{|Ax_1+By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, т.е. эта формула верна и для уравнения, где C=0.

Пример 2. Найти расстояние от точки (1, 1) до прямой $2x+\sqrt{5}y-\sqrt{5}=0.$

$$d=\frac{|2\cdot 1+\sqrt{5}\cdot 1-\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}}=\frac{2}{3}.$$

ЛЕКЦИЯ 10
ПЛОСКОСТЬ

1. Нормальный вектор плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку

Рассмотрим в пространстве плоскость Q. Ее положение в пространстве определяется заданием вектора $\vec{N}$, перпендикулярного этой плоскости и конечной фиксированной точкой $M_1(x_1,y_1,z_1)$, лежащей в плоскости Q. Вектор $\vec{N}\perp Q$ называется нормальным вектором плоскости.

Пусть $\vec{N}(A,B,C),\ т.е.\ \vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$. Выведем уравнение плоскости $Q \perp \vec{N}$ и проходящей через точку M_1.

Возьмем точку M с текущими координатами x, y, z. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M}$. Так как $\overrightarrow{M_1M} \in Q$, а $Q \perp \vec{N}$, то $\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{N}$, а значит $(\overrightarrow{M_1M}, \vec{N}) = 0.$

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1),$

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$ (*)

Координаты любой точки $M \in Q$ удовлетворяют этому уравнению, следовательно, (*) – уравнение плоскости, проходящей через данную точку. Итак, мы показали, что всякой плоскости соответствует уравнение первой степени относительно текущих координат.

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1(1, -2, 3) и перпендикулярной $\vec{N} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$, A=2, B=0, C=4.

2(x-1)+0(y+2)+4(z-3)=0, 2x-2+4z-12=0, x+2z-7=0.

Придавая коэффициентам A, B, C уравнения (*) различные значения, мы можем получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется связкой плоскостей. Уравнение (*), где A, B, C могут принимать любые значения, - уравнением связки плоскостей.

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1,-1,0),\ M_2(2,1,-3),\ M_3(-1,0,1).$ Рассмотрим два вектора: $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3} \in L$. Надо найти $\vec{N} \perp L$, т.к. и $\overrightarrow{M_1M_3} \in L$, то $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{N},\ \overrightarrow{M_1M_3} \perp \vec{N},$ а значит $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}.$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} - \vec{j} + 3\vec{i} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}.$$

$$L: 5(x-1) + 5(y+1) + 5(z-0) = 0,$$

$$5x + 5y + 5Z = 0,$$

$$x + y + z = 0.$$

2. Общее уравнение плоскости

Рассмотрим общее уравнение первой степени с тремя неизвестными:

$Ax + By + Cz + D = 0.$ (**)

По крайней мере один из A, B, C не равен нулю, и предположим, что $C \neq 0.$

Уравнение (**) представим в таком виде:

$A(x-0) + B(y-0) + C(z - D/C) = 0$ - уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{N}(A,B,C)$ и проходящей через точку $M(0,0,D/C).$ Итак, мы показали, что уравнение (**) есть уравнение некоторой плоскости и оно называется общим уравнением.

Если $D=0$, то плоскости $Ax+By+Cz=0$ удовлетворяют координаты точки O(0, 0, 0), следовательно, эта плоскость проходит через начало координат.

x=0 – уравнение координатной плоскости Oyz;

y=0 – уравнение координатной плоскости Oxz;

z=0 – уравнение координатной плоскости Oxy.

3. Построение плоскости

Для построения плоскости по ее уравнению достаточно найти координаты трех точек, не лежащих на одной прямой, удовлетворяющих уравнению плоскости. Проще всего определять точки пересечения с осями координат.

Пример 3. Построить плоскость $2x+3y+6z-6=0$.

$OX: z=0,\ y=0,\ 2x=6,\ x=3;$

$OY: z=0,\ x=0,\ 3y=6,\ y=2;$

$OZ: x=0,\ y=0,\ 6z=6,\ z=1.$

Следовательно, плоскость проходит через точки: $M_1(3{,}0{,}0)$, $M_2(0{,}0{,}1)$, $M_3(0{,}2{,}0)$.

Пример 4. Построить плоскость $2x+5y-10=0$.

Так как нормальный вектор $\vec{N}=2\vec{i}+5\vec{j}$ перпендикулярен оси Oz, то данная плоскость параллельна этой оси. Для построения плоскости достаточно найти точку пересечения с осями OX и OY.

$OY: x=0;\ 5y-10=0,\ y=2,\ т.M_1(0{,}2);$

$OX: y=0;\ 2x-10=0,\ x=5,\ т.M_2(5{,}0).$

4. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Рассмотрим две плоскости Q_1 и Q_2, заданные соответственно уравнениями:

$Q_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$

$Q_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

Под углом между двумя плоскостями мы понимаем один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Угол φ между векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из указанных двугранных углов. Поэтому $cos\,\varphi = \dfrac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}$, но $\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$, $\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$, то $cos\,\varphi \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Пример 5. Найти угол между плоскостями x+2y-3z+4=0 и 2x+3y+z+8=0.

Решение. Так как $\vec{N}_1$(1, 2, -3), $\vec{N}_2$(2, 3, 1), то

$$cos\,\varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{4+9+1}} = \frac{5}{14},\ \varphi = arccos\,\frac{5}{14}.$$

Две плоскости Q_1 и Q_2:

1. Параллельны друг другу тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ коллинеарны, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

2. Перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ перпендикулярны, т.е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Пример 6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 (-2, 1, 4) параллельно плоскости $3x + 2y - 7z + 8 = 0$.

Решение. Запишем уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M_1(-2, 1, 4), $A(x+2) + B(y-1) + C(z-4) = 0$. Так как искомая и данная плоскости параллельны, то за нормальный вектор $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ искомой плоскости можно принять нормальный вектор $\vec{N} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$ данной плоскости. Следовательно, A=3, B=2, C=-7, тогда $3(x-2) + 2(y-1) - 7(z-4) = 0,\ 3x + 6 + 2y - 2 - 7z + 28 = 0,\ 3x + 2y + 32 - 7z = 0$ - уравнение искомой плоскости.

5. Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и плоскость Q: $Ax + By + Cz + D = 0$, расстояние d между ними, т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на плоскость Q, определяется по следующей формуле:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример 7. Найти расстояние от точки M(1, 0, -2) до плоскости $2x - 2y + 2z - 4 = 0$.

Решение. $d = \dfrac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2(-2) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{6}{3} = 2.$

ЛЕКЦИЯ 11
ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Общие уравнения прямой

Рассмотрим две непараллельные плоскости, заданные уравнениями: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$ Система этих двух уравнений будет определять прямую, как линию пересечения двух плоскостей, т.к. множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы (1). Уравнения (1) называют общими уравнениями прямой.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пример 1. Построить прямую, заданную общими уравнениями:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 3y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Для того, чтобы построить прямую, достаточно знать две ее точки. Проще всего выбрать точки пересечения прямой с координатными плоскостями. Точка пересечения прямой с координатной плоскостью называется следом прямой. Координаты следа M_1 на плоскости Oxy получим из уравнения прямой, полагая $z = 0:\ \begin{cases} x + y = 3, \\ x - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

Итак, точка M_1(1, 2, 0). Найдем след M_2 на плоскости Oyz.

$$x = 0:\ \begin{cases} y + z = 3, \\ -3 - z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1, \\ z = 2. \end{cases}$$

M_2(0, 1, 2).

2. Каноническое уравнение прямой. Параметрические уравнения

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - точка, лежащая на прямой L, и $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ - направляющий вектор прямой. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий точку M_1 с переменной точкой $M_2(x, y, z)$ прямой L, коллинеарен вектору $\vec{s}$. Поэтому проекции векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{s}$ пропорциональны. Так как

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}, \quad \text{то} \quad \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \tag{2}$$

Уравнения (2) называются каноническими уравнениями прямой.

Приравняем каждое из соотношений в уравнениях (2) к параметру t, тогда $\frac{x - x_1}{m} = t,\ \frac{y - y_1}{n} = t,\ \frac{z - z_1}{p} = t,\ x - x_1 = mt,\ y - y_1 = nt,\ z - z_1 = pt,$ следовательно, уравнения (3) называются параметрическими уравнениями прямой.

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + mt, \\ y &= y_1 + nt, \\ z &= z_1 + pt. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Замечание. Пусть прямая перпендикулярна одной из координатных осей, например оси Ox, тогда m=0 и параметрические уравнения (3) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1, \\ y &= y_1 + nt, \\ z &= z_1 + pt. \end{aligned}\right\}$$

Исключая из уравнений параметр t, получим уравнения прямой в виде:

$$\left.\begin{aligned} & x - x_1 = 0, \\ & \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \end{aligned}\right\}$$

Однако и в этом случае условимся формально записывать уравнение прямой в каноническом виде: $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$.

Рассмотрим вопрос о том, как перейти от общих уравнений прямой к ее каноническим уравнениям. Для этого нужно найти какую-либо точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на прямой и направляющий вектор $\vec{s}$ прямой.

Пусть прямая задана общими уравнениями (1). Координаты точки M_1 на прямой L получим из системы (1), придав одной из координат произвольное значение. Так как прямая перпендикулярна нормальным векторам $\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ и $\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$, то за направляющий вектор $\vec{s}$ прямой L можно принять векторное произведение $[\vec{N}_1 \times \vec{N}_2]$:

$$\vec{s} = [\vec{N}_1 \times \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Привести общие уравнения прямой к каноническому виду:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + 8 = 0, \\ x - 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

$\vec{N}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$; $\vec{N}_2 = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k},\ \vec{s} = (3, -5, -9).$$

Точку M_1 на прямой найдем, положив в уравнениях прямой, например, z=0.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8 = 0, \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = -2/3. \end{cases}$$

Итак, M_1(-3, -2/3, 0). Следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид: $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y + 2/3}{-5} = \dfrac{z-0}{-9}$.

3. Уравнения прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Составим канонические уравнения этой прямой. За направляющий вектор $\vec{s}$ прямой примем вектор, соединяющий точки M_1 и M_2:

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Следовательно, $m = x_2 - x_1$ $n = y_2 - y_1, p = z_2 - z_1$ и поэтому из уравнений (2) имеем:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4)$$

Уравнение (4) называется уравнением прямой, проходящей через две точки.

4. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть в пространстве даны две прямые:

L_1: $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$;

L_2: $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$.

За угол между двумя прямыми принимаем один из смежных углов, которые образуют прямые, проведенные параллельно данным через какую-либо точку пространства. Угол между прямыми есть угол φ между направляющими векторами $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ данных прямых. Так как $\vec{s}_1 = m_1\vec{i} + n_1\vec{j} + p_1)\vec{k}$, то $\vec{s}_2 = m_2\vec{i} + n_2\vec{j} + p_2)\vec{k}$, то $\cos\varphi = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$ или

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Прямые L_1 и L_2 параллельны тогда, когда $\vec{s}_1$ параллелен $\vec{s}_2$, т.е. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Прямая L_1 перпендикулярна L_2 тогда, когда $\vec{s}_1$ перпендикулярен $\vec{s}_2$, т.е. $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$

Пример 2. Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-2}$ и $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{5}$.

$\vec{s}_1(5, 3, -2)$; $\vec{s}_2(3, 2, 5)$.

$$\cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 5}{\sqrt{25+9+4}\cdot\sqrt{9+4+25}} = \frac{11}{38},\ \varphi = \arccos\frac{11}{38}.$$

Пример 3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1, 2, 3)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x + 3y + 5z - 7 = 0. \\ 3x - 4y + 2z - 8 = 0. \end{cases}$

Найдем канонические уравнения прямой $\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$, $\vec{N}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{N}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, тогда

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 15\vec{j} - 8\vec{k} - 9\vec{k} - 2\vec{j} + 20\vec{i} = 23\vec{i} + 13\vec{j} - 17\vec{k},$$

т.к. искомая прямая параллельна данной, то за направляющий вектор прямой примем вектор $\vec{s}$, тогда $\frac{x-1}{23} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-17}$ - каноническое уравнение искомой прямой.

ЛЕКЦИЯ 12
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Рассмотрим в пространстве прямую и плоскость:

L: $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$; Q: $Ax + By + Cz + D = 0.$

1. $L \perp Q \Rightarrow \vec{N} \,||\, \vec{s} \Rightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$
2. $L \,||\, Q \Rightarrow \vec{N} \perp \vec{s} \Rightarrow Am + Bn + Cp = 0.$

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1(2, -3, 4) параллельно прямым L_1: $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{8}$ и L_2: $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+5}{2}.$

Решение. Запишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, Q: $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$ Так как Q параллельна L_1, Q параллельна L_2, то по условию параллельности прямой и плоскости следует, что вектор $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ должен быть перпендикулярен $\vec{a}_1=\vec{i}+2\vec{j}+8\vec{k}$ и $\vec{a}_2=4\vec{i}+2\vec{k}$, т. е. $\vec{N}=[\vec{a}_1\times\vec{a}_2].$

$$\vec{N}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4\vec{i}+30\vec{j}-8\vec{k}.$$

Q: $$\begin{gathered} 4(x-2)+30(y+3)-8(z-4)=4x+30y-8z+114=0, \\ 2x+15y-4z+57=0. \end{gathered}$$

2. Точка пересечения прямой с плоскостью. Угол между прямой и плоскостью

L: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1};$ (1)

Q: $Ax+By+Cz+D=0.$ (2)

Требуется найти точку пересечения прямой L с плоскостью Q. Для этого нужно решить систему из двух уравнений (1) и (2). Проще это сделать, если перейти от канонического уравнения прямой к параметрическому:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1+mt, \\ y&=y_1+nt, \\ z&=z_1+pt. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где каждому значению параметра t соответствует точка прямой L. Нам надо найти такое значение t, при котором точка прямой L будет лежать на плоскости Q (это и есть точка пересечения L с Q). Для этого подставим в уравнение плоскости вместо x, y, z правую часть из соотношения (3), получим уравнение: $A(x_1+mt)+B(y_1+nt)+C(z_1+pt)+D=0.$

$Ax_1+Amt+By_1+Bnt+Cz_1+Cpt+D=0$ - линейное уравнение относительно неизвестного t.

$$-(Ax_1+By_1+Cz_1+D)=t(Am+Bn+Cp).$$

Предположим, что L непараллельна Q, следовательно, $\vec{s}$ неперпендикулярен $\vec{N}$, а значит $Am+Bn+Cp\neq 0$.

$$t=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Пример 2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}$ с плоскостью $2x+3y-2z+2=0.$

Запишем уравнение данной прямой в параметрической форме:

[illegible]

подставим x, y, z в уравнение плоскости: $2(2t+1)+3(3t-1)-2(2t+5)+2=0,$
$4t+2+9t-3-4t-10+2=0,\ t=1.$

Подставляя вместо t единицу в параметрическое уравнение прямой, получим координаты точки пересечения прямой с плоскостью: x=3, y=2, z=7.

3. Пучок плоскостей

Определение. Совокупность всех плоскостей, проходящих через заданную прямую L, называется пучком плоскостей, а прямая L – осью пучка.

Пусть ось пучка задана уравнением:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 = 0 / \lambda. \end{cases} \tag{4}$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 + \lambda(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет первую степень относительно x, y, z и, следовательно, определяет некоторую плоскость в пространстве. Так как уравнение (5) есть следствие системы (4), то координаты точки, удовлетворяющие уравнению (4), будут удовлетворять и уравнению (5). Следовательно, (5) – уравнение плоскости, проходящей через прямую L; так как λ - некоторая постоянная, то меняя ее, мы будем получать каждый раз другую плоскость, проходящую через L, следовательно, (5) – уравнение пучка плоскостей.

Пример 3. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$(L)\ \begin{cases} 2x + 3y - 5z + 1 = 0, \\ 3x - y + z + 28 = 0 \end{cases}$$

и точку M_1(1, -2, 3).

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через L: $2x + 3y - 5z + 1 + \lambda(3x - y + z + 28) = 0.$ Подставим в это уравнение координаты точки M_1: $2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 + 1\lambda(3 \cdot 1 + 2 + 3 + 28) = 0, 36\lambda = 18, \lambda = 1/2$. Подставляя вместо λ ½ в уравнение пучка плоскостей, получим искомую плоскость: $2x + 3y - 5z + 1 + 1/2(3x - y + z + 28) = 0, 7x + 5y - 9z + 30 = 0.$

Пример 4. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1}$ перпендикулярно плоскости $3x + 3y - z + 1 = 0.$

Решение. Запишем уравнение прямой в общем виде как уравнение пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3}, \\ \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x - 3 - 2y - 2 = 0, \\ y + 1 - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0, \\ y - 3z + 1 = 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую:

$$\begin{aligned} &3x - 2y - 5 + \lambda(y - 3z + 1) = 0, \\ &3x - 2y + \lambda y - 3\lambda z - 5 + \lambda = 0, \\ &3x + y(\lambda - 2) - 3\lambda z + \lambda - 5 = 0. \end{aligned} \tag{*}$$

Так как плоскость (*) и данная плоскость перпендикулярны, то

$\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow (\vec{N}_1, \vec{N}_2) = 0;\ \vec{N}_1 = (3, \lambda - 2, -3\lambda);$

$9 + 3\lambda - 6 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1/2;\ \vec{N}_2 = (3,3,-1),$

подставляя в (*) $\lambda = -1/2$, получаем $6x - 5y + 3z - 11 = 0.$

ЛЕКЦИЯ 13
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ОКРУЖНОСТЬ И ЭЛЛИПС

1. Определение кривой второго порядка

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат. В общем случае это уравнение имеет следующий вид:

$$Ax^2 + 2Byx + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где A, 2B, C, 2D, 2E, F – действительные числа, и по крайней мере один из A, B, C отличен от нуля.

Мы будем рассматривать четыре кривые второго порядка: окружность, эллипс, гиперболу и параболу.

2. Окружность

Определение. Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Выведем уравнение окружности.

Пусть на плоскости дана точка $O_1(a, b)$.

$$M_1O_1 = |\overrightarrow{M_1O_1}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 - \qquad (1)$$

уравнение окружности с центром в точке O_1 и радиусом R. В частности, если O_1 – начало координат, то уравнение окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

Вернемся к (1). Раскроем скобки в этом уравнении:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - R^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

Сравним это уравнение с общим уравнением кривой второго порядка. Коэффициенты A и C равны 1, 2B=0,

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$x^2 + 2Dx + D^2 - D^2 + y^2 + 2Ey + E^2 - E^2 + F = 0,$$

$$(x+D)^2 + (y+E)^2 = E^2 + D^2 - F. \qquad (2)$$

1. Если $E^2 + D^2 - F > 0$, то (2) – уравнение окружности с центром в точке O_1(-D, -E) и радиусом $R = \sqrt{E^2 + D^2 - F}$.

2. Если $E^2 + D^2 - F < 0$, то уравнение (2) не определяет никакую линию, так как правая часть этого уравнения отрицательна, а левая – положительна – противоречие.

Пример 1. Найти центр и радиус окружности, заданной уравнением: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0.$

Решение. $(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 11 = 0, (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16.$

Центр в точке $O_1(1, -2)$ и R=4.

3. Эллипс

Определение. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, равная *2a* ($(2a > 2c)$.

Построим декартову систему координат так, чтобы фокусы оказались на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат: F_1(-C, 0), F_2(C, 0).

Выведем уравнение эллипса. Для этого рассмотрим произвольную точку *M(x, y)* эллипса. По определению эллипса $MF_1+MF_2=2a$.

$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, следовательно,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a, \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$x^2 + c^2 + 2xc + y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2 - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \ :4,$$

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Опять возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$(xc - a^2)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2],$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = ax^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + y^2a^2,$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - 2xca^2 + 2a^2xc - y^2a^2 = a^2c^2 - a^4,$$

$$x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2(c^2 - a^2) / \cdot(-1),$$

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Так как $(2a > 2c)$, то $a^2 - c^2 > 0$ и обозначим $a^2 - c^2 = b^2$, тогда получим $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Разделим обе части этого уравнения на a^2b^2.

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 -$ каноническое уравнение эллипса.

Построим этот эллипс. Так как уравнение содержит только четные степени x и y, то эта кривая второго порядка будет симметрична относительно оси OX и OY, т.е. эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, а точка пересечения этих осей является центром эллипса. Та ось, на которой расположены фокусы, называется фокальной осью. Найдем точки пересечения с осями координат:

$Ox: y=0,\ \frac{x}{a^2}=1,\ x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a,$

$Oy:\ x=0,\ \frac{y}{b^2}=1,\ y^2=b^2 \Rightarrow y=\pm b,\ a>c.$

Точки пересечения с осями координат называют вершинами эллипса. Отрезки, соединяющие вершины эллипса A_1A_2, B_1B_2, а также их длины 2a и 2b, называются большой и малой осями эллипса, числа a и b – полуосями эллипса.

Отношение c/a, половины расстояния между фокусами к большой полуоси, называется эксцентриситетом эллипса и обозначается $\varepsilon,\ \varepsilon=c/a,$ так как $c<a,$ то $\varepsilon<1$.

Эксцентриситет характеризует форму эллипса: чем меньше ε, тем меньше b отличается от a, т.е. меньше вытянут эллипс вдоль фокальной оси. Если a=b, то получится окружность получится радиуса a:

$x^2+y^2=a^2$, при этом $C=0=\sqrt{a^2-a^2},\ \varepsilon=c/a=0.$

Пример 2. Найти каноническое уравнение эллипса, зная его большую полуось a=5, $\varepsilon=0{,}6.$

Решение. $\varepsilon=c/a=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=0{,}6,\ \sqrt{25-b^2}=0{,}6\cdot 5 \Rightarrow \sqrt{25-b^2}=3,$

$25-b^2=9 \Rightarrow 25-9=16,\ b=4.$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ - уравнение эллипса.

Пример 3. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M_1(2,-3)$ и a=4.

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - каноническое уравнение эллипса.

$\frac{4}{16}+\frac{9}{b^2}=1,\ \frac{9}{b^2}=1-\frac{1}{4},\ \frac{9}{b^2}=\frac{3}{4},\ 3b^2=36,\ b^2=12,\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$

ЛЕКЦИЯ 14
ГИПЕРБОЛА

1. Определение гиперболы

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух данных точек плоскости называемых фокусами есть постоянная величина, равная 2a ($2a>0$, меньше расстояния между фокусами).

Обозначим расстояние между фокусами F_1 и F_2 через 2a. Как и в случае эллипса, ось абсцисс проведем через фокусы, а за начало координат примем середину отрезка F_1F_2.

Выведем уравнение гиперболы. Возьмем точку M(x, y). По определению гиперболы имеем: $|MF_1 - MF_2| = 2a.$ Раскроем модуль $MF_1 - MF_2 = \pm 2a,$ $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\ MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = t2a,$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ :4,$$

$$(xc - a^2)^2 = \left(\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$(cx - a^2)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2],$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x-c)^2 + y^2a^2,$$

$$x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2c^2 - a^4,\ т.к.\ 2a < 2c \Rightarrow a < 0,\ то\ c^2 - a^2 > 0,$$

Обозначим $c^2 - a^2 = b^2;\ x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2\ /:a^2b^2.$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

Установим формулу гиперболы, пользуясь ее каноническим уравнением. Это уравнение содержит только четные степени текущих координат, следовательно, гипербола имеет две оси симметрии, в данном случае совпадающие с координатными осями. Точку пересечения осей будем называть центром гиперболы. Ось гиперболы, на которой расположены фокусы, будем называть фокальной осью. Исследуем формулу гиперболы в первой четверти, где y>0:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} \cdot b^2,$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2),\ y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},\ т.к.\ x^2 - a^2 \ge 0,$$

если $x \to a,$ то $y \to 0,\ x \to +\infty,\ y \to +\infty$, так как гипербола симметрична относительно осей координат, то достраиваем точки A_1 и A_2 симметрично вершине гиперболы.

Действительной осью называется отрезок $A_1A_2 = 2a$, отрезок $B_1B_2 = 2b$ - мнимой осью, a – действительная ось, b – мнимая полуось.

Вернемся к части гиперболы, расположенной в первой четверти и являющейся графиком функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$ Покажем, что точки этого графика, расположенные на достаточно большом расстоянии от начала координат, сколь угодно близки к прямой $y=\frac{b}{a}x$, проходящей через точку O (0, 0) и $k=\frac{b}{a}$.

Рассмотрим точку M(x, y) и N (x, У). Найдем разность координат этих двух точек (У-у).

$$Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{b}{a}\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})((x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2-x^2+a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

В числителе этой дроби величина ab – постоянная, а знаменатель при неограниченном возрастании x неограниченно возрастает, поэтому сама дробь будет стремиться к нулю, а значит $Y-y\to 0$, т.е. точки M и N сближаются при неограниченном возрастании абсцисс.

Из симметрии гиперболы относительно осей координат следует, что имеется еще одна прямая $y=-\frac{b}{a}x$, к которой сколь угодно близки точки гиперболы при неограниченном удалении от начала координат. Прямые $y=\frac{a}{b}x$ и $y=-\frac{a}{b}x$ называются асимптотами гиперболы.

Построим гиперболу, учитывая ее свойства:

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ - эксцентриситет гиперболы, $c^2-a^2=b^2$, т.к. $c>a$, то $\varepsilon>1$, $c=\pm\sqrt{b^2+a^2}$.

Эксцентриситет определяет форму гиперболы. Чем меньше ε, тем более вытянут прямоугольник вдоль фокальной оси.

Гипербола называется равносторонней, если ее действительная полуось равна мнимой: a=b.

Каноническое уравнение равносторонней гиперболы:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\cdot/a^2\Rightarrow x^2-y^2=a^2,$ ее асимптоты: y=x, y=-x, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=2.$

Пример 1. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что 2c=26, $\varepsilon=13/12.$

Решение. c=13, a=12$\Rightarrow 13=\sqrt{b^2+a^2}\Rightarrow 169=b^2+144\Rightarrow b^2=25,\ \frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1.$

Пример 2. Гипербола проходит через точки $M_1(-3,\sqrt{2}/2)$ и $M_2(4,-2)$. Найти каноническое уравнение гиперболы.

$\frac{9}{a^2}-\frac{1}{2b^2}=1,\ \frac{16}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\Rightarrow a^2=8,\ b^2=4,\quad \frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$ - каноническое уравнение гиперболы.

ЛЕКЦИЯ 15
ПАРАБОЛА

1. Определение. Вывод канонического уравнения параболы

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от точки F, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Выведем уравнение параболы. Расположим ось абсцисс так, чтобы она проходила через фокус, перпендикулярно директрисе, и имела положительное направление от директрисы к фокусу. Обозначим расстояние от директрисы до фокуса через P. Эта величина называется параметром параболы. За начало координат выберем середину перпендикуляра FR, опущенного из фокуса на директрису. В выбранной таким образом системе фокус имеет координаты F(P/2; 0), уравнение директрисы: x=-P/2.

Пусть M(x, y) – точка параболы. По определению параболы:
MN=MF, MN=d, MF=r, MN=MQ+QN=x+P/2, r=x+P/2,

$$MF=\sqrt{(x-P/2)^2+y^2},\ \left(\sqrt{(x-P/2)^2+y^2}\right)^2=(x+P/2)^2 \Rightarrow x^2-px+y^2+p^2/4=$$
$$=\frac{p^2}{4}+px+x^2,$$
$$y^2=2px. \qquad (*)$$

Уравнение (*) называется каноническим уравнением параболы. Это уравнение является уравнением второй степени, т.е. парабола есть линия второго порядка.

2. Исследование формы параболы

Проанализируем каноническое уравнение параболы $y^2=2px.$ Так как уравнение включает в себя y только в четной степени, то парабола симметрична относительно оси OX, и поэтому нам достаточно рассмотреть ее часть лишь в первой четверти.

Так как $y\ge 0$, то эта часть параболы определяется формулой: $y^2=\sqrt{2px}$. Найдем область определения этой функции: $2px\ge 0$, т.к. $p>0 \Rightarrow x\ge 0.$ При x=0, y=0.

Пусть x возрастает и стремится к $+\infty$, из уравнения видно, что y также будет возрастать и стремиться к $+\infty$, т.е. переменная точка M(x, y), описывающая верхнюю часть параболы, исходит из начала координат и движется вправо и вверх.

Ось симметрии параболы называется фокальной осью. Расстояние от точки M до F называется фокальным радиусом. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется вершиной.

Уравнение $y^2 = -\sqrt{2px}$ при $p > 0$ сводится к уравнению $y^2 = 2px$ заменой x на (-x), т.е. путем преобразования координат, которое соответствует изменению направления оси OX на противоположное.

Уравнения $x^2 = 2gy,\ x^2 = -2gy$ также определяют параболы с вершиной в начале координат, но симметричные оси OY. $y + g/2 = r$ - фокальный радиус.

$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ определяет уравнение параболы с вершиной в точке $O_1(x_0, y_0)$.

Вернемся к параболе $y^2 = 2px$. Найдем уравнение касательной к параболе в точке $M_1(x_0, y_0)$. Точка M_1 принадлежит параболе, значит $y_0^2 = 2px_0$. Так как точка M_1 - точка пересечения прямой с параболой, то ее координаты должны удовлетворять системе (*).

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2p};$$

$$\frac{Ay^2}{2p} + By + C = 0;\ D = \sqrt{B^2 - 4c \cdot \frac{A}{2p}} = 0;\ B^2 = \frac{2Ac}{p} \Rightarrow PB^2 = 2AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-Bp}{A} = y_0;\ B/A = -y_0/p \Rightarrow y_0 = B,\ A = p,\ C = x_0 p \Rightarrow px - yy_0 + x_0 p = 0.$$

$yy_0 = p(x + x_0)$ - уравнение касательной к параболе, проведенной в точке $M_1(x_0, y_0)$.

Пример 1. Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси OY, с центром в начале координат, проходящей через точку B(1, -2).

$x^2 = 2gy,$ так как точка B лежит на параболе, то $1^2 = 2g(-2),\ g = -1/4,$ $x^2 = -y/2$ - уравнение параболы.

Пример 2. Через точку M(5, -7) провести касательную к параболе $y^2 = 8x.$

Решение. Так как точка M не лежит на параболе, а значит не является общей точкой прямой и параболы, то пользоваться известной формулой нельзя.

Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку:

$$k(x - x_0) = y - y_0,$$

$$y + 7 = k(x - 5).$$

Найдем точку пересечения прямой с параболой (точку касания):

$$\begin{cases} y + 7 = k(x - 5), \\ y^2 = 8x \end{cases} \Rightarrow y + 7 = k\left(\frac{y^2}{8} - 5\right),\ \frac{k}{8}y^2 - y - 5k - 7 = 0.$$

$D = \sqrt{1 + 4\frac{k}{8}(5k + 7)} = 0,$ так как существует только одна точка пересечения.

$$1+\frac{k}{2}(5k+7)=0,$$
$$5k^2+7k+2=0,$$
$$D=49-40=9,\ k_{1,2}=\frac{-7\pm 3}{10},\ k_1=1,\ k_2=-2/5,$$
значит, условию задачи удовлетворяют две прямые:

1) $\begin{matrix} y+7=-x+5, \\ y+x+2=0; \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} y+7=-2/5(x-5)/\cdot 5, \\ 5y+2x+25=0. \end{matrix}$

ЛЕКЦИЯ 16
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

1. Параллельный перенос осей координат

При решении некоторых задач приходится на плоскости рассматривать две системы координат и, зная координаты точки в одной системе, искать ее координаты в другой системе. Для этой цели служат формулы преобразования координат, соответствующие данному изменению координатной системы.

Параллельный перенос осей координат – это такое изменение декартовой системы координат, когда меняется положение начала координат, а направление осей (масштаб) остаются неизменными.

Рассмотрим две прямоугольные системы координат: пусть ХОУ – старая система, а X`O`Y` - новая система координат.

Положение новых осей относительно старых определяется заданием координат нового начала O_1 в старой системе координат – пусть $O_1(x_0, y_0)$.

Число x_0 будем называть величиной сдвига по направлению оси ОХ, а y_0 – величиной сдвига по направлению оси ОУ.

Предположим, что произвольно выбранная точка М на плоскости имеет старые координаты x и y, эта же точка по отношению к новым осям имеет координаты x` и y`. Выведем формулы, выражающие старые координаты точки М через новые. Спроектируем точку O_1 и точку М на ось ОХ, а также точку М на ось O`X`, получим соответственно точки A, P, N. Очевидно, что O`N=AP, но $O`N\,|x`|$, а $AP=|x-x_0|,\ OP=x,\ AO=x_0,\ AP=OP-OA \Rightarrow |x`|=|x-x_0|$, т.е. новая абсцисса и разность $x-x_0$ равны по модулю. Нетрудно заметить, что и знаки этих величин одинаковы. В самом деле, если N лежит правее O`, то P расположена правее A, и обе величины $x`$ и $x-x_0$ положительны. И наоборот, если N находится левее O`, то P левее A, и следовательно, $x`$ и $x-x_0$ отрицательны. В обоих случаях $x` = x - x_0 \Rightarrow x = x' + x_0$. Аналогично и для ординат: $y = y` + y_0$, т.о. мы получили следующие формулы преобразования координат при параллельном переносе осей:

$$\begin{cases} x = x` + x_0, \\ y = y` + y_0. \end{cases}$$

(1)

Пример 1. Дана точка М(2, -1) в системе ХОУ. Найти ее новые координаты при параллельном переносе осей, если новое начало в старой системе координат имеет координаты (-1, 3).

Решение. По формулам (1) имеем:

$$2 = x` - 1, \quad -1 = y` + 3,$$

$$x` = 3, \; y` = -4.$$

2. Поворот осей координат

Пусть на плоскости заданы две системы координат, имеющие общее начало О: система ХОУ(старая) и система X`OY` (новая), которая получена поворотом старой системы координат на угол α, т.е. $(OX, OX`) = \alpha$ и $(OY, OY`) = \alpha$.

Рассмотрим на плоскости произвольную точку М, имеющую в старой системе координат координаты х и у, а в новой - х` и у`. Выведем формулы, выражающие старые координаты этой точки через новые.

Из точки М опустим перпендикуляры на оси ОХ и ОХ`. Угол МОР обозначим через φ.

ΔONM и ΔOPM - прямоугольные, рассмотрим ONM:

$$ON = OM \cdot cos(\varphi + \alpha) \Rightarrow x = OM \cdot cos(\varphi + \alpha),$$

$$MN = OM \cdot sin(\varphi + \alpha) \Rightarrow y = OM \cdot sin(\varphi + \alpha),$$

$$x = OM \cdot cos\varphi \cdot cos\alpha - OM \cdot sin\varphi \cdot sin\alpha,$$

$$y = OM \cdot sin\varphi \cdot cos\alpha + OM \cdot cos\varphi \cdot sin\alpha.$$

Рассмотрим $\Delta OPM: \; OP = x`, \; MP = y`.$

$$OP = OM \cdot cos\varphi \Rightarrow x` = OM \cdot cos\varphi,$$

$$MP = OM \cdot sin\varphi \cdot \Rightarrow y` = OM \cdot sin\varphi.$$

Вернемся к полученным формулам для х и у и заменим $OM \cdot cos\varphi$ через х`, а $OM \cdot sin\varphi$ через у`, тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} x = x`cos\alpha - y`sin\alpha. \\ y = x`sin\alpha + y`cos\alpha. \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$

Это и есть формулы преобразования координат при повороте осей на угол α. Формулы, выражающие х` и у` через старые координаты х и у, можно получить из (2), решая ее как систему из двух уравнений с двумя неизвестными х` и у`. Но эти же формулы можно получить и сразу при помощи следующих рассуждений: если новая система координат получается из старой поворотом на угол α, то старая система получается поворотом на (-α) новой системы координат, поэтому в равенствах (2) можно поменять местами новые и старые координаты, заменяя одновременно α на (-α), учитывая, что $cos\alpha$ - четная функция, т.е. $cos(-\alpha)=cos\alpha$, а $sin\alpha$ - нечетная функция, т.е. $sin(-\alpha)=-sin\alpha$. Получим:

$$\left.\begin{matrix} x` = x\,cos\alpha + y\,sin\alpha, \\ y` = y\,cos\alpha - x\,sin\alpha. \end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

Пример 2. Выразить старые координаты точек x и y через ее новые x\` и y\` при повороте на $\alpha=\pi/4$.

Так как $cos\pi/4 = sin\pi/4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$x = x`\frac{\sqrt{2}}{2} - y`\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x`-y`),$$

$$y = x`\frac{\sqrt{2}}{2} + y`\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x`+y`).$$

3. Преобразование координат при изменении начала координат и повороте осей

Пусть XOY – старая система координат, а X\`O\`Y\` - новая система, полученная из старой путем параллельного переноса начала координат и последующего поворота на угол $\alpha$. Пусть O\`(x_0, y_0) в старой системе координат.

Выразим x и y через x\` и y\`, для этого введем в рассмотрение вспомогательную систему координат X\`\`O\`Y\`\`. Точка M имеет в этой системе координат координаты x\`\` и y\`\`. Вспомогательная система координат получена из старой системы параллельным переносом оси OX на x_0, а OY на y_0, следовательно, по формулам (1) имеем:

$$\left.\begin{matrix} x = x`` + x_0, \\ y = y`` + y_0. \end{matrix}\right\}$$

А так как система X\`O\`Y\` получена из X\`\`O\`Y\`\` поворотом на угол α, то по формулам (2) имеем:

$$\left.\begin{matrix} x`` = x`cos\alpha - y`sin\alpha, \\ y`` = x`sin\alpha + y`cos\alpha. \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = x`cos\alpha - y`sin\alpha + x_0, \\ y = x`sin\alpha + y`cos\alpha. + y_0. \end{matrix}\right\} \qquad (3)$$

Формулы (3) выражают старые координаты через новые.

ЛЕКЦИЯ 17
ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ КООРДИНАТ И ДЕКАРТОВОЙ

Примеры приведения к канонической форме квадратных уравнений:

Пример 1.

$$x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0. \qquad (*)$$

Избавимся сначала от члена с xy, для этого найдем угол α, на который надо повернуть оси координат:

$$ctg 2\alpha = \frac{A - C}{B},\ ctg 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = 90^0,\ a = 45^0.$$

$x = (x` - y`)\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y = (x` + y`)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ - формулы преобразования координат при повороте на 45^0; подставим их в уравнение (*).

$$\frac{1}{2}(x` - y`)^2 + 2\frac{1}{2}(x` - y`)(x` + y`) + \frac{1}{2}(x` + y`)^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}(x` - y`) + \frac{2}{2}(x` + y`) = 0,$$

$$1/2(x`^2 - 2x`y` + y`^2) + x`^2 - y`^2 + 1/2(x`^2 + 2x`y` + y`^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(3x` - 3y` + x` + y`) = 0,$$

$$1/2(x`^2 + y`^2) + x`^2 - y`^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(4x` - 2y`) = 0,$$

$$x`^2 + y`^2 + x`^2 - y`^2 + \sqrt{2}(2x` - y`) = 0,$$

$$2x`^2 + \sqrt{2}(2x` - y`) = 0,$$

$$2x`^2 + 2\sqrt{2}x` = 2\sqrt{y`},$$

$$2(x`^2 + \sqrt{2}x`) = \sqrt{2}y`,$$

$$x`^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}x` + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{2}y`,$$

$$y` = \frac{2}{\sqrt{2}}(x` + \frac{\sqrt{2}}{2})^2.$$

Перенесем точку О в точку $O_1(-\sqrt{2}/2;\ 0)$. $\sqrt{2}x``^2 = y`$- уравнение параболы $X``O_1Y``$системе координат, симметричной относительно $O_1Y``$.

Пример 2. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 45^0, \\ x = \dfrac{x` - y`}{\sqrt{2}}, \\ x = \dfrac{x` + y`}{\sqrt{2}}. \end{array}\right\}$$

$$\frac{5}{2}(x` - y`)^2 + \frac{6}{2}(x` - y`)(x` + y`) + \frac{5}{2}(x` + y`)^2 - \frac{16\sqrt{2}}{2}(x` - y`) - \frac{16\sqrt{2}}{2}(x` + y`) - 16 = 0.$$

$$5x`^2 - 10x`y` + 5x`^2 + 6x`^2 - 6y`^2 + 5x`^2 + 10x`y` + 5y`^2 - 16\sqrt{2}(x` - y` + x` + y`) - 32 = 0.$$

$$5(x_1^2 + y_1^2) + 3x`^2 - 3y`^2 - 16\sqrt{2}x` - 16 = 0.$$

$$8(x`^2 - 2\sqrt{2}x` + 2 - 2) + 2y`^2 - 16 = 0.$$

$$8(x` - \sqrt{2})^2 - 16 + 2y`^2 - 16 = 0.$$

$$8(x` - \sqrt{2})^2 + 2y`^2 = 32 / : 32.$$

$$\frac{(x` - \sqrt{2})^2}{4} + \frac{y`^2}{16} = 1.$$

Полярная система координат

Пусть на плоскости даны некоторая точка О (назовем ее полюсом) и проходящая через нее ось ОР (назовем ее полярной осью). Будем определять положение точки М на плоскости по отношению к полюсу и полярной оси.

Назовем полярным радиусом точки М ее расстояние r=OM от полюса, а полярным углом точки М – угол φ между остью и вектором $\overrightarrow{OM}, -\pi \le \varphi \le \pi.$

Тогда каждой точке М на плоскости соответствует единственная пара чисел $r;\varphi\ (r \ge 0, -\pi \le \varphi \le \pi).$ Полярный радиус и полярный угол будем называть полярными координатами точки М на плоскости: М($r;\varphi$).

Пример 3. Построить точку А($2;3/4\pi$).

Можно установить связь между декартовыми и полярными координатами точки М. Проведем через полюс прямую, перпендикулярную *l,* - ось ОУ, начало координат совпадает с полюсом, а ось ОХ - с *l*.

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ x^2 + y^2 = r^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, tg\varphi = y/x.$$

Замечание. Для выведенных нами полярных координат $r \ge 0, -\pi \le \varphi \le \pi$. Однако такое ограничение не позволяет определить кривую в третьей и четвертой четвертях. В дальнейшем будем предполагать, что r,φ будут принимать значения от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда построение будем проводить следующим образом: $M_1(2, \pi/6), M_2(-2, \pi/6), M_3(2, -\pi/6), M_4(-2, -\pi/6).$

Построение кривых в полярной системе координат

Пример 4. Построить $r = 2(1 - \cos\varphi)$ и перейти к декартовым координатам:

φ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	π
r	0	0,6	1	2	3	3,4	4

$$x^2 + y^2 = 2\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right),$$

$$\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2, 1 + x^2 + y^2 + \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Пример 5. Построить кривую в полярной системе координат и найти ее уравнение в декартовой системе: $r = a(1 + 2\cos\varphi).$

Строим кривую по точкам: составим таблицу значений угла φ и соответствующих значений r.

φ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	3a	2,4a	2a	0	0	-0,4a	-0,7a	-a

Так как $cos\varphi$ - четная функция, то при отрицательных значениях φ получаем те же самые значения r, что и при положительных φ, значит, кривая симметрична относительно полярной оси.

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sqrt{x^2+y^2} = a\left(1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+y^2 = a\left(\sqrt{x^2+y^2}+2x\right),\ (x^2-2ax+y^2) = a^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left((x-a)^2+y^2-a^2\right)^2 = a^2(x^2+y^2),$$
$$(x-a)^4+y^4+a^4+2y^2(x-a)^2-2a^2(x-a)^2-3a^2y^2-a^2x^2 = 0.$$

Пример 6. $r = \frac{2}{sin\varphi}$.

φ	-$\pi/2$	-$\pi/4$	-$\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
r	-2	-3	-4	Не сущ.	4	3	2

$$r = \frac{2}{y/r} \Rightarrow r = \frac{2r}{y} / :r,\ y = 2.$$